

求解高速弹性机构稳态响应的 闭式线性多步方法

高晓春 金芝英 張启先

【摘 要】

本文从线性多步方法的一般形式出发,提出了求解周期时变振动系统(输入构件匀速转动的高速弹性机构可作为它们的一种特殊情况)稳态响应的一种闭式方法。为检验该方法,对二个例题进行了分析计算,并同已有文献的实验结果进行了比较。结果表明,它们之间符合得很好。此外,计算结果还表明,同富里叶级数方法相比,该闭式方法不仅精度高,而且计算效率高得多。

引 言

用有限元方法建立高速弹性机构数学模型时,通常可得一如下形式的二阶运动微分方程组:

$$M(t)\ddot{d} + C(t)\dot{d} + K(t)d = F(t) \quad (1)$$

式中 d 、 $\dot{d}$ 、 $\ddot{d}$ 、 $F(t)$ 分别是广义位移、速度、加速度及广义力向量; $M(t)$ 、 $C(t)$ 、 $K(t)$ 分别称为机构的质量、阻尼及刚度矩阵,随时间或机构位置变化而变化。对大多数机构来说,输入构件匀速转动,这些系数矩阵及广义力向量均是周期变化的,变化的周期等于输入构件转一周所需时间。如果考虑到构件轴向力在横向位移上的作用或材料的非线性,刚度矩阵将与广义位移有关,此时,方程(1)是非线性的。

高速弹性机构的响应包括稳态和瞬态响应两大类。除开关机构等少数机构外,一般机构输入构件匀速转动,均需求稳态响应。Midha[1]提出了一种基于模态分析求解稳态响应的闭

本文于1986年6月23日收到

式方法。该方法将机构的一个运动循环划分成许多子区间,在每个子区间内,假定微分方程组(1)是常系数的。然后利用常微分方程模态分析方法,根据子区间端点位移、速度的连续性及周期运动的边界条件,可得出大型线性代数方程组。解之即可得方程(1)的周期解,从而获得弹性机构的稳态响应。该方法的前提条件是,微分方程组(1)在每一个子区间内可以解耦。因此,当考虑刚性运动和弹性运动之间的耦合作用时,该方法将失效。对此,Turcic[2]提出了一种改进的迭代算法。然而,求解一系列特征值问题是一非常耗时的工作。

Nath[3]、Cleghorn[4]则提出了一种求解式(1)稳态解的富里叶级数方法。他们将运动方程等式两边各项表示成有限项富里叶级数,根据等式两边各次谐波对应系数相等,得出大型线性代数方程组。通过求解该方程组即可确定广义位移富里叶级数表达式中的待定系数。不同的是,Nath从单元运动方程出发,而Cleghorn则从系统运动方程着手。但最后得出的线性代数方程组维数均很高,并且是非带状[3]或带宽很大的带状[4]矩阵。此外,富里叶级数方法的计算速度随系统广义坐标数目的增加而急剧减慢[5]。因此,该方法计算效率不高。

Song[6]、Alexander[7]和Sadler[8]等人利用数值积分方法来求解方程(1)的稳态解,而Bagei[9]则采用状态空间矩阵幂方法来求解。但所有这些方法均是从一任意初始条件出发,将积分几个循环后的解作为方程(1)的稳态解。

本文从线性多步方法的一般形式着手,推导出求解方程(1)稳态解的一种闭式方法。

线性多步方法及其一般形式

用线性多步方法求解如下线性常系数动力学方程

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P \quad (2)$$

的初值问题时,可以证明[10]k步方法的一般形式可表示如下:

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i M c - \gamma_i h C c - \beta_i h^2 K c) x_{n+1-i} = h^2 \sum_{i=0}^k \beta_i P_{n+1-i} \quad (3)$$

式中, h 表示时间积分步长, x_{n+1-i} ($i=0 \sim k$) 表示 x 在 $t_n + (1-i)h$ 处的计算值 (t_n 为一任意时刻), P_{n+1-i} ($i=0 \sim k$) 表示广义力在 $t_n + (1-i)h$ 处的值。 α_i 、 γ_i 、 β_i ($i=0 \sim k$) 均是系数,其取值随着方法的不同而不同,但规定 $\alpha_0=1$ 。目前常用的方法有二步 Newmark 方法,三步 Houbolt 方法、Park 方法及 α -方法等[11]。它们所对应的系数值如表 1 所示。

表1 常用多步方法的系数

多步方法	二 步		三 步	
系数	Newmark方法	α -方法	Houbolt方法	Park方法
α_1	-2	-2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{12}{5}$
α_2	1	1	2	$\frac{9}{5}$
α_3		0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$

续表1

多步方法	二步	三步	步	
系数	Newmark方法	α -方法*	Houbolt方法	Park方法
γ_0	γ	$\gamma(1+\alpha)$	$\frac{11}{12}$	1
γ_1	$1-2\gamma$	$1+\alpha-2\gamma-3\alpha\gamma$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
γ_2	$\gamma-1$	$-1-2\alpha+\gamma+3\alpha\gamma$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{5}$
γ_3		$\alpha(1-\gamma)$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{10}$
β_0	β	$\beta(1+\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
β_1	$-\frac{1}{2}+\gamma-2\beta$	$-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\gamma-2\beta+\alpha\gamma-3\alpha\beta$	0	0
β_2	$-\frac{1}{2}-\gamma+\beta$	$-\frac{1}{2}-\gamma+\beta-2\alpha\gamma+3\alpha\beta$	0	0
β_3		$-\alpha(-\frac{1}{2}-\gamma+\beta)$	0	0

* $\alpha \in [-\frac{1}{3}, 0]$, $\gamma = -\frac{1}{2}(1-2\alpha)$, $\beta = -\frac{1}{4}(1-\alpha)^2$ 时, α -方法是无条件稳定的 [11], 本文按此要求选取参数 α , β , γ 的值。

与式 (3) 相对应, 求解时变系数方程 (1) 初值问题的线性 k 步方法的一般形式可表示如下:

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i \mathbf{M}_{n+1-i} + \gamma_i h \mathbf{C}_{n+1-i} + \beta_i h^2 \mathbf{K}_{n+1-i}) \mathbf{d}_{n+1-i} = h^2 \sum_{i=0}^k \beta_i \mathbf{F}_{n+1-i} \quad (4)$$

式中 $\mathbf{M}_{n+1-i}$, $\mathbf{C}_{n+1-i}$, $\mathbf{K}_{n+1-i}$ ($i=0 \sim k$) 分别是时刻 $t_n + (1-i)h$ 时质量、阻尼及刚度矩阵的值, $\mathbf{d}_{n+1-i}$ 是 $\mathbf{d}$ 在时刻 $t_n + (1-i)h$ 时的计算值; $\mathbf{F}_{n+1-i}$ 是 $\mathbf{F}$ 在时刻 $t_n + (1-i)h$ 时的值。

闭式方法

求解时变系统初值问题的线性多步方法表示成式 (4) 的形式后, 便可推导出求解其稳态解的闭式方法。为简便起见, 下面将以二步方法为例给出推导过程。

由式 (4) 可得, 二步方法的一般形式为:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M}_{n+1} + \gamma_0 h \mathbf{C}_{n+1} + \beta_0 h^2 \mathbf{K}_{n+1}) \mathbf{d}_{n+1} + (\alpha_1 \mathbf{M}_n + \gamma_1 h \mathbf{C}_n + \\ & + \beta_1 h^2 \mathbf{K}_n) \mathbf{d}_n + (\alpha_2 \mathbf{M}_{n-1} + \gamma_2 h \mathbf{C}_{n-1} + \beta_2 h^2 \mathbf{K}_{n-1}) \mathbf{d}_{n-1} \\ & = h^2 (\beta_0 \mathbf{F}_{n+1} + \beta_1 \mathbf{F}_n + \beta_2 \mathbf{F}_{n-1}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\text{设} \quad & \mathbf{A}_{n+1}^{n+1} = \mathbf{M}_{n+1} + \gamma_0 h \mathbf{C}_{n+1} + \beta_0 h^2 \mathbf{K}_{n+1} \\
& \mathbf{A}_n^{n+1} = \alpha_1 \mathbf{M}_n + \gamma_1 h \mathbf{C}_n + \beta_1 h^2 \mathbf{K}_n \\
& \mathbf{A}_{n-1}^{n+1} = \alpha_2 \mathbf{M}_{n-1} + \gamma_2 h \mathbf{C}_{n-1} + \beta_2 h^2 \mathbf{K}_{n-1} \\
& \mathbf{Q}^{n+1} = h^2 (\beta_0 \mathbf{F}_{n+1} + \beta_1 \mathbf{F}_n + \beta_2 \mathbf{F}_{n-1})
\end{aligned} \quad (6)$$

则式 (5) 可简洁地表示为

$$\mathbf{A}_{n+1}^{n+1} \mathbf{d}_{n+1} + \mathbf{A}_n^{n+1} \mathbf{d}_n + \mathbf{A}_{n-1}^{n+1} \mathbf{d}_{n-1} = \mathbf{Q}^{n+1} \quad (7)$$

现将输入构件一运动循环划分成 N 等分, 各等分点分别用 $1 \sim N$ 表示。如果输入构件转动周期为 T , 则积分步长 $h = T/N$ 。假设某任意时刻 t 时 $\mathbf{d}_1$ 、 $\mathbf{d}_2$ (分别表示等分点 1、2 处的广义位移值) 已给定, 则由式 (7) 逐步积分一个运动循环可得:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}_3^3 \mathbf{d}_3 + \mathbf{A}_2^3 \mathbf{d}_2 + \mathbf{A}_1^3 \mathbf{d}_1 = \mathbf{Q}^3 \\
& \mathbf{A}_4^4 \mathbf{d}_4 + \mathbf{A}_3^4 \mathbf{d}_3 + \mathbf{A}_2^4 \mathbf{d}_2 = \mathbf{Q}^4 \\
& \vdots \\
& \mathbf{A}_i^i \mathbf{d}_i + \mathbf{A}_{i-1}^i \mathbf{d}_{i-1} + \mathbf{A}_{i-2}^i \mathbf{d}_{i-2} = \mathbf{Q}^i \\
& \vdots \\
& \mathbf{A}_N^N \mathbf{d}_N + \mathbf{A}_{N-1}^N \mathbf{d}_{N-1} + \mathbf{A}_{N-2}^N \mathbf{d}_{N-2} = \mathbf{Q}^N \\
& \mathbf{A}_{N+1}^{N+1} \mathbf{d}_{N+1} + \mathbf{A}_N^{N+1} \mathbf{d}_N + \mathbf{A}_{N-1}^{N+1} \mathbf{d}_{N-1} = \mathbf{Q}^{N+1} \\
& \mathbf{A}_{N+2}^{N+2} \mathbf{d}_{N+2} + \mathbf{A}_{N+1}^{N+2} \mathbf{d}_{N+1} + \mathbf{A}_N^{N+2} \mathbf{d}_N = \mathbf{Q}^{N+2}
\end{aligned} \quad (8)$$

以上最后两式分别表示时刻 $t+T$, $t+T+h$ (分别用 $N+1$, $N+2$ 表示) 时的积分式。当输入构件匀速转动时,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}_{N+1}^{N+1} = \mathbf{A}_1^1, \mathbf{A}_N^{N+1} = \mathbf{A}_N^1, \mathbf{A}_{N-1}^{N+1} = \mathbf{A}_{N-1}^1, \mathbf{Q}^{N+1} = \mathbf{Q}^1 \\
& \mathbf{A}_{N+2}^{N+2} = \mathbf{A}_2^2, \mathbf{A}_{N+1}^{N+2} = \mathbf{A}_1^2, \mathbf{A}_N^{N+2} = \mathbf{A}_N^2, \mathbf{Q}^{N+2} = \mathbf{Q}^2
\end{aligned}$$

以上两组系数矩阵及列向量可通过在式 (6) 中分别令 $n=0, 1$ 来计算, 但此时某些矩阵及向量的下标等于或小于零, 为此, 这些下标均需相应加 N 。此外, 由周期稳态解的边界条件:

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_{N+1}, \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_{N+2}$$

式 (8) 的最后两式可重新表示为:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}_1^1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{A}_N^1 \mathbf{d}_N + \mathbf{A}_{N-1}^1 \mathbf{d}_{N-1} = \mathbf{Q}^1 \\
& \mathbf{A}_2^2 \mathbf{d}_2 + \mathbf{A}_1^2 \mathbf{d}_1 + \mathbf{A}_N^2 \mathbf{d}_N = \mathbf{Q}^2
\end{aligned} \quad (9)$$

该式同式 (8) 的前 $N-2$ 个式子一起, 可用分块矩阵表示成如下的线性代数方程组

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{A}_1^1 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{N-1}^1 & \mathbf{A}_N^1 \\
\mathbf{A}_1^2 & \mathbf{A}_2^2 & & & 0 & \mathbf{A}_N^2 \\
\mathbf{A}_1^3 & \mathbf{A}_2^3 & \mathbf{A}_3^3 & & & 0 \\
0 & \mathbf{A}_2^4 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
0 & 0 & & \mathbf{A}_{N-2}^N & 0 & \\
& & & \mathbf{A}_{N-1}^N & \mathbf{A}_N^N & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{N-2}^N & \mathbf{A}_{N-1}^N & \mathbf{A}_N^N
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathbf{d}_1 \\
\mathbf{d}_2 \\
\vdots \\
\mathbf{d}_{N-1} \\
\mathbf{d}_N
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\mathbf{Q}^1 \\
\mathbf{Q}^2 \\
\vdots \\
\mathbf{Q}^{N-1} \\
\mathbf{Q}^N
\end{pmatrix} \quad (10)$$

解以上方程组，即可直接得出方程（1）的稳态解。由式（10）可知，该方程组的系数矩阵除右上角有一维数为二的分块上三角矩阵块外，是一带宽为三的下半带状分块矩阵。因此，容易用高斯消去法求解。

由以上的推导过程可以看出，采用 k 步方法时，最后也可得出一形如式（10）的线性代数方程组。但此时的系数矩阵除右上角有一维数为 k 的分块上三角矩阵块外，是一带宽为 $k+1$ 的下半带状分块矩阵。但由于常用的多步方法均是二步、三步方法，所以其带宽远比文[4]所得出的线性代数方程组系数矩阵的带宽小。并且方程组（10）更容易求解（因为是下半带状）。因此，采用该闭式多步方法可大大提高计算效率，这将在下节的算例中得到证实。

例题及其结果分析

为了验证本文所提出方法的有效性，将上述过程编成FORTRAN程序，并在IBM4341计算机上对以下三个例题进行了分析计算。

例1. 利用线性多步方法从两条途径求解以下一维时变系数二阶微分方程

$$\ddot{x} + 0.5(5 + 0.5\sin t)\dot{x} + (5 + 0.5\sin t)^2 x = \sin t \quad (11)$$

的稳态解。其一是从任意初始条件出发，积分若干循环后的解作为稳态解。另外，就是利用

本文提出的闭式方法求它的稳态解。采用的多步方法为梯形法则（即 Newmark 方法中， $\beta =$

$\frac{1}{4}$ ， $\gamma = \frac{1}{2}$ 时的情形）， α —方法（考虑了 $\alpha = -0.1, -0.2, -0.3$ 三种情形）。时间步长为 $h = \pi/40$ 。计算表明，两种情况下所得稳态解几乎是相同的（由于计算误差，在某些等分点处，计算结果在小数点后第五位数字上有差别），如图1所示（见附图）。

下面将对两个弹性平面四杆机构进行分析计算。分析中采用混合梁单元建立机构的数学模型，具体过程可参见作者的文章[5]。单元划分均为1-2-2（三个数字分别表示曲柄、连杆及摇杆的单元划分数目）。积分时间步长 $h = \pi/(20\omega_2)$ （ ω_2 是输入构件的角速度），也即将机构的一个运动循环划分成四十等分。

例2. 曲柄摇杆机构各杆的长度为：

曲柄： $L_2 = 30.48$ cm

连杆： $L_3 = 91.44$ cm

摇杆： $L_4 = 76.20$ cm

机架： $L_1 = 91.44$ cm

各构件横截面均为 $2.54 \times 2.54 \text{ cm}^2$ 的正方形。材料为铝。输入杆以转速 $n = 600$ 转/分逆时针匀速转动。摇杆输出轴上有一等效转动惯量为 $806500.8 \text{ 克} \cdot \text{厘米}^2$ 的载荷。摇杆中点外侧应力的计算结果如图2所示（见附图）。计算中假设物理阻尼矩阵与质量矩阵成比例，比例系数为 $0.1\omega_2$ 。此外，还用基于Park方法的闭式算法进行了计算，其结果与基于Houbolt方法的结果相似，为清晰起见，图中没有描出。为便于比较，图中还给出了文[5]和[3]用富里叶级数方法求解的计算结果。

由图可知，采用富里叶级数方法的计算结果与基于Houbolt和Park方法的闭式多步方法

的结果相似, 高次谐波被截去了。

例3. 许多研究者为检验他们的方法以文[7]中的实验机构作为分析计算的例子。该机构各构件长度及横截面尺寸为:

曲柄: $L_2 = 10.16 \text{ cm}, 2.54 \times 0.42 \text{ cm}^2$

连杆: $L_3 = 27.94 \text{ cm}, 2.54 \times 0.16 \text{ cm}^2$

摇杆: $L_4 = 26.67 \text{ cm}, 2.54 \times 0.16 \text{ cm}^2$

机架: $L_1 = 25.4 \text{ cm}$

材料均为铝。曲柄以转速 $n = 400$ 转/分顺时针匀速转动。曲柄和连杆及连杆和摇杆之间的轴承重量均为 27.22 克。

连杆及摇杆中点应变的计算结果如图 3、4 所示 (见附图)。图中, 曲柄输入角 θ_2^* 按顺时针计算, 同样, 为清晰起见, 基于 Park 方法的计算结果, 由于与基于 Houbolt 方法的相似, 图中没有描出。图中还给出了采用富里叶级数方法的计算结果 (此时, 广义位移截取前十次谐波, 机构的一个运动循环同样被划分成四十等分)。此外, 为便于比较, 图 3、4 中还给出了 Alexander 的实验结果 [7]。

从图 3、4 中可以看出, 用前述基于梯形法则和 α -方法的闭式多步方法所得出的解与实验结果符合得很好。但基于 Houbolt 和 Park 方法的计算结果, 由于算法阻尼较大, 同用富里叶级数方法所得出的结果相似, 高次谐波被截去了, 这三种情况下的计算结果同实验结果相差较大。

计算中, 所采用的物理阻尼矩阵与文 [7] 中相同, 即:

$$c_{11}^p = 2\xi_1 \sqrt{k_{11}/m_{11}}, \quad c_{ij}^p = 0, \quad i \neq j$$

阻尼比 ξ_i 均取为 0.02。

计算所需 CPU 时间随所用方法的不同而变化。在本文提出的闭式方法中, 采用二步方法 (梯形法则) 时, 所需 CPU 时间约为 30 秒, 采用三步方法 (α -方法、Park 方法及 Houbolt 方法) 时, 约 49 秒。但采用富里叶级数方法时, 所需 CPU 时间约 380 秒。因此, 与富里叶级数方法相比, 前述闭式二步和三步方法的计算速度分别提高约十二倍和七倍。

结 束 语

从线性多步方法的一般形式出发, 本文提出了求解周期时变二阶微分方程组 (输入杆匀速转动的高速弹性机构可作为其特殊情况) 稳态解的一种闭式方法。该方法利用稳态解的边界条件, 通过求解一系数矩阵高度稀疏的线性代数方程组, 可直接得出微分方程组的稳态解, 无需积分若干个循环。此外, 该方法简单易行, 不受微分方程系数矩阵具体形式的限制。

通过上节中计算结果与实验结果相比较, 我们发现, 本文提出的闭式方法采用梯形法则和 α -方法时的分析结果同实验结果符合得很好, 而采用 Houbolt 和 Park 方法时, 由于算法阻尼较大, 其计算结果同实验结果相差较大, 一般不宜采用。此外, 计算结果还表明, 在机构的一个运动循环划分成相同等分时, 该闭式多步方法的精度比富里叶级数方法高, 并且计算速度快得多。

值得指出的是, 最近 Sander 和 Zhuang [2] 提出了一种类似的基于中心差分法的闭式方法, 他们的方法是本文提出的闭式方法的一种特殊情况。需要说明的是, 由于中心差分法是

显式的，计算时为了保持这种方法的稳定性，必须选择很小的步长（在上节后两个例题的分析中，该方法在前述计算条件下是不稳定的）。因此，这种方法的计算效率不高。

附 图

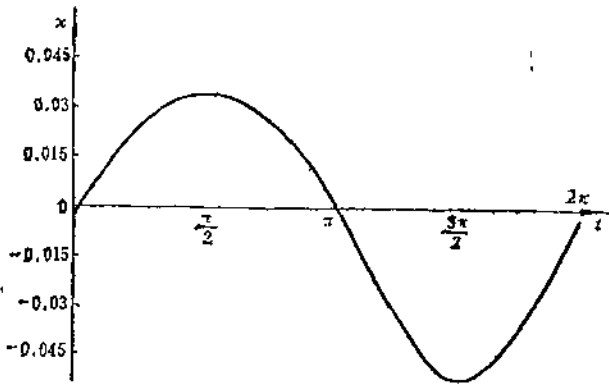


图 1 方程 (11) 的稳态解 (例 1)

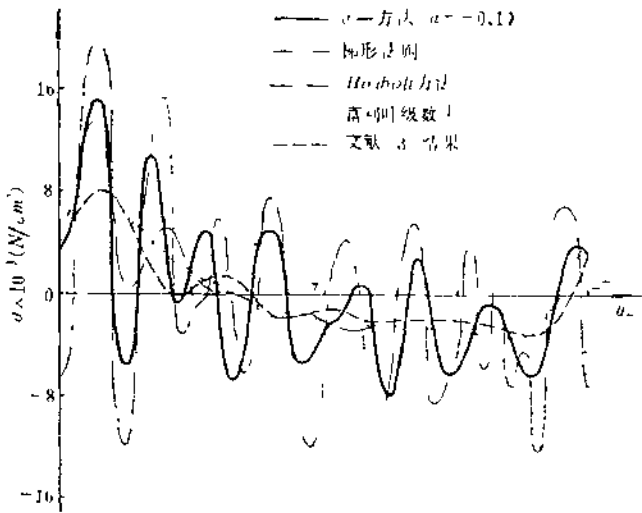


图 2 摇杆中点的计算应力 (例 2)

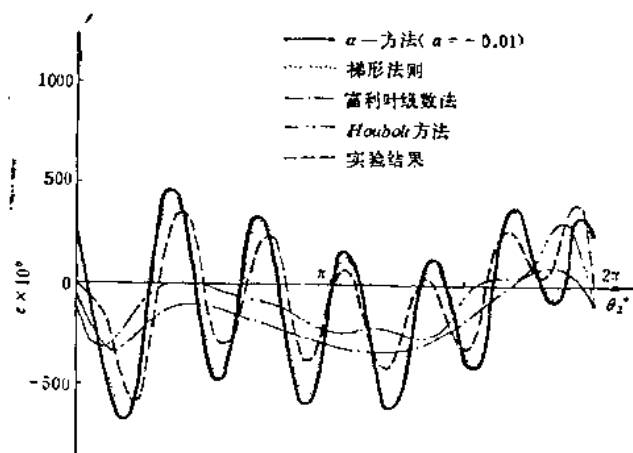


图3 连杆中点的计算及实验应变(例3)

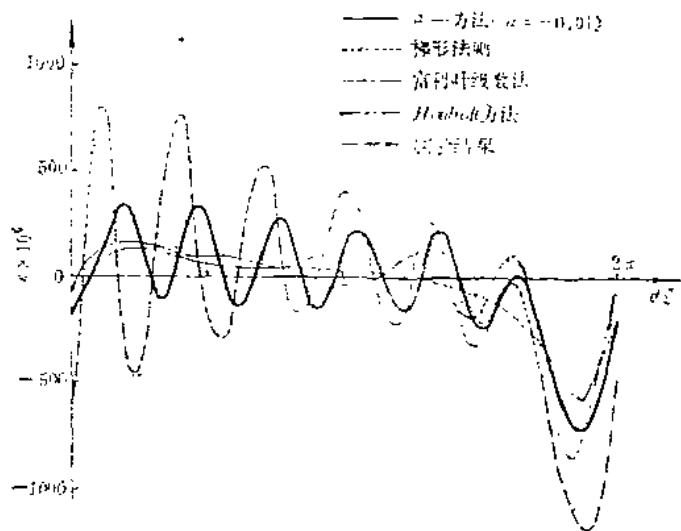


图4 摇杆中点的计算及实验应变(例3)

参 考 文 献

- [1] A. Midha, A. G. Erdman and D. A. Frohrib: "A closed-form numerical algorithm for the periodic response of high-speed elastic linkages" ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 101, Jan. 1979, pp. 154~162.
- [2] D. A. Turcic and A. Midha: "Dynamic analysis of elastic mechanism systems, Part I: Applications" ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 106, Dec. 1984, pp. 249~254.
- [3] P. K. Nath and A. Ghosh: "Steady-State response of mechanisms with elastic links by finite element methods" Mechanism and Machine Theory, Vol. 15, No.3, 1980, pp.199~211.
- [4] W. L. Cleghorn, R. G. Fenton and B. Tabarrok: "Steady-State vibrational response of high-speed flexible mechanisms" Mechanism and Machine Theory, Vol. 19, No. 4/5, 1984, pp. 417~423.
- [5] 高晓春, 金芝英和张啓先: "建立高速平面弹性连杆机构数学模型的一种高效方法" 北京航空学院三十二周年校庆论文, 1985年10月。
- [6] J.O. Song and E. J. Haug: "Dynamic analysis of planar flexible mechanisms" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 24, 1980, pp. 359~381.
- [7] K. M. Alexander and K. L. Lawrence: "An experimental investigation of the dynamic response of an elastic mechanism" ASME, Journal of Engineering for Industry, Feb. 1974, pp. 268~274.
- [8] J. P. Sadler: "On the analytical lumped-mass model of an elastic four-bar mechanism" ASME, Journal of Engineering for Industry, May 1975, pp. 561~565.
- [9] C. Bagci and S. Kalaycioglu: "Elastodynamics of planar mechanisms using planar actual finite line elements, lumped mass systems, matrix-exponential method and the method of critical-geometry-kineto-elasto-statics" ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 101, July 1979, pp. 417~427.
- [10] 高晓春: "求解振动方程的一类显式多步方法" 第一届全国计算力学青年研讨会交流论文, 1986年7月。
- [11] T. Belytschko and T. J. R. Hughes: "Computational methods for transient analysis" Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1983.
- [12] G. N. Sander and X.R. Zhuang: "A linearized lumped parameter approach to vibration and stress analysis of elastic linkages" Mechanism and Machine Theory, Vol.20, 1985, pp. 427~437.

A CLOSED-FORM LINEAR MULTI-STEP ALGORITHM FOR THE STEADY-STATE RESPONSE OF HIGH-SPEED ELASTIC MECHANISMS

Gao Xiaochun Jin Zhiying Zhang Qixian

A B S T R A C T

Based on the general form of linear multi-step methods, a closed-form algorithm for the steady-state solution of periodically time-dependent vibrating systems—high-speed elastic mechanisms with uniform input rotation can be taken as their special case—is developed. The algorithm is tested by three examples and verified by comparing the computational responses with the previously published experimental results. Besides, compared with the Fourier series method, this algorithm is of high accuracy and far higher computational efficiency.