数学分析

题解

（第二册）

第五篇 积分学

练 习

(§1. 原函数与不定积分的概念；§2.基本积分表；
§3. 最简单的积分法则)

1.求下列不定积分：

(1) $\int 6x\,dx$；

解：$\int 6x\,dx = 6\int x\,dx = 6\cdot\frac{1}{2}x^2 + c$

$= 3x^2 + c$。

(2) $\int(\sqrt{x} - 0.24x + 0.36x^3)\,dx$；

解：$\int(\sqrt{x} - 0.24x + 0.36x^3)\,dx$

$= \int\sqrt{x}\,dx - \int 0.24x\,dx + \int 0.36x^3\,dx$

$= \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 0.24\int x\,dx + 0.36\int x^3\,dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 0.24\cdot\frac{1}{2}x^2 + 0.36\cdot\frac{1}{4}x^4 + c$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 0.12x^2 + 0.09x^4 + c$ 。

(3) $\int\frac{x^3-3x^2+2x+4}{x^2}dx$；

解： $\int\frac{x^3-3x^2+2x+4}{x^2}dx=\int(x-3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})dx$

$=\int xdx-\int 3dx+\int\frac{2}{x}\ dx+\int\frac{4}{x^2}dx$

$=\int xdx-3\int dx+2\int\frac{1}{x}dx+4\int\frac{1}{x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2-3x+2ln|x|+4\cdot(-1)x^{-1}+c$

$=\frac{1}{2}x^2-3x+2ln|x|-4x^{-1}+c$。

(4) $\int\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx$；

解： $\int\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx=\int\frac{x^2+1+x^2}{x^2(x^2+1)}dx$

$=\int\left[\frac{x^2}{x^2(x^2+1)}+\frac{x^2+1}{x^2(x^2+1)}\right]dx$

$=\int\frac{1}{x^2+1}\ dx+\int\frac{1}{x^2}\ dx$

$=\mathrm{arctg}x-x^{-1}+c$。

(5) $\int\frac{x^2-4}{x-2}dx$；

解： $\int\frac{x^2-4}{x-2}\ dx=\int\frac{x^2-2^2}{x-2}dx=\int\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}dx$

$$=\int(x+2)dx=\int xdx+\int 2dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+2x+c。$$

（6） $\int(1+tg^2x)dx$；

解： $\int(1+tg^2x)dx=\int sec^2xdx=\int\frac{1}{cos^2x}dx$

$$=tgx+c。$$

（7） $\int\frac{cos2x}{cosx-sinx}dx$；

解： $\int\frac{cos2x}{cosx-sinx}dx=\int\frac{cos^2x-sin^2x}{cosx-sinx}dx$

$$=\int\frac{(cosx+sinx)(cosx-sinx)}{cosx-sinx}dx$$

$$=\int(cosx+sinx)dx$$

$$=\int cosxdx+\int sinxdx$$

$$=sinx-cosx+c。$$

（8） $\int\frac{4\cdot3^x-7\cdot2^x}{3^x}dx$；

解： $\int\frac{4\cdot3^x-7\cdot2^x}{3^x}dx=\int\left(\frac{4\cdot3^x}{3^x}-\frac{7\cdot2^x}{3^x}\right)dx$

$$=\int 4-7\cdot(\frac{2}{3})^x dx$$

$$=\int 4dx-\int 7\cdot(\frac{2}{3})^x dx$$

$$=4\int dx-7\int(\frac{2}{3})^x dx$$

$$=4x-7\cdot\frac{(\frac{2}{3})^x}{ln\frac{2}{3}}+c$$

$$=4x-7\cdot(\frac{2}{3})^x\cdot\frac{1}{ln\frac{2}{3}}+c。$$

(9) $\int\frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}dx$；

解：$\int\frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}dx=\int\frac{x^2-\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2}{x-\sqrt{2}}dx$

$$=\int\frac{(x-\sqrt{2})^2}{x-\sqrt{2}}dx=\int(x-\sqrt{2}dx)$$

$$=\int xdx-\sqrt{2}\int dx=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+c。$$

(10) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}-2(1-x^2)}{1-x^2}dx$。

解：$\int\frac{\sqrt{1-x^2}-2(1-x^2)}{1-x^2}dx$

$$=\int\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}-\frac{2(1-x^2)}{1-x^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}dx-\int 2dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-2\int dx$$

$$=\arcsin x-2x+c。$$

2. 试证函数$y=\ln(ax)$和$y=\ln x$是同一函数的原函数。

证： $\because\ [\ln(ax)]'=\frac{1}{ax}\cdot a=\frac{1}{x}$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$\therefore$ 函数$y=\ln(ax)$和$y=\ln x$都是$y=\frac{1}{x}$的原函数。

3. 一物体的运动速度$v=3t^2+4t$米/秒，当t等于2秒时，这物体经过的路程$S=16$米，试求物体的运动方程。

解： 设所求的运动方程为

$$s=F(t)$$

其中$F(t)$为未知函数

因为 $s'=F'(t)=V=3t^2+4t$

所以 所求的函数$F(t)$必包含在下面的不定积分中：

$$s=\int(3t^2+4t)\,dt$$

$$=3\int t^2dx+4\int tdt$$

$$=\ t^3+2t^2+c$$

当 $t=2$， $s=16$时，则有

$$16=2^3+2\cdot 2^2+c$$

即　$c=0$

故所求的运动方程是$s=t^3+2t^2$。

4.在积分曲线族$y=\int 5x^2dx$中，求一通过点（$\sqrt{3}$，$5\sqrt{3}$）的曲线方程。

解：　$y=\int 5x^2dx=5\int x^2dx$

$$=\frac{5}{3}x^3+c$$

∵　所求的曲线过点（$\sqrt{3}$，$5\sqrt{3}$），

∴　$5\sqrt{3}=\frac{5}{3}(\sqrt{3})^3+c$

即　$c=0$

故所求的曲线方程为$y=\frac{5}{3}x^3$。

练　习　二

（§4.分部积分与变量替换）

1.用分部积分法求下列不定积分：

(1)　$\int x^n \ln x dx$；（n为整数）

解：　设　$u=\ln x$，　$dv=x^n dx$

$$du=\frac{1}{x}dx,\quad v=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

由分部积分公式得：

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + e$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$$

（2） $\int x\cos x dx$； $= \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx$

解：设 $u = x$ $dv = \cos dx$

$du = dx$ $v = \sin x$

由分部积分公式得：

$$\int x\mathrm{Cos}x dx = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x - (-\mathrm{Cos}x) + C$$

$$= xs\sin x + \mathrm{Cos}x + C$$

（3） $\int (x^2 - 2x + 7)\ln x dx$；

解： 设 $u = \ln x$ $dv = (_x{}^2 - 2x + 7)dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $v = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 7x$

由分部积分公式得：

$$\int (x^2 - 2x + 7)\ln x dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+7x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+7x\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+7x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{3}x^2-x+7\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+7x\right)\ln x-\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2+7x\right)+C$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+7x\right)\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{2}x^2-7x+C$$

（4） $\int x^2a^x dx$；

解：设 $u=x^2$ $\quad dv=a^x dx$

$du=2xdx \quad v=\frac{1}{\ln a}a^x$

由分部积分公式得：

$$\int x^2a^x dx=x^2\frac{1}{\ln a}a^x-\int\frac{1}{\ln a}a^x 2xdx$$

$$=x^2\frac{1}{\ln a}a^x-\frac{2}{\ln a}\int xa^x dx$$

又设 $u=x$ $\quad dv=a^x dx$

$du=dx \quad v=\frac{1}{\ln a}a^x$

则 $\int xa^x dx=x\frac{1}{\ln a}a^x-\int\frac{1}{\ln a}a^x dx$

$$=x\frac{1}{\ln a}a^x-\frac{1}{\ln a}\int a^x dx$$

$$= x\frac{1}{\ln a}a^{x} - \frac{1}{\ln^2 a}a^{x} + C$$

故 $\int x^2 a^x dx = x^2\frac{1}{\ln a}a^x - \frac{2}{\ln a}\left(x\frac{1}{\ln a}a^x - \frac{1}{\ln^2 a}a^x\right) + C$

（5） $\int(\arcsin x)^2 dx$;

解：设 $u = (\arcsin x)^2$ 　　 $dv = dx$

$du = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 　　 $v = x$

由分部积分公式得：

$$\int(\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1=x^2}}dx$$

又设 $u = \arcsin x$ 　　 $dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 　　 $v = -\sqrt{1-x^2}$

则 $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$$

故 $\int(\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2$

$+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$。

(6) $\int \cos(\ln x)dx$;

解：设 $u=\mathrm{CoS}(\ln x)$ $\qquad dv=dx$

$$du=-\frac{1}{x}\sin(\ln x) \qquad v=x$$

由分部积分公式得：

$$\int \mathrm{Cos}(\ln x)dx = x\mathrm{Cos}(\ln x)+\int \sin(\ln x)dx$$

又设 $u=\sin(\ln x)$ $\qquad dv=dx$

$$du=\mathrm{Cos}(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx \qquad v=x$$

则 $\int \mathrm{Cos}(\ln x)dx = x\mathrm{Cos}(\ln x)+x\sin(\ln x)$

$-\int \mathrm{Cos}(\ln x)dx$

移项得

$$\int \mathrm{Cos}(\ln x)dx+\int \mathrm{Cos}(\ln x)dx$$

$$= x\mathrm{Cos}(\ln x)+x\sin(\ln x)+C$$

故 $\int \mathrm{Cos}(\ln x)dx=\frac{x}{2}\Big[\mathrm{Cox}(\ln x)+\sin(\ln x)\Big]+C$

(7) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$;

解：设 $u=\ln^3 x$ $\qquad dv=\frac{1}{x^2}dx$

$$du=3\ln^2x\cdot\frac{1}{x}dx \qquad v=-\frac{1}{x}$$

由分部积分公式得：

$$\int\ln^3x\cdot\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln^3x+3\int\ln^2x\cdot\frac{1}{x^2}dx;$$

又设 $u=\ln^2x \qquad dv=\frac{1}{x^2}dx$

$$du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \qquad v=-\frac{1}{x}$$

则$\int\ln^2x\cdot\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln^2x+\int 2\ln x\cdot\frac{1}{x^2}dx;$

再设 $u=\ln x \qquad dv=\frac{1}{x^2}dx$

$$du=\frac{1}{x}dx \qquad v=-\frac{1}{x}$$

则 $\int\ln x\cdot\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C;$$

故 $\int\ln^3x\frac{1}{x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}\ln^3x-\frac{3}{x}\ln^2x-\frac{6}{x}\ln x-\frac{6}{x}+C$$

$$=-\frac{1}{x}\left(\ln^3x+3\ln^2x+6\ln x+6\right)+C.$$

（8） $\int e^{-t}\cos\pi t dt$；

解：设 $u=e^{-t}$ $\quad dv=\cos\pi t dt$

$$du=-e^{-t}dt \qquad v=\frac{1}{\pi}\sin\pi t$$

由分部积分公式得：

$$\int e^{-t}\cos\pi t dt=\frac{1}{\pi}e^{-t}\sin\pi t+\frac{1}{\pi}\int e^{-t}\sin\pi t dt$$

又设 $u=e^{-t}$ $\quad dv=\sin\pi t dt$

$$du=-e^{-t}dt \qquad v=-\frac{1}{\pi}\cos\pi t$$

则 $\int e^{-t}\sin\pi t dt=-\frac{1}{\pi}e^{-t}\cos\pi t-\int\frac{1}{\pi}\cos\pi t e^{-t}dt$

故 $\int e^{-t}\cos\pi t dt$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-t}\sin\pi t-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}e^{-t}\cos\pi t+\frac{1}{\pi}\int e^{-t}\cos\pi t dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-t}\sin\pi t-\frac{1}{\pi^2}e^{-t}\cos\pi t-\frac{1}{\pi^2}\int e^{-t}\cos\pi t dt$$

移项合并同类项得：

$$\left(1+\frac{1}{\pi^2}\right)\int e^{-t}\cos\pi t dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(e^{-t}\sin\pi t-\frac{1}{\pi}e^{-t}\cos\pi t\right)+c$$

$$\int e^{-} \cos\pi t dt =$$

$$\frac{1}{1+\pi^2} e^{-t}(\pi\sin\pi t - \cos\pi t) + C.$$

2.用变量替换法求下列不定积分：

(1) $\int (2x+3)\sqrt{x^2+3x+6}\,dx$；

解：设 $x^2+3x+6=t \qquad dt=(2x+3)dx$

由变量替换公式得

$$\int (2x+3)\sqrt{x^2+3x+6}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+3x+6)^{\frac{3}{2}} + C$$

(2) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$；

解：设 $\cos x = t \quad dt = -\sin x dx \quad \sin x dx = -dt$

由变量替换公式得：

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} \sin x dx = \int (\cos x)^{-\frac{2}{3}} \sin x dx$$

$$= \int t^{-\frac{2}{3}} \cdot (-)dt = -\int t^{-\frac{2}{3}}dt$$

$$= -3t^{\frac{1}{3}} + C$$

$$= -3(\mathrm{Cos}\,x)^{\frac{1}{3}} + C$$

（3） $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$；

解：设 $\sqrt{x} = t \qquad x = t^2 \qquad dx = 2tdt$

由变量替换公式得：

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{1+t} 2tdt = 2\int \frac{t}{1+t} dt$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{1+t} dt$$

$$= 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})^2 + C$$

（4） $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} dx$；

解：设 $\sqrt[3]{x} = t \qquad x = t^6 \qquad dx = 6t^5 dt$

由变量替换公式得：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx = \int \frac{1}{t^3(1+t^2)} \cdot 6t^5 dt$$

$$= \int \frac{6t^2}{(1+t^2)} dt = 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= 6\int dt - 6\int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$=6t-6\mathrm{arctg}t+C$$

$$=6\sqrt[6]{x}-6\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C$$

$$=6(\sqrt[6]{x}-\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x})+C$$

（5） $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$；

解： 设 $x=2\sin t \qquad dx=2\mathrm{Cos}tdt$

由变量替换公式得：

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int 4\sin^2t\sqrt{2^2-(2\sin t)^2}\cdot 2\mathrm{Cos}tdt$$

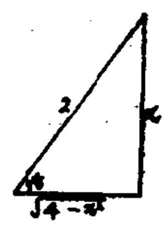
$$=\int 8\sin^2t\sqrt{1-\sin^2t}\cdot 2\mathrm{Cos}tdt$$

$$=16\int \sin^2t\mathrm{Cos}^2tdt$$

$$=4\int \sin^2 2tdt=2\int(1-\mathrm{Cos}4t)dt$$

$$=2\int dt-2\int \mathrm{Cos}4tdt$$

$$=2t-\frac{1}{2}\sin 4t+C$$



$$=2t-\sin 2t\mathrm{Cos}2t+C$$ （图一）

$$=2t-2\sin t\mathrm{Cos}t(1-2\sin^2t)+C$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{x^3}{4}\sqrt{4-x^2}+C$$

（6） $\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$；

解：设　$x=a\sin t$　　$dx=a\cos tdt$

由变量替换公式得：

$$\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}\cdot a\cos tdt$$

$$=\int\frac{a\sin t}{a\cos t}\cdot a\cos tdt=a\int\sin tdt$$

$$=-a\cos t+C=-a\sqrt{1-\sin^2 t}+C$$

$$=-a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C$$

$$=-\sqrt{a^2-x^2}+C$$

（7）$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$；

解：设　$x=3\sec t$　　$dx=3\sec t\,\mathrm{tg}t\,dt$

由变量替换公式得：

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{(3\sec t)^2-9}}{3\sec t}3\sec t\,\mathrm{tg}t\,dt$$

$$=3\int\mathrm{tg}t\cdot\mathrm{tg}t\,dt=3\int\mathrm{tg}^2t\,dt$$

$$=3\int(\sec^2t-1)dt$$

$$=3\int\sec^2t\,dt-3\int dt$$

$$=3(\mathrm{tg}t-t)+C$$