第5卷 第2期
1984年6月

航 空 学 报
ACTA AERONAUTICA ET
ASTRONAUTICA SINICA

Vol. 5 No. 2
June 1984

关于起落架收放中转轴及转动的确定

北京航空学院 张启先

摘 要

本文对用解析法确定起落架收放中转轴及转动的问题，进行一些探讨，除提出如何利用刚体绕斜轴的转动矩阵进行求解外，还对转轴和转角的某些求法进行补充。文中附有一飞机起落架收放算例。本文内容也可用于航空、航天器中一些天线、传感器等的收放设计。

一、前 言

在航空、航天飞行器设计中，对起落架、天线及传感器等的收放，经常需要涉及转轴及转动的确定，例如需求转轴的方位、转动的角度及支柱转动中某点的位置等。这些问题用一般解析几何或向量运算的方法[1~8]，可得到基本解决。本文为了便于运用电子计算机，提出如何利用刚体绕斜轴的转动矩阵进行求解，并对通过转轴上两点（满足结构要求或便于计算）来确定转轴和通过公垂线方向余弦来计算转角，提出一些补充。本文内容与文献[8]的方法也有所不同。

二、刚体的有限转动

1. 刚体上一直线的转动前后关系

在图1中，设一直线 AB 随所固结刚体绕某空间斜轴 PP 转动一个角度 ϕ 而由位置

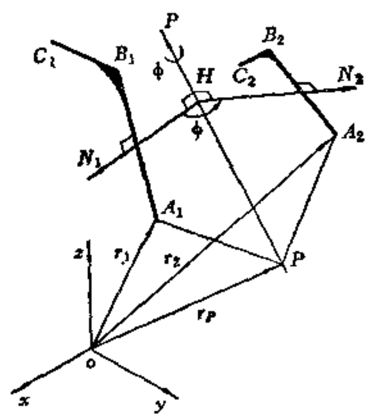

图1 刚体 ABC 绕斜轴 PP 作有限转动

Fig.1 A finite rotation of rigid body ABC about skew axis PP

1983年6月收到。

A_1B_1 转至 A_2B_2。显然，$PA_1=PA_2$，$PB_1=PB_2$，$A_1B_1=A_2B_2$。如以有关点的坐标表示，则可写出下列关系

$$(x_{A_2}-x_{A_1})x_P+(y_{A_2}-y_{A_1})y_P+(z_{A_2}-z_{A_1})z_P$$
$$=0.5[(x_{A_2}^2+y_{A_2}^2+z_{A_2}^2)-(x_{A_1}^2+y_{A_1}^2+z_{A_1}^2)] \tag{1}$$

$$(x_{B_2}-x_{B_1})x_P+(y_{B_2}-y_{B_1})y_P+(z_{B_2}-z_{B_1})z_P$$
$$=0.5[(x_{B_2}^2+y_{B_2}^2+z_{B_2}^2)-(x_{B_1}^2+y_{B_1}^2+z_{B_1}^2)] \tag{2}$$

$$(x_{A_2}x_{B_2}+y_{A_2}y_{B_2}+z_{A_2}z_{B_2})-(x_{A_1}x_{B_1}+y_{A_1}y_{B_1}+z_{A_1}z_{B_1})$$
$$=0.5[(x_{A_2}^2+y_{A_2}^2+z_{A_2}^2)+(x_{B_2}^2+y_{B_2}^2+z_{B_2}^2)$$
$$-(x_{A_1}^2+y_{A_1}^2+z_{A_1}^2)-(x_{B_1}^2+y_{B_1}^2+z_{B_1}^2)] \tag{3}$$

2．刚体绕斜轴的转动矩阵

为了便于利用矩阵运算，按刚体运动学[4]写出刚体绕斜轴的转动矩阵$[A]$如下

$$[A]=\begin{bmatrix} u_x^2V\phi+C\phi & u_xu_yV\phi-u_zS\phi & u_xu_zV\phi+u_yS\phi \\ u_xu_yV\phi+u_zS\phi & u_y^2V\phi+C\phi & u_yu_zV\phi-u_xS\phi \\ u_xu_zV\phi-u_yS\phi & u_yu_zV\phi+u_xS\phi & u_z^2V\phi+C\phi \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中，u_x、u_y、u_z 为斜轴的方向余弦，ϕ 为刚体绕斜轴的转角，$V\phi=1-\cos\phi$，$C\phi=\cos\phi$，$S\phi=\sin\phi$。

在实际应用中，转动矩阵$[A]$有时宜取下列形式

$$[A]=\begin{bmatrix} u_x^2 & u_xu_y & u_xu_z \\ u_xu_y & u_y^2 & u_yu_z \\ u_xu_z & u_yu_z & u_z^2 \end{bmatrix}+C\phi\begin{bmatrix} 1-u_x^2 & -u_xu_y & -u_xu_z \\ -u_xu_y & 1-u_y^2 & -u_yu_z \\ -u_xu_z & -u_yu_z & 1-u_z^2 \end{bmatrix}$$
$$+S\phi\begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中前两项为对称矩阵，第三项为反对称矩阵。

利用转动矩阵$[A]$可确定转动后刚体上任意点的位置。设 $\vec{r}_P$ 为转轴上某点的坐标向量，$\vec{r}_1$ 及 $\vec{r}_2$ 分别为刚体上同一点转动前和转动后的坐标向量，则有下列关系

$$[\vec{r}_2]=[\vec{r}_P]+[A][\vec{r}_1-\vec{r}_P] \tag{6}$$

如已知刚体的转动矩阵$[A]$，则在一般转角不过小的情况下，可由矩阵元素 a_{ij} 直接算出转过的角度及转轴的方向余弦，即

$$\left.\begin{aligned} &\phi=\cos^{-1}[(a_{11}+a_{22}+a_{33}-1)/2] \\ &u_x=\frac{a_{32}-a_{23}}{2S\phi},\quad u_y=\frac{a_{13}-a_{31}}{2S\phi},\quad u_z=\frac{a_{21}-a_{12}}{2S\phi} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

3．转动矩阵$[A]$的确定

设给出刚体转轴上某点P，则在已知刚体上A、B、C三点于转动前及转动后的坐标时，可由式（6）得出计算$[A]$的矩阵运算为

$$[A]=\begin{bmatrix} x_{A_2}-x_P & x_{B_2}-x_P & x_{C_2}-x_P \\ y_{A_2}-y_P & y_{B_2}-y_P & y_{C_2}-y_P \\ z_{A_2}-z_P & z_{B_2}-z_P & z_{C_2}-z_P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{A_1}-x_P & x_{B_1}-x_P & x_{C_1}-x_P \\ y_{A_1}-y_P & y_{B_1}-y_P & y_{C_1}-y_P \\ z_{A_1}-z_P & z_{B_1}-z_P & z_{C_1}-z_P \end{bmatrix}^{-1} \tag{8}$$

实际上，如给出刚体转轴上某点P，则只需给出刚体上A、B两点于转动前后的坐标，

即已足够。这时应首先设法求出刚体上另一点C的转动前后坐标。至于按A、B两点确定C点的方法，在文献〔4〕中已有所介绍，现提出一种更简便的求法。如图2所示，过P点作与PA及PB两线所成平面相垂直的法线$\overrightarrow{PN}$，在该法线上任取一合适长度l（如

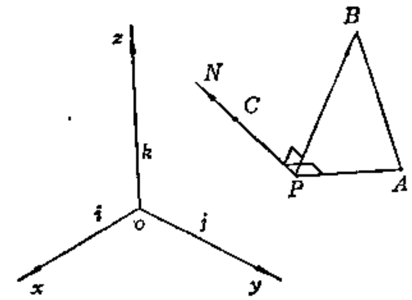

图 2　由点P、A、B确定点C

Fig.2　Determination of point C from points P, A & B

为1或10等）即得所求的C点。法线$\overrightarrow{PN}$的方向数N_x、N_y、N_z可由下一行列式得出

$$\overrightarrow{PN}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_A-x_P & y_A-y_P & z_A-z_P \\ x_B-x_P & y_B-y_P & z_B-z_P \end{vmatrix}=N_xi+N_yj+N_zk \tag{9}$$

法线$\overrightarrow{PN}$的方向余弦相应为

$$(n_x,\ n_y,\ n_z)=(N_x,\ N_y,\ N_z)/\sqrt{(N_x^2+N_y^2+N_z^2)} \tag{10}$$

于是C点的坐标可如下算出

$$x_c=x_p+ln_x,\quad y_c=y_p+ln_y,\quad z_c=z_p+ln_z \tag{11}$$

三、起落架收放中转轴及转动的确定

1. 预定P点的设计

将前述刚体转动应用于起落架收放设计时，直线AB即相当于机轮中心线。所谓预定P点是指给出转轴与大梁、腹板、加强筋或框平面的交点。由式（1）～（3）知，在A_1、A_2、B_1、B_2四个点的12个坐标中，设计者可自由给出的坐标或有关要求，可多达9个，其给出方式如下：

（1）给出A_1、A_2两点的5个坐标和B_1、B_2两点的4个坐标（或相反）；

（2）给出A_1、A_2两点的5个坐标和B_1点的1个坐标，另外给出AB的长度、A_1B_1在某坐标面的投影及A_2B_2在又一坐标面的投影；

（3）给出A_1、B_1点所有6个坐标，而对A_2、B_2点则仅给出2个坐标及A_2B_2在某一坐标面的投影；

（4）给出A_1点的3个坐标和A_2、B_2点中的2个坐标，另外给出AB的长度、A_1B_1的方向余弦及A_2B_2在某坐标面的投影。

设计时，首先利用式（1）～(3)将A_1、A_2、B_1、B_2四点的坐标全部确定，接着

按式（9）~(11) 求出 C_1、C_2 点，然后由式（8）算出转动矩阵$[A]$，最后利用式（7）求出转轴及转角。

2. P点待定的设计

由于可利用（1）、（2）两式，所以P点待定时，仍可任意给P点的一个坐标。至于A_1、A_2、B_1、B_2四点，由于应满足式（3），故既可给出其中11个坐标，也可给出A_1、A_2两点的6个坐标和AB的长度（任取）及A_1B_1、A_2B_2的方向余弦，或其他等。

设计时，如已定转轴所通过的平面，则可令P点的一个坐标为特定值而求其余两个坐标。如无特殊要求，在按P_1、P_2两点确定转轴时，可分别令$x_{P_1}=0$及$y_{P_2}=0$，使计算得到简化。由P_1、P_2两点可得转轴的方向数为：$x_{P_2}-x_{P_1}$，$y_{P_2}-y_{P_1}$，$z_{P_2}-z_{P_1}$。由此可进一步确定转轴的方向余弦以及转轴在各坐标面中的投影与各坐标轴的夹角，例如转轴在xz平面中的投影与x轴的夹角$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{z_{P_2}-z_{P_1}}{x_{P_2}-x_{P_1}}$。

为了确定转角ϕ，建议如图1所示，利用转轴PP与直线AB的最短距离线（公垂线）HN，由此得计算公式

$$\phi=\cos^{-1}(n_{x_1}n_{x_2}+n_{y_1}n_{y_2}+n_{z_1}n_{z_2}) \tag{12}$$

式中下标1、2分别表示与$\overrightarrow{HN}_1$及$\overrightarrow{HN}_2$有关的方向余弦。至于$\overrightarrow{HN}$的方向数，可仿式(9)进行计算，例如可用下标P_2、P_1替代第二行的下标A、P而用下标B、A替代第三行中的下标B、P。

如需确定起落架支柱上其它点（如作动筒支点、上位锁挂钩点或支柱重心）的收放位置，可先算出转动矩阵$[A]$而利用式（6）进行。

四、算　例

为了便于比较，取文献[3]中所举起落架收放作为算例。如图3所示，已知机轮放下时，轮心A_1点的坐标为$[66\ \ 0\ \ 0]^T$，机轮中心线$\overrightarrow{A_1B_1}$的方向余弦为$[-1\ \ 0\ \ 0]^T$；机轮收起时，轮心A_2点的坐标为$[0\ \ 42\ \ 52]^T$，机轮中心线$\overrightarrow{A_2B_2}$的方向余弦为$[-\sin12^\circ\ \ 0\ \ \cos12^\circ]^T$。又已知机轮放下时支柱上$Q_1$点的坐标为$[60\ \ 0\ \ 50]^T$。要求确定转轴$P_1P_2$，转角$\phi$及机轮收起时支柱上$Q_2$点的坐标。

任取AB的长度为10，可得B_1、B_2两点的坐标分别为$[56\ 0\ 0]^T$及$[-2.07912\ \ 42\ \ 61.78148]^T$。利用式（1）及式（2）得

$$-66x_P+42y_P+52z_P=56$$
$$-58.07912x_P+42y_P+61.78148z_P=1224.6370$$

为了便于在图纸上示出转轴P_1P_2，任取$x_{P_1}=60$及$x_{P_2}=70$，于是求得$y_{P_1}=7.85363$，$z_{P_1}=70.88745$，$y_{P_2}=33.59381$，$z_{P_2}=62.78962$。由此可得转轴P_1P_2的方向余弦为$u_x=0.34750$，$u_y=0.89446$，$u_z=-0.28140$。

为了按式（12）求转角ϕ，先求出$\overrightarrow{HN}_1$及$\overrightarrow{HN}_2$的方向数为$0:8.09783:25.74018$及$25.17769:-8.09784:5.35168$。于是$\phi=\cos^{-1}0.09913=84.31104^\circ$。

求机轮收起时支柱上Q_2点的坐标时，先按式（4）算出转动矩阵$[A]$为

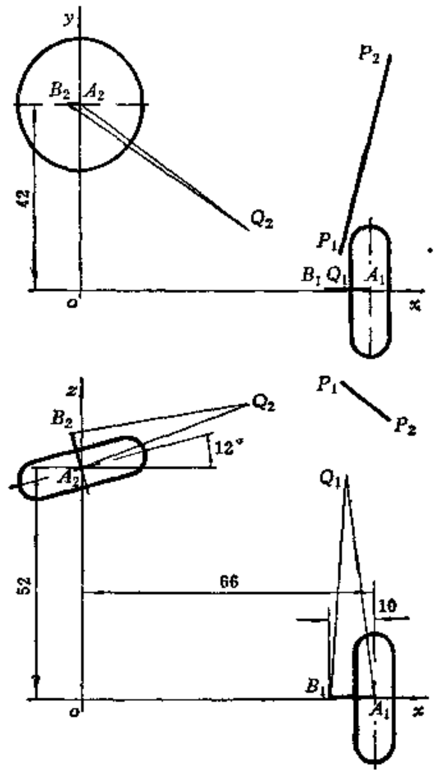

图 3　起落架收放算例

Fig.3 Numerical example of landing-gear problem

$$
[A]=\begin{bmatrix} 0.20791 & 0.56002 & 0.80197 \\ 0.00000 & 0.81988 & -0.57253 \\ -0.97815 & 0.11904 & 0.17046 \end{bmatrix}
$$

利用式（6）求得 $x_{Q_2}=38.85079$，$y_{Q_2}=13.37336$，$z_{Q_2}=66.39205$。

最后值得指出，本算例也可利用式（7）及（8）求解。这时，对 P 点的坐标，如取 $z_P=0$ 可求出 $x_P=147.53878$，$y_P=233.17999$。接着由式（8）~(11) 可求得转动矩阵 $[A]$ 为

$$
[A]=\begin{bmatrix} 0.20791 & 0.56009 & 0.80224 \\ 0 & 0.81997 & -0.57273 \\ -0.97815 & 0.11901 & 0.17052 \end{bmatrix}
$$

按此利用式 (7) 求得 $\phi=84.30678^\circ$，$u_x=0.34758$，$u_y=0.89460$，$u_z=-0.28143$。两法结果极为接近。

参 考 文 献

〔1〕 Garvey, S. J and Hetzel, K. W, Analytical Geometry in Common Layouts 1. The Case of Retraction of an Undercarriage About a Single Axis, Aircraft Engineering, May, (1943), pp132~134.

〔2〕 Liming, R A, Analytic Definition of a Retractable Landing Gear Axis of Rotation, J of Aeronautical Science, Vol 14, Jan (1947), pp19~23

〔3〕 Bisshopp, K E, Finite Rotations of a Rigid Body and the Airplane Landing-Gear Problem, J. of Mechanisms, Vol. 3, (1968), pp203～208

〔4〕 Suh, C H and Radcliffe, C W, Kinematics and Mechanism Design, John Wiley & Sons, (1978).

〔5〕 杨国柱编，飞机起落架构造与设计，北京航空学院印，(1982)。

〔6〕 凌晓琳 张启先，飞机起落架收放及转轮复杂空间机构的位置综合和碰撞检测，北京航空学院学报，No. 2, (1982)。

DETERMINATION OF THE AXIS AND THE ANGLE OF ROTATION FOR A RETRACTABLE LANDING GEAR

Zhang Qixian

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

The present paper deals with the analytical determination of the axis and the angle of rotation for a retractable landing gear. To facilitate the use of computer, the socalled rotation matrix 〔A〕 about a skew axis PP is worth applying. If the coordinates of three points, say A, B and C, of a rigid body before and after rotation about an axis through point P are known, the rotation matrix 〔A〕 can be easily calculated as follows:

$$[A]=\begin{bmatrix} x_{A_2}-x_P & x_{B_2}-x_P & x_{C_2}-x_P \\ y_{A_2}-y_P & y_{B_2}-y_P & y_{C_2}-y_P \\ z_{A_2}-z_P & z_{B_2}-z_P & z_{C_2}-z_P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{A_1}-x_P & x_{B_1}-x_P & x_{C_1}-x_P \\ y_{A_1}-y_P & y_{B_1}-y_P & y_{C_1}-y_P \\ z_{A_1}-z_P & z_{B_1}-z_P & z_{C_1}-z_P \end{bmatrix}^{-1}$$

where subscripts 1 and 2 stand for points before and after rotation respectively. Here a simple technique for obtaining the third point C from the two given points A and B of a rigid body is introduced. Any arbitrary point on the line passing through P and perpendicular to the plane formed by two given straight lines PA and PB can be taken as the point C.

In addition, some improvement in calculating the axis and the angle of rotation has been made. A numerical example of landing gear problem is included at the end of the paper.

The results obtained may be applied to design of retrac-table mechanisms for antennas and sensors on spacecraft as well.