目　录

级
审

毛主席语录

自然科学是人们争取自由的一种武装，……人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自克服自然和改造自然，从自然里得自由。

第一章　微积分基本分析方法和极限

十七世纪以前的数学，主要是研究不变的量和不变的图形，即所谓初等数学阶段。到十七世纪中叶，由于社会生产力的发展，**“自然科学当时也在普遍的革命中发展着”**《自然辩证法》。商业的发展促进交通情况的改善，而水运的改善则要求了解物体在液体中的运动规律。航海需要确定船只在海洋中的位置，即要测定经度和纬度，而采矿事业的发展又需要研究简单机械。当时力学的各个分支——质点动力学，流体力学，天体力学等已初步形成。总之，生产与科学研究实践都要求自然科学考察和研究事物的运动变化状态，为了能够定量地研究运动，就要有表达运动规律的数学，于是产生了微分积分学。**“只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，并且也表明过程，即运动”**《自然辩证法》。

资产阶级把微积分搞的神秘难懂，一方面是由于他们故弄玄虚，抬高物价，以此来实现他们排斥工农兵，进行文化垄断的政治目的；另一方面，是因为他们的世界观是唯心主义和形而上学的，他们不可能理解微积分方法中丰富的辩证思想，更不愿去看微积分的实践来源。

恩格斯说过：**“变数的数学——其中最重要的部分是微积分——按其本质来说也不是别的，而是辩证法在数学方面的运用”**（反杜林论）。

因此，只要用（辩证唯物主义）辩证法的哲学思想，反对资产阶级形而上学；紧密联系实际，就能真正地掌握微积分方法的精神实质，使微积分成为认识自然、改造自然的数学工具。

第一节　微积分基本分析方法

一、问 题 的 提 出

客观世界，一切事物总是处于不停的变化过程中，我们只有从事物变化过程中去认识它，才能更深刻地掌握它的变化规律，抓住其变化本质，以用于改造自然，因此，对事物变化的研究就成为必要的了。毛主席教导我们：**“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊性。”**在生产斗争和科学实验中的实际问题，从变化角度来说，按其矛盾的特殊性，可分为均匀变化（相对的）和非均匀变化（绝对的）两大类。这两大类变化各自有其显著的特殊性。所以解决的办法也就不同。

（一）均匀变化

我们在物理学中已经知道，速度不变的运动叫匀速运动。火车离开车站后的正常行驶阶段，车床自动进刀时刀架在导轨上的移动，都可看成是匀速运动。而物体运动的规律往往通过它所在的位置与时间的函数关系反映出来。

设物体相对于某一固定点运动的路程为 s，时间为 t，则路程 s 为时间 t 的函数。记为：

$$s=s(t)$$

我们知道，匀速运动的物体，其速度 v_0 是一个常数。那么，路程和时间就有如下关系：

$$s(t)=v_0t$$

（其中v_0是物体运动的速度）

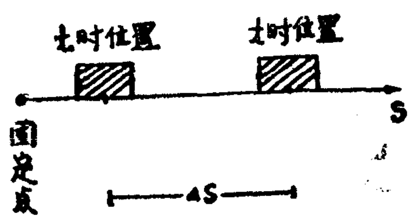

图　1—1

如果物体在时刻t_0时与某一固定点的距离为

$$s(t_0)=v_0t_0,$$

而在时刻 t 时为

$$s(t)=v_0t$$

（见图1—1）则得：

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{v_0t-v_0t_0}{t-t_0}=v_0\frac{t-t_0}{t-t_0}=v_0(v_0\text{是常数})\cdots\cdots \quad (1.1)$$

这就是说：在匀速运动中，物体通过的路程和所需的时间之比是一个常数。

若用Δt表示时间由t_0变到 t 时的改变量。即

$$\Delta t=t-t_0,\ t=t_0+\Delta t$$

用Δs表示，对应时间改变量Δt的路程改变量（由$s(t_0)$变到$s(t)$）。即

$$\Delta s=s(t)-s(t_0)=s(t_0+\Delta t)-s(t_0),$$

则（1.1）式，可写成

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=v_0\ (v_0\text{是常数})$$

这表明，Δs与Δt成正比例。这种性质表现了匀速运动的特点：在任何相等的时间间隔里（不管从哪一时刻算起），经过的路程也相等。（见图1—2）

一般地，对任意函数$y=f(x)$来说，当自变量从任一点x_0变到x时（即给x_0一个改变是$\Delta x=x-x_0$），对应的函数值从$f(x_0)$变到$f(x)$（即y有改变量

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)),\text{若}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$=K(K\text{为常数})\cdots\cdots(1.2)$$

则称y是随x均匀变化的。即称$f(x)$为均匀变化函数。

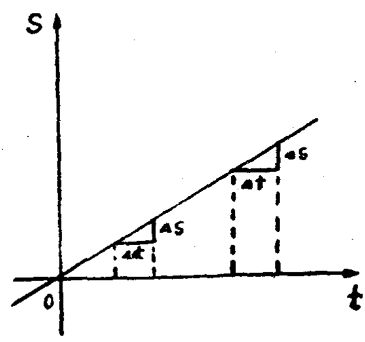

图 1—2

从（1.2）式及图1—2，我们不难得知：均匀变化函数的图象必为一直线。

（其斜率为$K=\frac{\Delta y}{\Delta x}$）反之，如果一函数的图象是一直线，则该函数所反映的客观变化必是均匀的。

（二）非均匀变化

前面，我们以物体的匀速运动为例，讨论了函数随自变量均匀变化的问题。这类均匀变化的问题，虽然在生产实践和科学技术中经常遇到，但更普遍、更一般的变量间的关系，则是非均匀变化的。毛主席教导我们："**就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物逐步地扩大到认识一般的事物。**"下面我们将通过对匀加速运动的讨论，来认识非均匀变化的本质。

匀加速运动是最简单的变速运动，汽车、火车等在起动阶段，可看作是匀加速运动；汽车发动机结构中，为了避免冲击，推动气阀的挺杆在"过渡段"的运动也是匀加速运动。又比如，打夯时，夯体下落和夹扳锤锤头的下落等自由落体运动，则是比较典型的匀加速运动的例子。

我们假定物体开始下落时的速度为零，由实验知道，经过t秒时物体的速度为：

$$v=gt\ \text{（}g\text{为重力加速度，是一常数）}$$

由上式可知，速度v是随时间t而变的。所以，它的运动是非匀速运动。

毛主席教导我们："**不同质的矛盾，只有用不同的方法才能解决。**"自由落体运动，是变速运动中最简单的运动，可是要求这种简单的变速运动的路程（即求路程s和时间t的函数关系），初等数学已无法解决。（即不能用匀速运动的路程公式$s(t)=v_0t$，来算变速运动的路程）要想求出变速运动的路程，就必须用微积分方法。在这里，我们先给出它的结果：

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1.3)$$

以便以此为例，来说明非均匀变化的本质。

由(1.3)式，可算出每一时刻下落的路程。如下表

时间t（秒）	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	……
路程s（米）	0	0.049	0.196	0.441	0.784	1.225	1.764	2.401	3.13[illegible]	3.969	4.9	……

从上表可以看出：

由　$t=0$　到$t=0.1$时，$\Delta t=0.1$，$\Delta s=0.049$；

由　$t=0.1$到$t=0.2$时，$\Delta t=0.1$　$\Delta s=0.147$；

由　$t=0.2$到$t=0.3$时，$\Delta t=0.1$，$\Delta s=0.245$。

由此可见，虽然经过同样的时间间隔$\Delta t=0.1$（秒），但因开始时刻的不同，则其路程的改变量Δs却是彼此不同的（见图1—3）。即

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}\neq K\text{（}K\text{是常数）。}$$

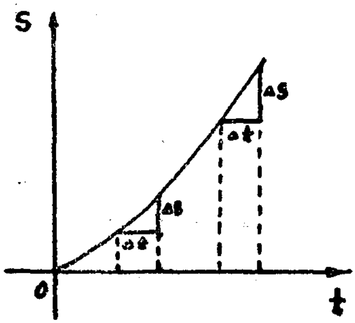

图　1—3

这就是说，函数的改变量与自变量的改变量是不成比例的。这一点就是非匀速运动（非均匀变化）与匀速运动（均匀变化）的本质区别。

为了解决这类在生产和科学技术中，普遍存在的非均匀变化问题，我们给出概括地，一般地非均匀变化的数学概念：

一般地，对任意函数$y=f(x)$来说，如果对于任一点x_0的改变量Δx，对应的函数改变量Δy，若

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\neq K\text{（}K\text{是常数）}$$

则把函数$f(x)$，称为非均匀变化函数。

由非均匀变化函数的定义可知，它的图象不会是直线，必然是曲线。反之，图象为曲线的函数，它所反映的客观变化规律必定是非均匀的。

在上面，我们以物体的匀速运动和匀加速的变速运动为例，引入了均匀变化函数和非均匀变化函数的概念，并对它们的本质特点进行了分析讨论，均匀变化问题可以用初等数学来解决，但非均匀变化的问题，则是初等数学不能解决的问题。

在生产斗争和科学实验中，变量间的函数关系，有些是均匀变化的，但大量地还是非均匀变化的。我们以后所讨论的问题都是非均匀变化的。均匀变化和非均匀变化是变量之间关系所具有的特殊的矛盾性。对于这对矛盾的研究，产生了微积分方法，正如恩格斯所指出的：**“变量是数学的转折点，因此运动和辩证法也进入了数学，因此微分和积分就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生出来。”**

二、解决均变化和非均变化矛盾的基本思路

在前面，我们提到过，均匀变化函数的图象是一条直线；非均匀变化函数的图象是一条曲线。所以，均匀变化和非均匀变化（即匀和不匀；变与不变）的矛盾，实际上就是“曲”和“直”的矛盾。现在我们来讨论解决“曲”和“直”这对矛盾的基本思路问题。

毛主席教导我们：**“人的正确思想，只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争，阶级斗争和科学实验这三项实践中来。”**

劳动人民在长期的社会实践中，用了各种巧妙的方法来解决“曲”和“直”的矛盾，充分显示了劳动人民的聪明和才能。

钳工师付们用平锉可以锉出一个园形工件，平锉锉一下是直的，但不断改变锉的方向，就能锉出一个园形的工件（图 1 — 4）

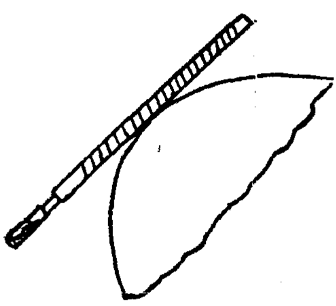

图　1 — 4

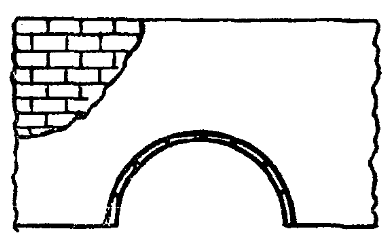

图　1 — 5

建筑工人用条石，可以砌成弧形的桥洞，（见图 1 — 5）用砖可以砌成园形的烟筒（见图 1 — 6）。从一块条石（或砖）来看是直的，总

的却是园的。

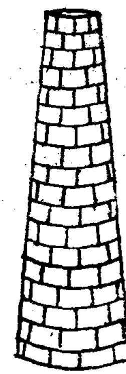
图 1—6

劳动人民的生产实践，说明了一个真理：**“矛盾着的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方面转化。”**“曲”和“直”这一对矛盾，在一定的条件下可以互相转化，这个条件就是，相对于整体来说，在局部很短的一段上，可以“以直代曲”（“不变代变”，匀代不匀）。正如恩格斯所说：**“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下，直线与曲线应当是一回事。”**因而，解决“曲”和“直”的矛盾的基本思路就是：在整体的极小的局部上，以直线代替曲线，也就是以不变代变，以均匀变化代替非均匀变化。

三、微积分基本分析方法

劳动人民解决“曲”和“直”，“不匀”和“匀”的实践经验，就蕴藏着生动扑素的微积分思想方法。下面，我们结合几个具体生产实例，来讨论如何运用在局部“以直代曲”、“匀代不匀”，这一基本思路，解决非均匀变化的问题。如图 1—7。

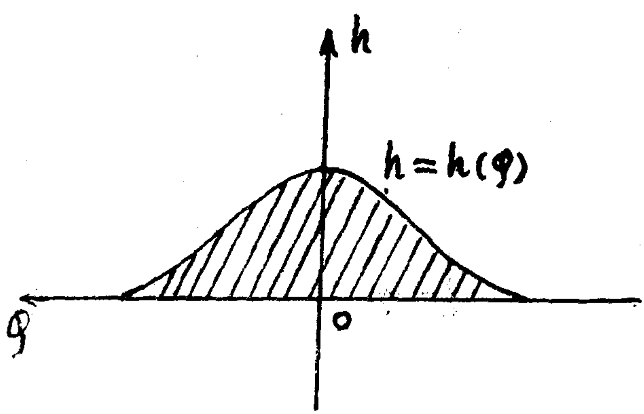

图 1—7
时间——断面
φ 表示控制气阀运动的凸轮的旋转角；h 表示气阀的升程（即气阀的运动路程）

由汽车工业的生产实践与理论研究已知，时间——断面越大，汽车发动机的效能就越好，所以在设计工作中要计算时间——断面，即要计算由曲线 $h(\varphi)$与 φ 轴所围成的曲边图形的面积。

又如在建筑工程的设计工作中，为计算梁或楼板的挠度，有时就要计算“弯矩图形”的面积。如图 1—8。

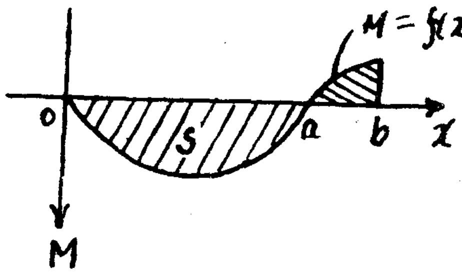

图 1—8

M表示弯矩

在实际生产和科学技术中，需要计算曲边图形面积的问题是很多的（在以后的学习过程中会逐步体会到，所谓积分问题从几何意义上说，都是计算曲边图形面积的问题）。为了初学方便，不失其一般性，我们把这类问题抽象地简化为计算曲边三角形面积，象计算时间断面等复杂问题（函数 $h=h(\varphi)$较复杂），将在第三章里解决。

例1.1 试计算由函数 $y=kx^2$（k 为常数）的图象，与 ox 轴及直线 $x=a$ 所围成图形的面积。如图 1—9。

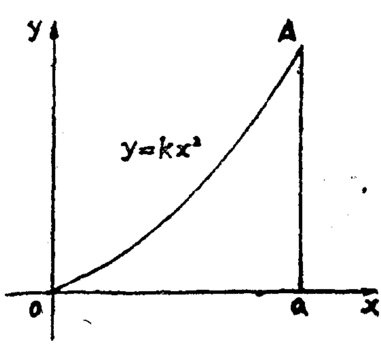

图 1—9

解：1. 分析主要矛盾

在初等数学中，我们会计算直边三角形的面积（三角形面积等于底乘高之半），在这里，三角形oaA的oA边不是直的(见图1—9)，而是曲的。显然，不能应用直边三角形面积公式来计算曲边三角形面积。会求直边形面积，不会求曲边形面积，其根本困难就在于oA是曲的，而不是直的。所以说解决曲边形面积计算问题，需要解决“曲”和“直”的矛盾。因为，函数图象是直线，是反映均匀变化的；而函数图象是曲线，是反映变化是非均匀的。所以说：解决“曲”和“直”的矛盾，也就是解决函数的非均匀变化（$y=kx^2$是非均匀变化函数）和

均匀变化的矛盾。

2. 解决矛盾的基本方法

前面，已经分析了计算曲边三角形oaA的面积，需要解决"曲"和"直"的矛盾，而解决"曲"和"直"的矛盾的基本思路，则是在局部"以直代曲"，"匀代不匀"。现在我们就用这种基本方法来求曲边三角形oaA的面积。

第一步，将函数$y=kx^2$的定义域：区间〔$0,a$〕用分点$x_0=0$，$x_1,\cdots\cdots,x_n=a$，分成n个相等的小段：

$$[x_0,x_1][x_1,x_2]\cdots\cdots[x_{n-1},x_n]。$$

每小段的长，用下述符号表示：

$$dx_i=x_i-x_{i-1}=\frac{a}{n}(i=1,2,\cdots n)$$

过各分点x_1，$x_2\cdots\cdots x_n$作y轴的平行线，于是将oaA分成n个小部分。用符号$\Delta s_i(i=1,\cdots n)$来表示第i个小曲边梯形的面积（见图1—10）

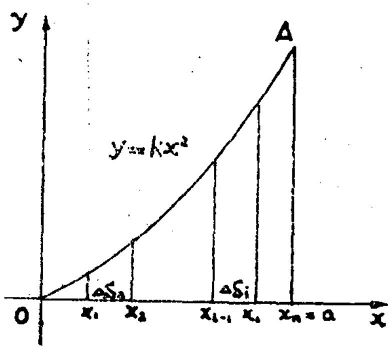

图 1—10

第二步，做每个小曲边梯形面积Δs_i的近似量。为此，我们以每一小段〔x_{i-1},x_i〕的左端点x_{i-1}处的函数值$y=kx_{i-1}^2$为高；以每小段长dx_i为底，做小矩形，以ds_i表示小矩形面积$(i=1,2,\cdots n)$

因

$$dx_i=x_i-x_{i-1}=\frac{a}{n},x_{i-1}=\frac{i-1}{n}a,$$

所以有

$$ds_i=k\left(\frac{i-1}{n}\right)^2a^2\cdot\frac{a}{n}=\frac{ka^3}{n^3}(i-1)^2$$

显然，

$$\Delta s_i\approx ds_i\qquad(i=1,2,\cdots n)$$

（见图1—11）

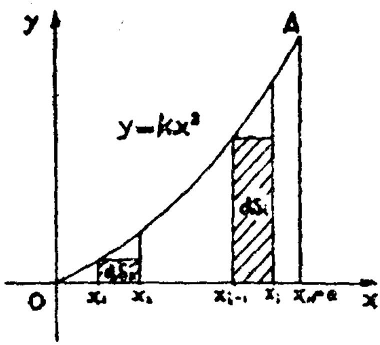

图 1—11

这样一来，为了计算小曲边梯形面积Δs_i，我们可以用一个和它相差很小，而且容易计算出来的小矩形面积去代替它。我们把ds_i叫做曲边三角形面积的微分。

这样，每个小曲边梯形面积Δs_i对应的都有一个小矩形面积ds_i与其近似。即

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta s_1 \approx ds_1 = 0 \cdot dx_1 = 0;\\
&\Delta s_2 \approx ds_2 = kx_1^2 \times dx_2 = k\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{a}{n} = k\frac{a^3}{n^3};\\
&\Delta s_3 \approx ds_3 = kx_2^2 \times dx_3 = k\left(\frac{2a}{n}\right)^2\frac{a}{n} = \frac{2^2ka^3}{n^3}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Delta s_i \approx ds_i = kx_{i-1}^2 \times dx_i = k\left(\frac{i-1}{n}a\right)^2\frac{a}{n} = (i-1)^2\frac{ka^3}{n^3}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Delta s_n \approx ds_n = kx_{n-1}^2 \times dx_n = k\left(\frac{n-1}{n}a\right)^2\cdot\frac{a}{n} = (n-1)^2\frac{ka^3}{n^3},
\end{aligned}\right\}(1.4)$$

第三步，设曲边三角形oaA的面积为S，我们把(1.4)式这n个近似量（即曲边三角形oaA面积的n个微分）加起来，则得曲边三角形oaA面积的近似量：

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} ds_i{}^*,$$

即有

$$S = \sum_{i=1}^{n}\Delta s_i \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} ds_i = \sum_{i=1}^{n} k(i-1)^2\frac{a^3}{n^3}$$

$$= k\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

---

* $\sum_{i=1}^{n} ds_i = ds_1 + ds_2 + ds_3 + \cdots\cdots + ds_n$

因为

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1),$$

所以有

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx\sum_{i=1}^{n}ds_i=S_n=\frac{ka^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\quad\cdots\cdots(1.5)$$

这样，由于在局部范围内"以直（直边形）代曲（曲边形）"的结果，使我们得到曲边三角形oaA的面积S的一个近似量S_n。而S_n随着把区间$[o\ a]$分的段数增加而增大，如$n=3$时（即把区间$[o\ a]$分成三等分）S_3如图1—12阴形部分；当$n=6$时（即把区间$[o\ a]$分成六等分）S_6如图1—13阴形部分。

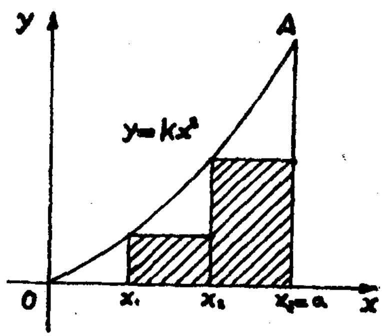

图 1—12

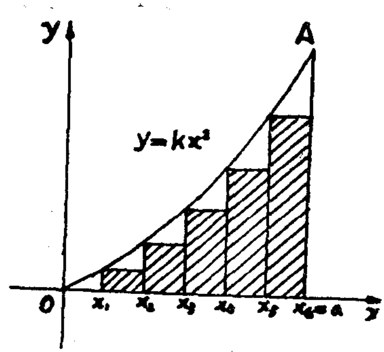

图 1—13

从图1—12及图1—13可以看出

$$S_3<S_6<S$$

不仅如此，近似量S_n，还随着n的不断增大（即把区间$[o,a]$分的段数不断增多，也就是每一小段$[x_{i-1},x_i]$的长度不断减小）而不断的接近精确量S。为此，我们可换另一种方法得到曲边三角形oaA面积S的另一近似量S'_n。在图1—10中，我们以$[x_{i-1}x_i]$段的右端点x_i处的函数值$y=kx_i^2$为高，以每小段

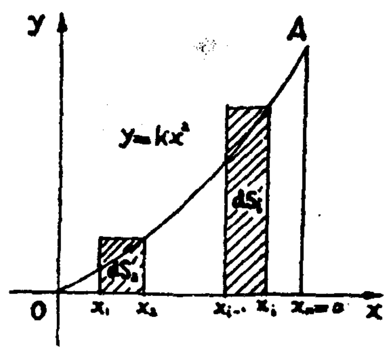

图 1—14

长dx_i为底，做小矩形，以ds'_i表示此矩形面积（见图1—14）

于是，

$$\Delta s_i \approx ds'_i = kx_i^2 dx_i = kx_i^2 \cdot \frac{a}{n} = ki^2 \frac{a^3}{n^3}。$$

同上面一样的做法，我们将求得$\Delta s_1, \cdots, \Delta s_n$所对应的近似量$ds'_1$，$ds'_2, \cdots, ds'_n$（即$n$个小矩形面积），并将这$n$个小矩形面积，加起来便得到曲边三角形$oaA$面积$S$的另一近似量

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} ds'_i$$

即有

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} ds'_i = S'_n = k\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= k\frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{ka^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})。$$

由图1—11及图1—14可看出，对任意确定的n总有

$$S_n < S < S'_n,$$

从而有

$$S - S_n < S'_n - S_n = \frac{ka^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) - \frac{ka^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})$$

$$= ka^3 \cdot \frac{1}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.6)$$

由(1.6)式不难看出，我们所求得的近似量S_n，在n不断增大时，就越接近精确量（即曲边三角形oaA的面积S）

尽管能做到，当分的分数增加时（即n增大时）近似量S_n就越接近精确量S（即随着n的增大，S与S_n的差是不断变小的）。但无论n取得怎么大（确定的n）计算出来的S_n，只能是曲边三角形oaA面积S的近似量，而不是S自己。这就产生一个新的矛盾——近似和精确的矛盾。

这个矛盾怎样解决呢？恩格斯在谈到人类认识能力的无限性和这种

认识能力，因受当时具体条件限制的局限性二者之间的矛盾时说。这个矛盾“**是在人类世代的无穷的——至少对于我们，实际上是无穷的——连续系列之中是在无穷的前进运动之中解决的。**”

这就是说，所求的精确量S，只有近似量S_n，在n无限增大的变化过程中，才能得到解决。因此，为了使近似转化为精确，需要考查S_n在n无限增大时的趋向值——所求精确量S。

在我们这个具体问题中，总体近似量是：

$$S_n=\frac{ka^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})$$

在n无限增大时，趋向值很容易确定，因为$\frac{1}{n}$，在n无限增大时，无限减小，而最后趋于零。所以，在n无限增大时S_n的趋向值是$\frac{ka^3}{3}$。也就是曲边三角形oaA的精确面积S。

在数学上将“n无限增大时，S_n的趋向值是$\frac{ka^3}{3}$”，这一事实表示为

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{ka^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})=\frac{ka^3}{3}。$$

（其中lim是极限符号）并称$\frac{ka^3}{3}$是S_n在n无限增大时的极限。我们把这无限多个微分的积累$\frac{ka^3}{3}$叫做积分。

根据以上的讨论，我们看到：计算曲边三角形的面积问题，需要完成两个转化，一个是由曲到直；一个是由近似到精确。

这里关键的步骤是局部“以直代曲”，这是因为：第一，局部近似的结果，使我们把“未知”（不会求小曲边梯形面积）化为“已知”（会求小矩形面积），从而得到总体（曲边三角形oaA面积S）的近似量；第二，更重要的是这样得到的总体近似量，能够随着把函数定义域$[o,a]$分的段数增多，即n不断增大时，使该总体近似量能够越来越接近所求的精确量；第三，“绝对只能存在于相对之中”，局部近似为整体近似转化为精确创造了条件。

例2. 水闸门的压力计算

在水利工程中，设计水闸门时，需要知道闸门承受的水压力，如图1—15。从经验知道，水越深，水的压力越大，一般用单位面积上所受压力的大小来衡量水压的强度，这个强度称为**压强**，在水深 h 米处，压强就是单位面积上水柱的重量。因为，水深 h 米处的单位面积上的水柱的体积 $V=h$（立方米），水的比重 $r=1$（吨/立方米），所以，水深 h 米处的单位面积的水柱重量即是 h（吨/立方米）。如果用 p 表示水深 h 米处的压强，那么，

$$p=h \text{（吨/平方米）}。$$

这个函数图象见图1—16所示。

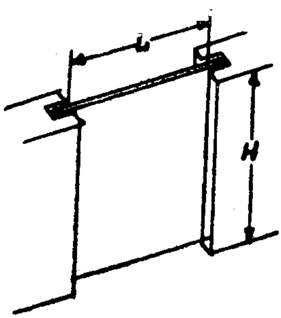

图 1—15

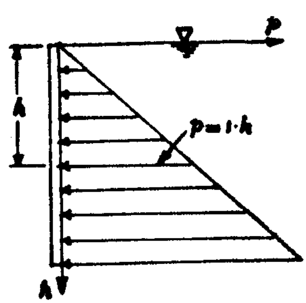

图 1—16

现在，需算出水闸门所受总压力 F。

解： 1. 分析主要矛盾

如果是均匀受压（即压强不随水深而变，是处处相等）的情况，可用下面的公式来计算压力：

$$\text{压力}=\text{压强}\times\text{受压面积}。$$

现在的问题是压强 p 随水的深度不断变化（$p=h$），所以，上面的公式不能直接应用。压强不变可以解决，压强变化不会解决。所以，求闸门所受水压力就必须解决压强“变”与“不变”的矛盾。

2. 解决矛盾的基本方法

经验告诉我们，相同水深处压强相同，并且水深变化很小时，压强也变化很小，可近似的看成不变。所以，总体看压强虽然是变的，但局部看来由于水的深度变化很小，压强又可以近似地看成不变。在水的深

度变化很小的范围内，以不变的压强近似代替变的压强，则是解决这对矛盾的基本思想方法。

设水闸门宽为 l，高为 H 闸门上端与水面平齐，现在我们来计算水闸门所受的压力。

第一步，将水闸门从上到下分成 n 个相等的小横条（即将闸门高 H 分成 n 个等分），分点标记如图 1—17所示。将每个小横条上的实际水压力依次记为

$$\Delta F_1, \Delta F_2 \cdots\cdots \Delta F_n。$$

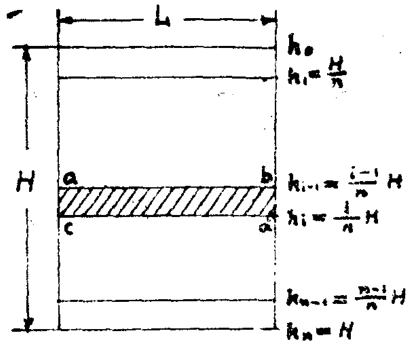

图 1—17

第二步，考查第 i 个小横条 $abcd$（图中有阴影的部分），在 $abcd$ 中各处的压强虽然不同（如在 ab 线上的压强 $p=h_{i-1}=\frac{i-1}{n}H$；在 cd 线上压强 $p=h_i=\frac{i}{n}H$），但在 n 很大时（即分的分数很多时），$dh_i=h_i-h_{i-1}=\frac{H}{n}$ 就很小，所以，在 $abcd$ 上的压强可以近似看成不变。例如都等于 $p=h_{i-1}=\frac{i-1}{n}H$。这样一来，就得到了 $abcd$ 上的实际水压力 ΔF_i 的近似量：

$$\begin{aligned} dF_i &= h_{i-1}\times abcd\text{面积} \\ &= h_{i-1}\times dh_i\times l \\ &= lH^2\frac{i-1}{n}. \end{aligned}$$

我们把 dF_i 叫做水闸总压力 F 的微分。

第三步，对每个小横来都像上述那样处理，则得对应 $\Delta F_1, \Delta F_2, \cdots, \Delta F_n$ 的近似量 $dF_1, dF_2, \cdots, dF_n$。将它们加起来，即得到水闸门总压力 F（精确压力）的近似量

$$F\approx F_n=\sum_{i=1}^{n} dF_i$$