《反杜林论》中的自然科学问题参考材料

北京师大政教系资料室编

一九七六年十二月

目　录

2G/2/1/6

数　和　形

数学是一门高度抽象的科学。由于数和形是数学中最基本的概念，是数学的出发点，所以唯心主义往往利用数学为其存在作掩护。杜林认为，数和形的概念是“数学本身创造的对象。”和杜林同时代的一位德国数学家克隆尼克(1823—1891)更清楚地说：“上帝改造了自然数，数学家造创了数学”。当时德国还有一个著名的数学家康托儿（1846—1918）也说：然“自数的概念是天赋的概念”。那末数和形的概念到底是人们头脑中先天就固有的呢？还是从后天的实践中得来的？这是一个原则问题。

自然数、即1，2，3，……对于我们今天的人来说已是非常熟悉的事，但是它们的形成过程却经历了很长时期。最初，人们只能用自己身体某些部分的名称作为某些数量的同义语。如用“眼睛”表示2，用一只“手”表示5，用“双手”与“整个人”分别表示10与20等。有了这些同义语以后，人们就可用来表示物的数目，并进行简单的运算。比如不管是5只山羊、5件工具，还是5个什么东西，都可以与自己的手指头一个一个的对应起来，即同手指头一样多。数就是这样在生活实践中形成起来的。

象这样经过相当长的时期以后，人们就不必真正地把手伸出来，与所指的物件数目进行对比，仅用表示手的语言就行了。经过长期的与眼睛、与一只手的指头，与双手的指头以及四肢的指头比较的结果，就出现了2、5、10、20这些数字。再经过漫长的岁月，人们世世代代在不同数目的集合之间进行

对比，于是和2、5、10、20一样，产生了其他简单的自然数3、4、6、等。当然，这并不是说，人类对所有自然数的认识都是经过同样的过程。当人们认识到一定数目的自然数以后，发现任何一个自然数加1就是下个自然数，以次类推下去，知道的自然数就很多了。

2、5、10、20等这些数字概念，相对地说产生得要早些，它们在其他自然数的形成中还起着特殊的作用，所以人们称它们为"枢纽数"。其他自然数往往通过"枢纽数"来表示，如罗马数字的2是Ⅱ，4则是Ⅳ，6是Ⅵ，7是Ⅶ，9是Ⅸ；我们通常讲二十、三十，就是两个十，三个十；在法语中80、90和120分别为4个20、4个20再加10和100加20。这都可以看到枢纽数的特别作用。

生产的发展，较大的部落和国家的出现以及商业的发展等，对数字概念的发展和计算方法的改进起了巨大的推动作用，于是就有了表达数字符号的要求。

世界上的各民族，由于计算的需要，都创造了自己的计数符号，起初差不多都是象形文字，经过不断的改进、这才有后来较简明的形式，如阿拉伯数码，即我们也采用的1、2、3、……就是大约经过一千年时间，经过好几次的演化，直到16世纪才成为现在的形式。用这种数码记数，字形整齐，笔划简单，它是用位置制，同一个数码，由于它所处的位置不同，便可以表示不同的数，比如333这个数，其中三个3由于位置不同而分别表示300、30、与3。这样一来，只要用9个数码与一个0，就可以表示任何一个数，特别是用它表示分数和小数就更显得方便。数学上把阿拉伯数码的运用称为计算上的一次革命。

由于生活实践不断发展的需要，数的概念也在不断的发

展，数字符号的出现，标志着人们对数的认识又进了一步。有了数字符号，人们只要写出一个数字，就可以离开了这个数字代表的具体事物来进行运算，或加减，或乘除，从而得到符合这些具体事物的结果。

数学进一步的发展，人们又用文字来表示问题中的未知量和已知量，因为使用了文字，数学又摆脱了使用具体数字研究问题的局限性，可以更普遍地揭示数量关系的一般规律，用文字表示数字、并对其进行运算，被认为是十六世纪数学的重要成就之一。笛卡儿把变数引入数学，紧接着牛顿和莱布尼兹又把变数推广到无限小和无限大，建立起变数数学，这是数学史上的一次重要的革命。变数是客观物体运动和变化在数量上的反映，无限小、无限大以及高阶无限小等数学概念，也是现实世界和工程上数量级概念的数学抽象。它们都是有牢固的现实基础的，恩格斯说：**"自然界对这一切想像的数量都提供了原型"**（《自然辩证法》第225页）不是数学家的"自由创造物和想象物"，也不是甚么"神秘的量"。

和数的产生一样，几何学中形的概念也是从实际中产生的。

早在人类还没有出现以前，地面上的山川，天空中的星座，日月的形状已经存在了。人类出现以后，人们最早遇到的就是周围环境中一切事物的外形，并且根据事物的外形鉴别各种事物。人类早期对圆形的认识是同认识这些具体的事物相联系的。

在以后的长期生活过程中，人们慢慢地形成了"直线"、"园"的概念。和直线、园的概念形成一样，通过大量相同形状物体的比较和运用，其他几何图形概念也相继产生了。恩格斯说：**"线、面、角、多角形、立方体、球体等等观念都是从**

现实中得来的。”（《反杜林论》第37页）

关于几何量，即长度，面积和体积等概念，也是从实际中产生的。随着这些概念的产生，一些简单的几何规律也逐渐被发现和运用。这些几何概念、计算公式，离开了现实世界和人们的生活实际是不可能得到的，它们决不是“先验”的，不是在人们的头脑中由纯粹的思维产生出来的。恩格斯在《反杜林论》第35页上说：**“数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实中得来的”**。

虚　　数

在数学上，若干较小的自然数以及简单的分数，无疑是来自人们的实践活动，如数数、测量等，但是，对于较大的自然数，如几万、几亿，一般地说，只有通过加法、乘法等的运算才能得到。人们只有运用了除法运算，对于分数的多样性与复杂性才获得了有系统的认识。所以，在数学上，运算对于数的概念的扩张是很重要的，在人类实践活动的基础上，随着数学运算中许多矛盾的解决，数的概念便逐步在扩大。

在自然数的范围内，任意两个自然数相加或相乘，其结果是另一个自然数，这不产生新的数。但是两个自然数相减或相除，就不再是自然数了，为了解决这个矛盾，人们便把数的概念由正整数扩大到负数、零和分数，并把正负整数、正负分数和零总称为“有理数”。对有理数进行加、减、乘、除这“四则”运算，其结果仍为有理数。这是数的概念的第一次扩张。

在实际运算中，除了“四则”运算以外，还有乘方与开方两种运算。对有理数进行开方运算，得到的并不完全是有理

数。为了解决这个矛盾，人们又把数的概念从有理数扩大到了“无理数”。有理数和无理数总称为“实数”。从有理数扩大到无理数，这是数的概念的第二次扩张。

实数虽就是扩大了数的概念，但是只有实数，运算上的矛盾并没有完全解决，因为负数开偶次方，在实数范围里得不到结果，这样人们又把数的概念由实数扩大到“虚数”，这是数的概念的第三次扩张。

所谓“虚数”，就是对负数开方的结果。

恩格斯说：“**—1的平方根不仅是矛盾。而且甚至是荒谬的矛盾，是真正的背理。**”（《反杜林论》第119页）所以说$\sqrt{-1}$是矛盾，是因为在实数范围里找不到这样的数，但它又是对实数进行正确运算的结果。这个矛盾的解决，就使数的概念由实数扩大到虚数。

数学中由于研究变数而进入辩证法领域的高等数学，如微分和积分，直线和曲线，有限和无限，常数和变数，相交和平行等，其基础是矛盾，就是初等数学，也充满着矛盾，如加和减，乘和除，根和幂，有理数和无理数，已知数和未知数，三角函数和反三角函数等就是矛盾。没有矛盾就没有数学。这对于那些愚蠢的形而上学者如杜林、法·比安（此人就是恩格斯在《反杜林论》第9页上所说的那个“尚未被人承认的伟大数学家”，德国社会民主党人）这些人说来，是无法理解的。

虚数的产生是对负数实行开方运算的结果，虽然称它为“虚数”，它却是有坚定的现实基础的。虚数只能看作是“**正确的数学运算的必然结果**”（《反杜林论》第119页）决不能像杜林那样，把虚数认为是“先验的”，是“悟性的自由创造物和想像物”。恩格斯说：“**只是在最后才得到悟性的自由创造物和想像物**”。（《反杜林论》第35页）这是借用杜林的话

而不是恩格斯在里承认虚数真正是杜林说的什么“悟性的自由创造物和想像物”。

虚数早在十六世纪中就已萌芽，在以后的大约200多年中，人们一直认为“负数开平方是不可思议的”，是“虚假的”，于是人们就给它以“虚数”这个称名，并将它看成是没有实际意义的，毫无用处的东西加以抵制。随着科学的发展，十八世纪中期，法国数学家欧拉（1707—1783）发现了反映实数与虚数联系的著名公式，即欧拉公式，自此以后，逐渐发现虚数在现实中有着广泛的应用价值。比如在力学、物理学以及现实世界中相当广泛的一类量，即向量，都可以用复数来表示。向量之间的六种运算，可以通过表示它们的复数之间的运算来完成。因此，研究复数，发展复数理论，就不是什么无聊的数学游戏，而是具有实际意义的了。正因为复数在实际中得到了应用，所以关于复数的理论，以及在复数理论基础建立起来的，“复变函数论”才得到迅速的发展。现在复变函数论已经是一个庞大的数学分支了。复数不仅用于数学的其他各个领域，除了在微分方程论、代数、几何学以及数论等学科得到广泛的应用外，而且还应用到自然科学和技术科学之中，如力学、物理学、电学以及流体力学等，都离不开复变函数。所以，“虚数”并不是“虚假的”，“不可思议的”东西。“虚数”这个名称，和数学上的“无理数”等这样一些名称一样，它映了人们对数学认识发展的一个历史阶段，不能再按照它字面的意义来了解它了。

数学中的公理

数学上的公理是经过人类长期的实践活动对客观事物的某些空间形式和数量关系分析和综合后、加以概括和整理出来的一些基本概念和这些概念之间的关系的一种思想规定。立方体如“点”、“线”、“面”、“角”、“立方体”、“球体”、和“整体大于部分”、“A＝B，B＝C，则A＝C”等等。这些基本概念或公理，数学上用它们去定义别的概念或证明别的命题，并以逻辑推理的方法，推导出某个方面的数学知识。这就使得数学的理论体系，初看起来，都是建立在一些无须加以证明的基本概念和公理基础之上。这些基本概念和公理，在数学理论体系中就显得没有来源也无须加以证明。但是，它们都是早在数学之外从现实中抽象出来的，并且为人们的实践活动千万次证明过了的。

唯心主义把这个现象片面的加以夸大，得出了数学可以脱离开现实而凭空创造的极其荒谬的结论。杜林就是这样，他以为“**他可以不加入任何经验的成分，从那些‘按照纯粹逻辑的观点既不可能也不需要论证’的数学公理导出全部纯数学，然后再把它应用于世界，同样，他以为，他可以先从头脑中制造出存在的基本形式，一切知识的简单成分，哲学的公理，或从它们导出全部哲学或世界模式论，然后以至尊无上的姿态把自己的这一宪法赐给自然界和人类世界。**”（《反杜林论》第30页）。这就是杜林哲学的唯心主义实质。

微分和积分

“微积分”又叫变数数学、高等数学、高等分析、无穷小分析等。它包括微分学与积分学两个既有区别、又有密切联系的部分。

在历史上对于速度问题的研究，是产生微分学的主要原因之一。

如果物体作匀速运动，要求得它在某一时间内的路程，只要用简单的除法就可以了。但对非匀速运动的物体，由于它的速度时时在变化，我们就不能一般地说它的速度是多少，只能说它在某一时刻的速度如何，这就不能用简单的除法算出。这就要用超出了初等数学常用方法的微分法来解决。

如果已知物体的运动速度，要计算物体经过的路程。在此物体处于匀速运动的情况下，只要用乘法就可以计算出来。但是，由于物体是作变速运动，速度不是一个常数，而是时间的函数，在这样的条件下要计算出此物体在某一段时间内所行的路程，就必须用积分的方法才能解决。

微分和积分是一组矛盾。在概念上：微分是部分量的近似数值，积分则是微分的积累。微分表示部分，积分表示整体，前者是“化整为零”，是对整体的否定，后者则是“积零为整”，是对部分的否定，二者恰好相反，它们的关系是辩证统一的。微分与积分是高等数学中的基本概念与基本运算，所以经典作家们称其为高等数学中的一组基本矛盾，这一组矛盾运动，就构成了高等数学的内容。微积分的发明和在数学上的应用，使数学走上了辩证发展的道路，获得了最大的成就。恩格

斯说：**"由此解决了普通的几何和代数也许碰得头破血流也无法解决的问题"**。（《反杜林论》第135页）

多 维 空 间

为了确定直线上点的位置，数学中常常采用下列作法：

先在直线上固定一个点O，一个方向OX，以及取定一个长度单位。对于直线上任何一个点；我们先看它是在O点的右边还是左边，右边为正，左边为负，再看看它到O点是多远。例如，它是在O点的右边两个单位长度的地方，我们就用（2）来表示。如果它是在O点左边3.5个长度单位的地方，我们则用（—3.5）来表示，采用这种作法，直线上的每一个点和一个实数x对应起来，点的位置也就可以用（x）来表示了。

对于平面上点的位置，我们也可以采用类似的方法：先在平面上固定两条垂直的直线，它们的交点是O，固定两个方向OX和OY，再取定一个长度单位，与直线OX上的点对应的数为x，与直线OY上的点对应的数为y。再规定X在O点的右边为正，左边为负；y在O点的上边为正，下边为负。这样，平面上任何一点的位置就可以用（x、y）来表示了。因为只须从这点向直线OX和OY引垂线，就可以确定与之相应的x和y。所以平面上任例一点的位置便可以用两个数（x，y）表示出来。

空间中点的位置也是用类似的方法来确定，先在空间中取三个相互垂直的平面，这三个平面相交出三条相互垂直的直线，，对这三条直线定好方向OX，OY，和OZ。取定长度单位。直线OX上的点对应的数为X，直线OY上的点对应的

数为y，直线OZ上的点对应的数为z。再规定X在O点的前面为正，后面为负；Y在O点的右面为正，左面为负；Z在O点的上面为正，下面为负。这样，空间中任何一个点的位置就可以用（x，y，z）表示出来。

直线上的点的位置是由一个数（x）确定，平面上点的位置是由两个数（x，y）确定，空间中点的位置是由三个数（x，y，z）确定。为了统一说法，我们就称直线、平面和空间分别为“一度空间”、“二度空间”和“三度空间”。我们生活的现实空间是三度的，杜林所说的六度空间，是他不承认矛盾的结果，也是他形而上学思维方法的错误所在。

但是，我们批判杜林的六度空间，并不是否认有三度以上的多度空间，当我们用数学方法去研究某些具体问题时，我们须要考虑的，很可能不仅是两个或三个数，而是更多的数。例如，我们要说明一个人造卫星或飞机的位置时，我们就说：“在什么时间，卫星经过空间某个地方”。时间须要再用一个数t来表示，空间的位置，就须要用四个数，即t、x、y、z来表示。我们说这是一个“四度空间”的问题。假若还要精确些，我们不仅要确定位置，还要确定它的运动状态，那就不仅要考虑时间和空间位置，而且还要考虑它的运动速度和加速度。速度和加速度又须要用三个别的数来表示。这里一共出现的是十个数，这就成了一个所谓“十度空”的问题。又例如在鋁合金的冶炼中，有些品种要求考虑鋁、鎂、硅、铜等四种成分的比例，有的品种则要求考虑鋁、铜、鎂、铁、鎳五种成分的比例。这在一定意义上讲，我们可以把前者看作一个四度空间的问题，而后者则可以看成一个五度空间的问题。

研究三个变数以上的问题时，只要有三个变数不是相互依赖的，我们都可以看成是多度空间的问题。在这里的空间这个

词，就一般讲已经是一个借用语了。所以数学中所讨论的多度空间，虽是从现实中抽象出来的，但这不是说我们生活在其中的这个现实空间就是多度空间。处处以“唯物主义者”自居的杜林，竟把德国著名数学家高斯（1777—1855）关于多度空间几何学的理论（这是一种数学理论，十九世纪以来的科学表明，这种理论是有用处的）诬蔑为数学神秘主义，并“表示难以言喻的愤慨”，这充分，暴露了杜林对数学的可笑和无知。

牛顿和莱布尼兹的微积分

对于微积分中所使用的方法，恩格斯说，“**高等数学中几乎所有的证明，从微积分学的最初的一些证明起，从初等数学的观点看来严格地说都是错误的。**”（《反杜林论》第 932—133页）

为了正确地理解这段话的含义，必须了解微积分产生初期，即牛顿和莱布尼兹微积分的基本情况。

微积分是17世纪后半期，主要由牛顿和莱布尼兹二人通过不同的道路各自独立地完成的。牛顿由于力学方面的需要（主要是计算速度）而获得微积分的基本理论，这种理论被他详细地叙述在《流数术》一书中，该书1670—1671年写成，1735年出版。莱布尼兹则是过通几何学的研究（主要是计算曲线的切线）于1673—1676年获得微积分的基本理论，并于1684年写成论文发表。

微积分告诉我们，计算“导数”是微分学中最基本的运算，牛顿和莱布尼兹尽管是独立地工作，但是他们计算导数的思想是相同的。

牛顿和莱布尼兹获得微积分的道路虽然不同，他们的工作也是各自独立的，但是他们二人关于微积分中最重要、最基本的概念也就是“无穷小量”的观念本质上是相同的。简单说来，他们把无穷小量理解为仅仅是大于零而又小于任何正数的“常数”，是正数的“最后”数值，是“最小”的正数值，因而他们的“无穷小量”也是“不可分量”。这种量实际上是不存在的，也是根本找不到的，所以人们曾把它叫做“不可思议的量”，或称为一种“神秘的量”，并进而把他们的微积分也称为“神秘的微积分”。

牛顿和莱布尼兹的微积分对当时的震动是很大的。由于他们所使用的方法不符合传统的初等数学方法，所以一些数学家（马克思称他们为“**旧式正统派数学家**”）也就不管它的结果是否有实用价值而一概加以否认，认为这是“胡说八道”，是“错误的”。甚至社会上一些不懂数学的人也跟着起来反对。英国的大主教、唯心主义者贝克莱，竟利用微积分的不够完备为神学辩护。据记载，贝克莱的一个朋友，因看到神学的荒诞，不像科学那样有说服力，所以当这个人患病将死时，拒绝牧师为他祈祷，贝克莱奋然而然说，“科学的女王——数学，不是也同样建立在不安定的基础之上吗？但是尽管这样，它并没有失掉实际意义和传统的正确呀？！”贝克莱为了挽救基督教的“威信”，专门“研究”了牛顿的《流数术》，于1734年炮制了《分析学者》一文，并拟了一个“与一个不信神的数学家的对话”的副标题发表。文中嘲弄牛顿有时是零有时不是零的“无穷小量”是“失去量的鬼魂”，攻击牛顿的推导是“分明的诡辩”。贝克莱还挑衅性地问道：“一个人，认定说神秘的东西（按：指宗教）不能作为信仰的对象，而同时他自己却承认如此含糊的神秘的东西（按：指微积分）是科学的对象，那

他表现出什么样的理性呢”？马克思说，人们“**越加重视这个发现，越加引起一群旧式正统派数学家的恼怒，并激起了敌对的叫喊，这种叫喊甚至发自对数学并不通晓的人们，这对于为新事物开拓道路是必不可少的。**”（《数学手稿》）恩格斯说，“**由于变数的应用以及它的变化被推广于无限小和无限大，以前曾经是如此严格地合乎道德的数学也犯了原罪；它吃了智慧果，这为它开辟了获得最大成就但也造成谬误的道路**”。（《反杜林论》第85页）意思是说，数学中引入了变数，以及把变数推广到无限小和无限大以后，取得了初等数学所不能取得的巨大成就，犹如《旧约》中的亚当与夏娃吃了智慧果以后，变得眼睛明亮、增加了智慧一样；但是另一方面也造成了旧式正统派数学家、形而上学者和杜林之流所谓的谬误。

当时也有人认为，牛顿和莱布尼兹的微积分其所以能得到正确的结果，是因为在最后舍弃的各项中有正有负，是正负相消的原故。显然，这是形而上学的解释，是企图把变数数学得出全新的结果建立在初等数学的基础上，恩格斯说，这“**是最滑稽可笑不过的了。**”（《自然辩证法》第167页。）

以上情况，一方面说明了形而上学思想对人们的严重束缚与唯心主义对科学的仇视；另一方面也说明了牛顿和莱布尼兹的微积分毕竟才产生，它由不完备到完备还得有一个过程，总的说来，整个18世纪的数学家在对待微积分的态度上基本有两种，一种认为，这是“胡说八道”，不值得研究；另一种则认为，这个方法毕竟能得出正确的结果，能解决实际问题，因而有强大的生命力，所以姑且用之。后一种认为，问题将来总会解决，用当时达·兰贝尔的话来说就是“向前看，你就会产生信念”。所以在18世纪，人们解释微积分能得出正确的结果而设

想了种种方案，出现了达·兰贝尔和欧拉的“合的微分学”，以及拉格朗日“纯粹代数的微分学”等。这些解释虽然也不完备，但为19世纪圆满地解决这个问题创造了条件。

革命导师马克思在《数学手稿》中，才以辩证法观念，用否定之否定这一辩证过程给了计算导数以正确的解释。

微和积分中所表现的这些辩证性质，对于受形而上学思想严重束缚的数学家来说是根本无法理解的，从而也是不可能接受的。这就是我们开始所引的恩格斯那段话的含义。经典作家不仅以辩证法观念给了牛顿和莱布尼兹的微积分以正确的解释，而且也用数学中的新成就丰富了辩证法。恩格斯说，“**数学：辩证的辅助工具和表现形式**”。（《自然辩证法》第1页）恩格斯还更高的评价了微积分，他说：“**在一切理论成就中，未必再有什么像十八世纪末期微积分的发明那样被人看作人类精神最高的胜利了**”。（《自然辩证法》第224—225页）

直线和曲线

在初等数学中，直线和曲线是根本不同的，直线不是曲线，曲线也不是直线。就初等数学的范围来讲，这种理论当然是正确的。那末，是不是在任何情况下这种理论都正确、直线和曲线就是绝对对立的呢？不是。事实上直线和曲线是矛盾的两个方面，它们不仅是对立的，而且在一定条件下相互转化。这也就是说，在一定条件下，直线可以看作曲线，曲线也可以看作直线，直线和曲线应当是一回事。恩格斯指出，正是曲线和直线这种矛盾双方在一定条件下相互转化的观点，是“**高等数学的主要基础之一**”。（《反杜林论》第118页）