前　　言

本次会议由中国力学学会理性力学和力学中的教学方法专业组于1981年10月合肥会议决定由兰州大学主持，无锡轻工业学院承担会务。会议文集由兰州大学装订成册，由于时间仓促，一切筹备事宜不能满足要求，请与会同志原谅。

叶　开　源

1982年9月21日

于兰州大学17号楼203号

目　　录

（第一册）

板、壳有限变形分析

陈至达

（中国矿业学院）

一、理论发展的简要回顾

薄平板的有限变形理论在1874年出版的Kirchhoff的力学教程[1]已有讲述，并引入中法线守恒的变形假设。在壳体变形理论方面，Aron（1874）首先采用Gauss的曲面表示参数法建立中面的几何学，并用弹性力学的一般观点，求得薄壳形变势能表达式，结果和Kirchhoff在板问题所得形式相同，但在十九世纪，对板壳力学发展的障碍是没有建立和梁结构力学方法一样具有简单数学结构的微分方程，借以解答各类边界支承的板壳实用问题。在本世纪初期，Love、Flügge、Timoshenko等人对板壳理论作了全面发展，他们的贡献是熟知的。但由于缺乏一种严格的数学分析方法，各位学者对板壳空间变形的应变分量与曲率改变计算公式存在着差异，长期争论，问题仍难解决。本短文的意图在于根据钱伟长教授在1941—1944年间[8]，[9]建立的板壳有限变形一般理论观点的基础上，结合作者的几何场论，介绍计算任意形状壳体有限变形应变量与局部转动的基本重要方法。

在1910年，Kármán[2]首先推导出薄板的大挠度方程。在1934年，Donnell[3]又导出薄圆筒受压屈曲的大变形非线性微分方程。以后，Kármán和钱学森（1941，1942）[4]，[5]在研究薄圆筒屈曲时曾指

出：壳体大变形时，中曲面的伸长和曲率改变对应变分量的影响是否要计算到二阶小量，有必要进一步更系统地根据*Kirchhoff*，*Boussinesq* 等人发展的非线性理论来研究。最近十年中，用有限元法近似解决板壳小挠度问题卓有成效，而对于大挠度、大转动问题由于经典变形几何学的缺点，计算结果并不那么满意。*Hughes*〔6〕在1981年发表的一文中谈到，分析壳体大变形大转动问题比之线性问题和有局限普遍性的非线性问题要困难得多，许多研究有限元的学者认为当前任务应突破壳体理论一关，须采用非线性连续体力学的基本方程作为出发点。显然，此番言论表明壳体的非线性理论基础是不健全的，特别是在有限变形几何学方面。

*Truesdell*在一篇论材料有理力学（*Rational Mechanics of Materials*）〔7〕发展史的文中提到用有限变形非线性力学方法建立板壳理论的重要工作，其中值得提起的是*Synge*、钱伟长〔8〕〔9〕，*Zerna*、*Green*〔10〕〔11〕НОВОЖИЛОВ〔12〕等学者的工作。

*Truesdell*在评论*Kármán*的平板大挠度方程推导方法（参见*Ciarlet*〔13〕（1980））认为数学方法是高明的，但引用的一些假设是先验未经证明的，而且对大变形与小变形描述法的区别是含混不清的。

事实上，在〔8〕〔9〕文中采用拖带坐标系（*Comoving Coordinate System*）描述法，并明白地提出区分变形前及变形后的中面位形在建立有限变形的板壳理论是重要的方法基础。

二、壳体变形的经典假设

经典的板壳理论一般采纳了下列未经证明而为简化计算的变形假设，在文献中常称之为Kirchhoff-Love 假设：

(1)应力的中性面在变形过程中保持为中性面。

(2)中面的法线当板壳变形后仍垂直于中面。

(3)变形过程中，厚度保持不变。

这些简化计算的假设对于各向同性均质材料的板壳当变形较小时，实验证明是可用的。但用延展性能好的材料构成壳体，当中面伸长量很大时，厚度将会有明显改变。再之曲率改变很大时，中性面也会转移，实验已证实这一点，虽然对计算误差影响不大。另一方面，诸如厚壳，层状壳、复合材料组成的壳体，因为横向角变形的出现，中法线守恒的假设须作修正。

从承载能力言，当壳变形小时，弯曲应力起了支承载荷的主要作用，Kirchhoff-Love 假设的适用性大。当变形增大，面力作用转化为主要的，此时经典假设产生的误差将增大。

三、壳体空间运动的一般描述法

在〔9〕文中，对板与壳的分类曾作了详尽的讨论。板可看为壳的特例，而且当板大挠度变形时，在一般情况成为壳体。所以将壳作为一般讨论对象。

壳体空间运动的拖带坐标系采用二重参考系：(1)固定于空间的坐标系X^i。(2)嵌含在变形体中的参考系（拖带坐标系x^i）。拖带坐标线嵌含在变形体，宛如钢尺上的刻线，

随着钢尺变形，质点坐标值不变，但质点间的尺规改变。

设 B_0 为壳体初始位形的中曲面，（X^1，X^2）为中曲面上的坐标，其上任一点的位矢以 $\vec{r}_0$ 表之。$\overset{\circ}{\vec{a}}_\alpha$（$\alpha=1$，$2$）为中曲面上一点的协变基矢，$\overset{\circ}{\vec{a}}_3$ 为单位法线。于是壳体中任一点的位矢可表为

$$\vec{r}=\vec{r}_0\ (x^1\ x^2)+t\overset{\circ}{\vec{a}}_3\ (x^1\ x^2) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$t=x^3$ 是该点到中面的垂直距离。

在初始位形壳体内一点可以确定一组协变基矢：　　　　图 1

$$\overset{\circ}{\vec{g}}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i},\quad (\overset{\circ}{\vec{g}}_3=\overset{\circ}{\vec{a}}_3),\quad d\vec{r}=\overset{\circ}{\vec{g}}_i\,dx^i \tag{2}$$

初始壳体内微元线段长度 ds_0，

$$ds_0{}^2=\overset{\circ}{g}_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{3}$$

变换后 $\vec{r}_0\to\vec{R}_0$，$\vec{r}\to\vec{R}$，设 $\vec{a}_3$ 为变换后中曲面上一点的单位法线，

$$\begin{aligned}\vec{R}&=\vec{R}_0\ (x^1,x^2)+t\,\vec{a}_3\ (x^1,x^2)+\vec{\eta}\,(x^1,x^2,t)\\&=\vec{r}+\vec{U}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\vec{U}=\vec{R}-\vec{r}=\vec{u}_0+t(\vec{a}_3-\overset{\circ}{\vec{a}}_3)+\vec{W} \tag{4a}$$

$\vec{u}_0$ 为中面上一点的位移矢量。$\vec{U}$为壳体内一点的位移矢量，它包括中法线的偏转与厚度变化的影响。

变换后，在壳体内定义基矢

$$\vec{g}_i=\frac{\partial\vec{R}}{\partial x^i}, \qquad d\vec{r}=\vec{g}_i\,dx^i \tag{5}$$

变换后壳体内微元线段长度

$$ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{6}$$

因此，由公式$\vec{R}$，我们有

$$\vec{g}_i=(\delta_i^j+U^j|_i)\overset{\circ}{\vec{g}}_j=F_i^j\overset{\circ}{\vec{g}}_j \tag{7}$$

其中

$$\vec{U}=U^i g_i,\ F_i^j=\delta_i^j+U^j|_i \tag{7a}$$

以矩阵符号记之

$$\vec{g}=F\overset{\circ}{g} \tag{8}$$

F为变换函数，也称为形变梯度函数。

为了度量应变状态，许多学者提出各种不同表示式，但能建立完整数学理论者仅有三种，其他 逐渐被淘汰。因基矢变换$\overset{\circ}{\vec{g}}_i\rightarrow\vec{g}_i$足以表征壳体内一点邻域的变形与局部转动状态。因此度量变形状态的应变分量可以利用F函数导出。

（a）Green 应变张量 ν，直接由基矢 $\vec{g}$ 的标量积定义

$$\nu=\frac{1}{2}(\vec{g}^T\cdot\vec{g}-\overset{\circ}{\vec{g}}^T\cdot\overset{\circ}{\vec{g}})=\frac{1}{2}(F^TF-I)(\overset{\circ}{\vec{g}}\cdot\overset{\circ}{\vec{g}}) \tag{9}$$

或 $$\nu_{ij}=\frac{1}{2}(g_{ij}-\overset{\circ}{g}_{ij}) \tag{9a}$$

但上式仅利用 $\vec{g}$ 变换的模，没有确定相应的转动，Новожилов 在〔12〕中采用三个参数表征在一点邻域的转动：

$$tg\varphi_i=\frac{\omega_i}{\sqrt{(1+e_{jj})(1+e_{kk})-\frac{1}{4}e_{jk}}}\quad i\neq j\neq k \tag{10}$$

（符号意义见〔12〕）。但此公式难于应用。

（b）极分解定理（Theorem of polar decomposition）（见 Truesdell 理性（有理）力学导论〔15〕变换函数 F 可分解为

$$F=RU=VR \tag{11}$$

R 是正交张量，对于真转动，$RR^T=I$，$det\,R=+1$。U 和 V 是对称张量，分别称为右伸张和左伸张张量，满足关系：

$$V=RUR^T \tag{12}$$

极分解定理在平面变形的显式表示由 Biot〔16〕给出，但对于空间情况，仅有近似结果，公式也很复杂。且因空间转动具有次序性，三维乘积分解是非唯一表示的。直至在壳体理论中无法取得应用。

(c)直和分解定理。Stokes在1845年采用和式分解求出微小变形的应变分量S和微小转动w。

$$F=S+(w+I) \tag{13}$$

S为对称，w为反对称的。对于有限变形与转动，上式不具明确几何意义。合理的分解为

$$F=S+R \tag{14}$$

S为对称的张量，R为正交的转动张量。德国数学家Weyl曾对此问题进行过研究，但未获最后结果。正确的结果在〔18〕中给出，称为S－R（应变－转动）分解定义，

令 ϵ^i_j 一应变张量的物理分量

θ 一在一点的平均整旋角。

$\hat{L}^i_j$ 一平均整旋轴方向余弦。

$\hat{U}^i$ 一位移的物理分量，$\vec{U}=U^i\hat{g}_i$

D/DS^i一沿拖带坐标线的绝对导数

$DS^i=\sqrt{g_{ii}Dx^i}$

具体公式有（物理分量表示式）

$$\epsilon^i_j=\frac{1}{2}\left(\frac{D\hat{U}^i}{DS_j}+\frac{D\hat{U}^j}{DS^i}\right)$$

$$-\hat{L}^i_\theta\hat{L}^\theta_j(1-\cos\theta)$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{D\hat{U}^2}{DS^1}-\frac{D\hat{U}^1}{DS^2}\right)^2+\left(\frac{D\hat{U}^1}{DS^3}-\frac{D\hat{U}^3}{DS^1}\right)^2+\left(\frac{D\hat{U}^3}{DS^2}-\frac{D\hat{V}^2}{DS^3}\right)^2}$$

$$\hat{L}_j^i = \frac{1}{2\sin\theta}\left(\frac{D\hat{U}^i}{DS^j} - \frac{D\hat{U}^j}{DS^i}\right),$$

$$L_1^1 = L_2^2 = L_3^3 = 0$$

(15)

上式中

$$\frac{D\hat{U}^i}{DS^j} = \frac{D(\sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii}}U^i)}{\sqrt{g_{jj}}\,Dx^j} = \sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}_{ii}}{g_{jj}}}\;\frac{D\bar{U}^i}{Dx^j}$$

$$= \sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}_{ii}}{g_{jj}}}\;U^i\big|_j = \sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}_{ii}}{g_{jj}}}(u^i_{,j} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{je}U^e)$$

(15a)

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{je} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{g}{}^{im}(\overset{\circ}{g}_{mj,e} + \overset{\circ}{g}_{me,i} - \overset{\circ}{g}_{je,m}) \qquad (15b)$$

例如有一个转动球壳作径向膨胀，在球坐标系的变换函数：

$$\bar{r} = \alpha r,\ \bar{\phi} = \phi + \phi_0,\ \bar{\theta} = \theta$$

(r, ϕ, θ) 为拖带坐标，$(\bar{r}, \bar{\phi}, \bar{\theta})$ 变换后壳体一点相对于定系的坐标。

$$\vec{U} = U^i \overset{\circ}{g}_i$$

$$U^r = r\sin^2\theta(\alpha\cos\phi_0 - 1) + r(\alpha - 1)\cos^2\theta$$

$$U^\varphi = \alpha\sin\phi$$

$$U^{\theta}=\alpha(\cos\phi_0-1)\sin\theta\cos\theta$$

而

$$ds_0^2=\overset{\circ}{g}_{ij}dx^i dx^j=dr^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2+r^2 d\theta$$

$$d\bar{s}^2=g_{ij}dx^i dx^j=\alpha^2 dr^2+\alpha^2 r^2\sin^2\theta d\phi^2+\alpha^2 r^2 d\theta^2$$

应用 ϵ^i_j 与 θ 公式求出应变分量与平均整旋角

$$\|\epsilon^i_j\|=\begin{bmatrix}(\alpha-1)/\alpha & 0 & 0\\ 0 & (\alpha-1)/\alpha & 0\\ 0 & 0 & (\alpha-1)/\alpha\end{bmatrix}$$

$$\varphi=\pm\varphi_0$$

以上结果证明球壳作均匀膨胀，厚度有变化。平均整旋角为 φ_0，整个球壳处处一致，$\pm$号决定于转动正方向的选取。转轴方位

$\hat{L}_3^3=\cos\theta$，$\hat{L}_3^1=0$，

$\hat{L}_3^2=-\sin\theta$

表明壳体内每一点的局部转轴均平行于 z 轴。

不过要注意S－R分解定　　　　图　2

理确定的应变物理分量是以变形后的尺度为基准的，即应变定义为 $(l-l_0)/l$，l、l_0 分别为变形与未变形的线段长度。如采用 Green 应变张量，则 $\hat{\gamma}_{11}=\hat{\gamma}_{22}=\hat{\gamma}_{33}=$

$\frac{1}{2}(\alpha^2-1)$，当大变形时，和工程应变定义不合。事实上，度规张量是应变与转动的复合量，因

$$\gamma=\frac{1}{2}(F^TF-I)=\frac{1}{2}(S^TS+R^TS+S^TR) \qquad (26)$$

当转角 $\theta\to 0$，$R^T\sim R\approx I$，则 $\gamma=S+\frac{1}{2}S^TS$。计算指明用 S_{ij} 定义应变张量进行壳体变形二阶小量分析和用合理结果近似相同，这也说明为什么用 Green 应变分量和 S－R 应变分量二阶小量差别很小。

四. 位移协调条件

经典小变形的协调方程严格说来是不完备的。如果将刚性转动位移函数代入 Cauchy 应变分量公式，则将发现应变不全为零的矛盾结论。严格的变形协调方程应包括变形与局部转动的位移协调关系，故应称位移协调方程。

应用 Cesaro 方法可建立新关系。假设在位移场内处处连续。从任一点 Po (x^0) 到另一点 P' (x') 都可以用积分曲线单值连络，则有

$$\vec{u}(x')=\vec{u}(x^0)+\int_{P_0}^{P'}d\vec{u}=\vec{u}(x^0)+\int_{P_0}^{P'}u^i\big|_j\vec{g}_i\,dx^j$$

$$=\vec{u}(x^0)+\int_{P_0}^{P'}((R_j^i-\sigma_j^i)+S_j^i)\,g_i\,dx^k$$

可以证明如在位移场中处处位移连续，应有条件：

$$(R_j^i\Gamma_{ik}^l)_m-(R_j^i\Gamma_{ik}^m)_{,l}-S_{j,km}^l+S_{j,kl}^m=0 \qquad (27)$$

以上的基本方程仅有六个，称之为有限变形的协调方程。这这个问题目前尚须深入研究。特别是在近似计算法中，如假定的大应变场和局部转动不能协调，势必出现虚假应力。

五。考虑二阶变形量的一般壳体应变分量公式

在〔19〕中，详细说明了计算壳体有限变形与局部转动的准确方法。

如保持允许的精度，为简化计算，仍采用Kirchhoff-Love 的壳体变形假设，由S－R分解定理可以将Love、Новжилов、钱伟长〔21〕的薄壳小挠度变形公式推广到有限变形情况，考虑及二阶小量得到

$$\epsilon_1{}^1=\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial U^1}{\partial X^1}+\frac{U^2}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}\frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial x^2}$$

$$+U^1\overset{\circ}{K}_1+(\overset{*}{K}_1-\overset{\circ}{K}_1)t+\frac{1}{2}(\theta_2{}^2-\theta_3{}^2)$$

$$\epsilon_2{}^2=\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial U^2}{\partial x^2}+\frac{U^1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}\frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial x^1}$$

$$+U^3\overset{\bullet}{K}_2+(\overset{*}{K}_2-\overset{\circ}{K}_2)t+\frac{1}{2}(\theta_1{}^2+\theta_3{}^2)$$

$$\epsilon_2{}^1=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\frac{\partial}{\partial x^2}\Big(\frac{U^1}{\sqrt{a_{11}}}\Big)+\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\frac{\partial}{\partial x^1}$$

$$\Big(\frac{U^2}{\sqrt{a_{22}}}\Big)\Big)+\frac{1}{2}(\overset{*}{T}_2-\overset{*}{T}_1)t-\frac{1}{2}\theta_1\theta_2$$

$$\epsilon_3{}^3 = \epsilon_3{}^2 = \epsilon_1{}^3 = 0 \qquad (18)$$

上式中U^i表示中曲面位移的物理分量。其他符号意义见〔19〕。以上公式适用于任意形状壳体，平板大变形公式可作为特例导出。

六、结束语

采用钱伟长的板壳有限变形的拖带坐标描述法结合作者的几何场论，可以完整地建立板壳任意形式大变形与大转动的计算公式，并导出各家的经典合理结论。这在发展工程力学理论是有重要意义的。

参 考 文 献

〔1〕 Kirchhoff, G. R., Vorlesungen uber mathematische physik, Mechanik, leipzig, 1874。

〔2〕 Karman, Th V, Festigkeits Problem in Maschinenbau, Enzyklopadie der Mathematischen Wissenschaften, Bd IV, art 27, 1910。

〔3〕 Donnell, L. H., Trans Am Soc Mech Eng 56(1934), 795—806。

〔4〕 Karman T. V., Tsien, H. S.(钱学森), J. Aero Sci 8(1941), 303—312。

〔5〕 Tsien, H. S.(钱学森), J. Aero Sci 9(1942), 373—384。

〔6〕 Hughes, T. J. R., Liu, W. K., comput Meth, Appl Mech Eng 26(1981), 331—362

〔7〕 Truesdell, C., The Rational Mechanics of Materials—Past, Present, Future, Appl Mech Rev, VOl. 12, NO. 2(1959), 75—80。

〔8〕 Synge, J. L., Chien, W. Z.(钱伟长) Karman Anniv, VOl., 103—120 (1941)。

〔9〕 Chien, W. Z.,(钱伟长) Quart Appl Math 1, 297—327; 2, 43—59, 120—135 (1944)。

〔10〕 Zerna, W., Ing Arch 17(1949), 149—164

〔11〕 Green, A. E., Zerma, V., Theoretical Elasticity, 2nd Edition, oxford(1968) 10—16。

〔12〕 Новожи ов, В. В., Основы Не инейнои Теории Упругости, Огиз, остехиздат, (1948) (朱兆详译)

〔13〕 Ciarlet, P. G., Arch Rational Mec Analysis, 73(1980)

〔14〕 Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S., Tlleory of plates and Shells (2nd ed) Mc Ctraw-Hill, (1959)。

〔15〕 Truesdell, C., A First course in Rational Continuum Mechanics, Vol 1. A Academic Press, 1977。

〔16〕 Biot, M. A., Mechanics of Incremental Deformations, John Wiley, 1965。

〔17〕 Stokes, J., Cambriage Phil. Soc. Trans. Vol 8(1845)。

〔18〕 陈至达，有理力学，中国矿院北京研究生部1980。

〔19〕 陈至达，杆、板壳大变形理论<应用数学与力学讲座> 1982。

〔20〕 Flügge, W., Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-verlcg, 1972。

〔21〕 钱伟长，<应用数学与力学论文集>，江苏科技，1980，1—11。

〔22〕 Новожи ов, В. В., 薄壳理论(白鹅飞等译)，科学，1963。

柔韧板和柔韧壳在中国的进展

叶开源

（兰州大学）

I. 引言

薄板大挠度方程是由 Von K'arm'an 首先提出来的〔1〕。1939 年 Von K'arm'an 和钱学森〔2〕又首先对薄壳屈曲问题提出一个重要结论，便是薄壳的屈曲现象是一个非线性现象。由于近代工业的要求，如航空、航天、仪表元件等，使得这类问题引起人们的极大注意。板与壳的大挠度问题的基本方程是非线性方程，在数学上存在的困难很大，如何求解这些方程便成为这类问题的关键。好多年来，人们企图从各种直接近似解或将方程简化为线性方程组的方法着手，但这些方程的解答的精确度均不够理想。看来求出这些非线性方程的精确解的工作是不可避免的。早期的求解工作，除了应用各种变分原理近似解外，求精确解的有：Way, S.〔3〕首先提出幂级数法和 Levy, S.〔4〕在研究简支矩形板大挠度问题时，将挠度表示成三角级数的分段形式，应力函数 φ 藉一般的方法从应变协调方程求得，其次把横向载荷展成博里叶级数，将 w，φ 和 q 代入平衡微分方程，比较含有同样指数 r 和 j 的项，便可求