

一九七九年教育部属高等学校

断裂力学学术会议论文集

一九八〇年 武汉

简 要 说 明

一九七九年十一月在武汉召开了教育部属高等学校断裂力学学术会议。学术会议筹备小组决定会后出版此论文集，论文集包含在大会上宣读的论文。此论文集各篇论文由各单位自行印刷，然后由华中工学院印刷厂装订成册。有少数几篇论文由于所在单位印刷困难，没有收在此文集之内，也在此说明。

目 录

裂纹非稳态扩展的瞬态振动特性和响应计算模型	唐照千 沈亚鹏 ()
关于快速扩展裂纹的止裂韧性 K_{Ia} 值.....	唐照千 沈亚鹏 ()
理想塑性介质中裂纹稳恒扩展的弹塑性场	高玉臣 ()
裂纹起始扩展的弹塑性场	高玉臣 ()
复合型裂纹应力场分析.....	周承侗 ()
运动裂纹与位错.....	王 铎 ()
复合型最大能量释放率断裂准则.....	黄克智 华达浩 余寿文 ()
非对称载荷的Griffith问题.....	汤任基 王 凯 ()
薄裂纹板的弯曲.....	王 凯 汤任基 ()
论裂纹起始扩展的非线性能量率.....	沈 为 ()
三维介质中复合应力下裂缝的扩展	田德诚 卢道全 ()
不同取向深埋椭圆裂缝的扩展.....	田德诚 朱家驹 ()
在奇异项上叠加有限元法计算应力强度因子	钟伟长 谢志成 顾求林 ()
用环状裂纹圆柱试样测定断裂韧度	沈 为 赵廷仕 高大兴 ()

- 裂纹扩展(传播)的涡流检测法和传播速度变化规律的实验研究
.....唐照千 沈亚鹏 ()
- 光弹性与全息光弹性确定应力强度因子的一个修正方法
.....杨槐堂 ()
- 激光全息和激光散斑法对有限宽裂纹裂纹尖端三维位移场测定
.....刘宝琛 蒯书田 刘青阳 ()
- 可靠性设计对断裂力学K准则的一个应用王殿富 ()
- 用光弹法确定应力强度因子K的研究.....顾绍德 李 崇等 ()
- 65Cr₁W₃M₀2VNb 钢的断裂韧度和断口形貌.....孙尧卿 朱孝谦 ()

裂纹非稳态扩展的瞬态振动 特性和响应计算模型

——DCB 试件的计算和实验研究——

西安交通大学 唐照千 沈亚鹏

摘 要

本文研究裂纹非稳态(快速)扩展的动力特性,特别是裂纹扩展速度的规律。主要考虑裂纹扩展量不很大的情况(考虑多次冲击下裂纹逐次扩展——止裂和一般试件计算的需要)。中心思想是试将裂纹快速扩展——止裂过程作为一种振动问题求解,而通过能量相当(等效)的原则与断裂力学基本概念(断裂准则等)相联系。裂纹快速扩展问题实质上是弹性体的瞬态振动(卸载响应)问题,具有随时间变化,由断裂准则决定的边界条件。在实验观察和理论分析基础上,建议通过等效假设,建立动力学计算模型——有阻尼的多自由度系统的初值问题,计及裂纹扩展引起刚度变化的非线性影响。并经过近似计算处理,最后归结为求解有阻尼的单自由度非线性系统在初始位移下的瞬态响应计算问题。模型建立的基础是总能量等效原则,主要假设是裂纹快速扩展过程中断裂能消耗可以用等效的阻尼能来表达,同时模型与实际问题的总能量平衡关系亦等效。用 DCB 试件为例说明计算方法和程序,算了实例与实验结果和其他工作比较。指出在扩展量较小时,可进一步线性化并列式。

在所建议的动力学模型基础上,对裂纹止裂时的应力强度因子(止裂准则) K_I 值的特性作出理论分析解释,说明 K_I 值不只是材料固有属性,而且与结构因素有关,并计算实例以验证理论分析的正确性。

为能从实验中直接记录裂纹快速扩展的全过程(包括目前还缺乏了解的起始加速阶段),研究成功一种新的涡测检测方法,其灵敏度高,抗干扰性能优良,而且使用十分简便。因此可提供实验数据以供理论计算作验证比较。

计算结果与各种实验结果符合较好,初步证明,所用的计算模型是令人满意的,计算简便有利于实用。可以作进一步研究以用于更复杂构件情况。

符号和标号的意义

A ——梁的截面积

a ——裂纹长度

a' ——任何瞬时的裂纹长度

c_{eq} ——等效阻尼系数

D ——阻尼能
 d ——加载销孔直径
 Δa ——裂纹扩展量
 $\Delta a' = a - a'$
 b ——梁的厚度
 C ——等效阻尼矩阵
 C_p ——主等效阻尼矩阵(对角线化)
 c_s ——材料内阻尼系数
 K_a ——止裂时的应力强度因子
 K_{I_s} ——材料的静态断裂韧性
 K_{I_d} ——材料的动态断裂韧性
 K_Q ——开裂时的应力强度因子
 (kl) ——特征值
 l ——梁的长度
 M ——质量矩阵
 M_p ——主质量矩阵
 n ——相对阻尼系数
 P ——外力(载荷)
 p ——固有频率
 q ——振动的广义坐标
 E ——材料的弹性模数
 g ——重力加速度
 h ——梁的高度
 I ——梁截面的惯性矩
 K ——梁支承处抗转动的刚度系数
 K_1, K_2, K_3 ——弹性支承的刚度系数
 R_a ——动态断裂能

S ——刚度矩阵
 S_p ——主刚度矩阵
 T ——动能
 t ——时间
 U ——位能, 应变能
 u ——位移
 V ——裂纹扩展速度
 W ——外力作功
 $X(x)$ ——梁的振动模态函数
 x, y, z ——直角坐标系
 $[\phi_i]_x$ ——模态函数
 ρ ——材料密度
 ν ——相对阻尼比
 λ, μ ——Lamé 常数

标号(上标或下标)

a ——表示对应于裂纹最终长度 a 的量
 a_0 ——表示对应于裂纹初始长度 a_0 的量
 $i, j = x, y$
 k ——振动模态的阶次
 o ——表示初始值
 s ——表示对应于“静态”扩展情况的量
 dym ——动态
 $stat$ ——静态
 $(\dot{\quad}) = \frac{d}{dt}(\quad)$
 $(\ddot{\quad}) = \frac{d^2}{dt^2}(\quad)$

一、前 言

工程上大型或重要构件为保证安全性, 常有必要考虑裂纹非稳态扩展问题。对于动载荷情况, 如冲击, 特别是多次冲击下裂纹逐次扩展——止裂过程的研究[1], 需要计算裂纹非稳态扩展的动力特性。如算出裂纹扩展速度后, 裂纹尖端的应力场(位移场)就可据以求出。另一方面, 试验测定材料的动态断裂能特性时因不易直接测出, 须由间接测量数据计算而得, 故也需断裂动力学计算方法。因此近年来裂纹非稳态(快速)扩展的动力学研究日益受到重视。

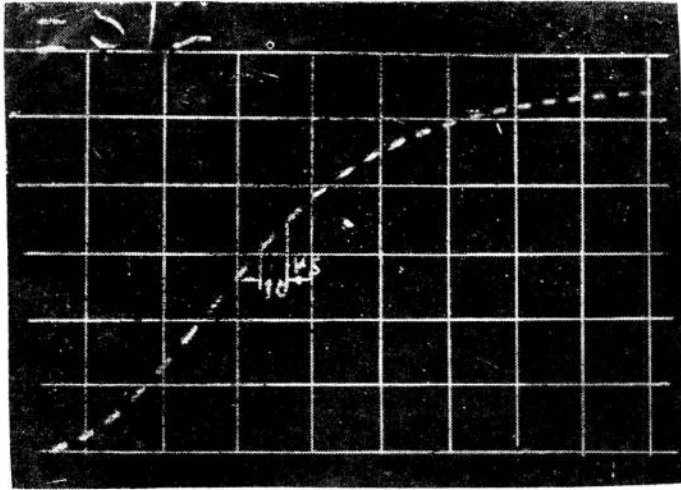
1948年, Mott[2]首先指出裂纹快速扩展时, Griffith 能量平衡关系中必须计及动能的影响, 并导出极限速度的概念, 其分析基于假定快速扩展过程中裂纹尖端处应力场与静态情况(稳态缓慢扩展)完全相同。随后直到60年代, 这方面研究主要围绕这一假定开展, 分析

尖端应力场与扩展速度的关系，包括极限速度和分叉现象等概念，研究方法均是数学分析，典型工作如[3]~[9]等。为便于进行数学分析，这时期工作都采用如下简化假设：(1) 不考虑热力学平衡关系；(2) 无限大物体，裂纹扩展不影响无限远处的载荷情况；(3) 断裂能为常数，与裂纹速度、温度等无关；(4) 裂纹沿理想直线扩展；(5) 裂纹以等速度扩展，且速度是已知的。下面我们将主要注意和讨论裂纹扩展为等速度的假设，因为基于这假设，在数学分析上就可用坐标变换使之成为准静态形式，易于求得分析解。

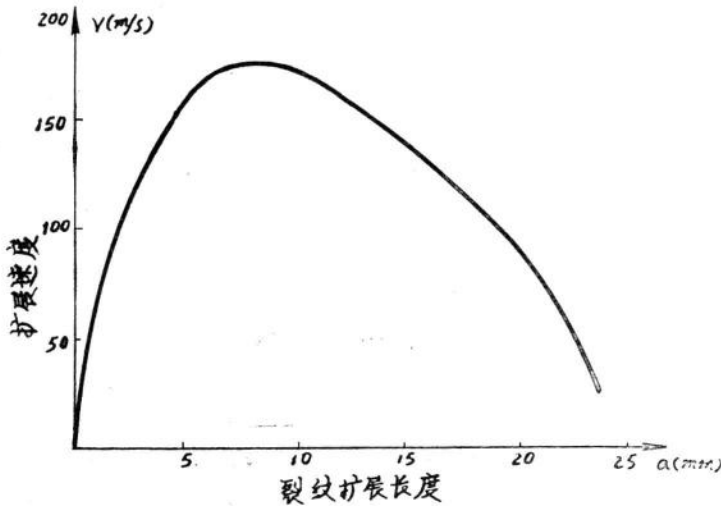
到70年代，研究逐渐转向实际应用方面，因实际构件都是有限尺寸，尤其考虑一般载荷情况（如冲击），上述裂纹速度为常数和与之有关的断裂能与速度关系的假设就值得探讨。至少可指出，对于裂纹扩展量不很大的情况，扩展起始和止裂前阶段必然有加速和减速过程。同时实际材料的断裂能大多随裂纹速度增高而增加，必须考虑（如假定裂纹速度为常数，此问题也易处理）。因此 Freund [10,11]，Kostrov [12,13] 等开始研究一般载荷情况和裂纹非等速扩展问题，但仍假定裂纹扩展长度的时间函数或扩展速度为已知，这与实际问题要求算出扩展速度和应力场还有距离，而且因数学困难，只有极少数简单问题才能求解。Kobayashi 等[14~16]用动态有限元法研究裂纹体断裂特性，然而也同样要求给定裂纹速度情况（根据动光弹性试验结果采用阶段等速变化规律）。另一方面，一些学者也开始研究具体构件的断裂动力特性（包括断裂能与速度的关系，以及止裂时应力强度因子 K_I 值等）。计算对象常采用实验试件，其中以 DCB 试件的计算进行最多，也较典型。自1959年 Gilman [17,18] 开始研究以来，一直是基本研究对象，特别是 Kanninen 等 [19~24] 作了大量研究，取得不少成果。他们以弹性基础梁作为结构上的模型，在静力学方面，算出的 K_I 值与实验数据和其他计算结果很符合。在动力学方面用有限差分法求解，其计算结果和实验结果都支持裂纹速度为常数的假设，但其计算和实验都忽视扩展起始阶段和止裂阶段。同时其计算模型自然只适用于 DCB 试件。最近 Keegstra [25,26] 用动态有限元法计算 DCB 试件在加载夹具固定情况下的裂纹快速扩展问题，求出裂纹扩展速度和长度等，但其求出的裂纹速度变化甚大，远非常数。虽然[25]中最后列出扩展量——时间曲线以示与[19~23]的结果接近，但这是因为扩展量是速度积分后的结果，反映差别就较小，而且其止裂点就与[23]等结果出入较大。在实验研究方面，[29]，[32]，[34~37]等都曾对裂纹扩展速度进行测量，结果表明裂纹速度并非常数（不是等速扩展），即使还往往未能测出扩展的全过程。另外，近年来对于止裂时的断裂韧性 K_{IC} 值也日益重视，因非本文主要目的，只引与本文有关的[28]工作为例。应指出，对 K_{IC} 值的性质分析推断还未有定论，实验资料还很不够，对 K_{IC} 值是材料属性，抑或与结构因素有关，看法还不一致，且对其与结构因素关系的机理迄今还未有明确论述，有待研究（本文将对此问题提出一种理论分析解释）。

综上所述，断裂动力特性研究至今还很不够，理论计算方面缺乏成熟方法，实验工作也应探索更有效的方法，累积数据，特别是材料动态断裂能资料等。鉴于上述情况，我们首先探索了实验技术，解决了裂纹快速扩展完整的全过程测量记录问题，提供数据以助分析研究[1],[29]。图1示出实验记录的裂纹快速扩展过程典型的扩展量（长度）——时间历程曲线和对应的裂纹速度——扩展长度曲线。由图可见扩展起始和止裂阶段的加速和减速过程，因而可以认为，至少在裂纹扩展量不大和存在止裂阶段的情况下，裂纹扩展速度为常数的假设与实际不符，应作进一步研究，以期建立更合理的计算模型。

早期关于断裂动力学研究常以能量关系导出 Lagrange 方程，根据极值条件决定极限速



a) 扩展长度——时间历程曲线记录图



b) 裂纹速度——扩展长度关系

图 1 DCB 试件在加载装置位移固定情况下的裂纹快速扩展过程

度，在公式推导中往往用裂纹速度为常数的假设，所以不能对整个扩展过程的速度变化规律进行研究。同时，以往关于断裂动力学问题研究常是对断裂静力学的基本假设和考虑方法作一些动力学角度的改进，而基本范畴还是静力学的（所谓准静态或准动态）。我们认为应直接从动力学角度进行研究，建立计算模型。中心思想是将裂纹快速扩展过程作为瞬态振动问题求解，而通过总能量等效相当原则与断裂力学基本概念（断裂准则，能量平衡等）相联系。详言之，是根据实验观察到的动力特性和关于大多数材料断裂能随裂纹速度增高而增加的性质，建议将裂纹快速扩展过程看作有阻尼的振动系统（构件作为弹性体或离散化为多自由度系统）在初始条件下的瞬态响应过程（卸载响应问题）。模型建立的原则是两者（模型和实际情况）能量相当。主要的假设是：将断裂能消耗用等效的阻尼能消耗来相当（代替）。这是因为据实验资料，断裂能与裂纹速度大多接近正比关系，而断裂能又主要是塑性变形能，具有粘性阻尼性质，故可将断裂过程看作具有比例阻尼性质（或阻尼矩阵可对角线化的形

式)的运动过程。以上建议是动力学方面的模型,而在结构上仍应用结构模型(如 DCB 试件以梁为模型)或静力学研究的已有成果(如平面问题方面)。算出裂纹速度后,就可根据已有的要求给定速度规律或等速假设下计算应力场(和位移场)的解答,如 [5~13], 计算动态应力场(位移场)和强度因子等。

本文讨论裂纹扩展——止裂过程,即裂纹扩展后自动止裂或人为止裂的情况,这是实用上感兴趣的问题。所研究的情况主要是扩展量不很大的情况(如对 DCB 试件而言,扩展量与裂纹初始长度同量级)。将着重从物理概念角度讨论裂纹快速扩展——止裂的动力特性和理论计算依据的假设。下面将先对一般情况下的动力学模型进行讨论,然后以 DCB 试件为例,说明按上述模型进行计算的方法,并进行实验测定,以资验证,结果是令人满意的。

由于主要考虑静载荷和一般动载荷如机械冲击(毫秒级)等情况,故分析时不考虑弹性波的传播和反射,故以下讨论不适用于高速(微秒级)冲击等情况。

二、裂纹非稳态扩展的运动学概念的定性讨论

从运动学角度看,即从裂纹体上各点运动情况看, I 型和 III 型断裂——张开型和撕裂型属于同一性质,裂纹体上各点主要运动方向与裂纹扩展方向垂直,是一种非定常(瞬态)的横向波动问题。II 型断裂——滑移型则属于另一种性质,裂纹体上各点主要运动方向与裂纹方向相同,是一种特殊的纵向波动。这里只以前二种断裂型式为例讨论。从 I 型断裂时裂纹体各点运动位移来看(III 型与 I 型不同处只是其运动平面与 I 型运动平面垂直),裂纹扩展速度应由裂纹形廓线上各点垂直于裂纹方向的速度和该点处的瞬时斜率决定,即(见图 2),

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

试以开裂点 O 的运动情况看,裂纹扩展时 O 点运动至 O' (和 O''), 现对三种典型的裂纹形廓的扩展速度作定性讨论:

(1) 尖劈形裂纹(图 2, a)——裂纹形廓线的斜率是常数。Charpy 试件近似于这种情况。裂纹速度的变化规律与垂直方向的裂纹体瞬态响应运动相同,据通常的弹性体振动情况估计(必有加速,减速阶段),裂纹速度不可能是常数;

(2) 收敛形裂纹(图 2, b)——裂纹形廓线的瞬时斜率逐渐减小(趋向零)。平板形拉伸试件等属此类型。由于裂纹体在垂直方向的运动是速度渐趋于零的阻尼衰减运动,故裂纹速度可能是或接近于常速度;

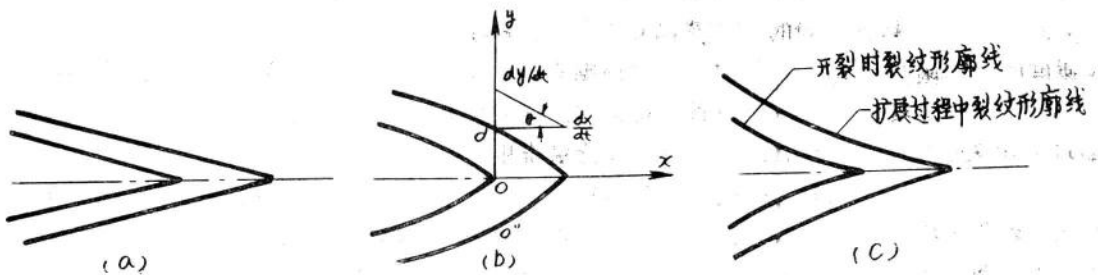


图 2

(3) 发散形裂纹(图 2, c)——DCB 试件的裂纹即属此类。一般情况下开裂点(O点)的瞬时斜率缓慢增加,以后略微减小,但形廓线的平均斜率则是缓慢地降低。垂直方向运动仍与上述相同,故裂纹速度不可能是常数,只是在达到最大速度前后,如裂纹扩展长度较大,可以有一段速度曲线平坦区(速度接近常数)。

联系实际观察到的断裂现象,从以上观点还可对裂纹速度作一些定性讨论:

(1) 脆性材料裂纹速度大,是因其裂纹形廓线的斜率很小;

(2) 延性金属裂纹速度较低,是因尖端存在塑性区,使斜率较大之故。但如尖端较钝(如人为地做成圆形),裂纹速度也可很快,是因为钝头蓄积能量大(初始变形大),使垂直裂纹方向的瞬态响应速度很大之故;

(3) 对于自然止裂情况,扩展时间和裂纹速度等参数与裂纹体的弹性振动特性有关,即与固有频率或周期以及振型等有关,前者影响扩展时间及垂直方向的响应速度,后者决定瞬时斜率。而且因裂纹扩展引起物体刚度变化,应考虑其非线性振动性质;

(4) 无限大平面内裂纹速度可以是常数,因无限平面内裂纹扩展不影响裂纹体受力情况,故裂纹形廓可保持不变,同时裂纹体(指有裂纹区域)的动力特性也到处相同,即扩展路径上任何一点的垂直方向速度都相同,所以裂纹速度可以是常数(如以开裂点的垂直方向响应速度来看,虽渐减小并趋向零,但其瞬时斜率也如此,故二者之商仍可是常数);

(5) 裂纹传播的极限速度概念:据上述概念,裂纹速度决定于裂纹体的动力特性,亦即与裂纹体的刚度等参数有关。同一物体,有裂纹存在时刚度必低于无裂纹时,其瞬态振动速度也低于无裂纹时的速度——弹性波速度(横波速度,因为裂纹扩展是横向振动情况)。同时由于裂纹传播形成自由表面,而无限表面的表面波速是 Rayleigh 波速,故实际情况下,裂纹作为一种卸载瞬态响应的传播速度必小于 Rayleigh 波速,此即极限速度的物理概念。具体物体不是半无限大,其极限速度不是只决定于材料特性的常数。

三、裂纹非稳态扩展——止裂过程的动力学计算模型

动力学计算目的主要是算出裂纹扩展速度、持续时间和扩展长度等。我们主要讨论扩展的全过程,即存在止裂(自动或人为的)的情况。

早期的研究(如[17])都以导出裂纹运动方程以求解为目的,但由于裂纹只是一种几何形廓,本身没有质量,这一力学上的困难使人们只能用物体垂直于裂纹方向的运动方程而以

(1) 式关系将裂纹速度 $\frac{dx}{dt}$ 或 $\frac{da}{at}$ 引入运动方程。为了数学上的简化,往往假设裂纹速度在整个扩展过程为常数,这就引入了不一定符合实际的限制。为此,应当从裂纹体的运动方程出发,求解垂直于裂纹方向的运动情况(速度和位移),同时计算瞬时斜率,由(1)式求出裂纹速度的时间函数。具体计算时,则可根据裂纹形廓线的弹性变形建立裂纹扩展量与运动广义坐标的函数关系,微分后就直接求得裂纹速度(瞬态斜率概念已包含在内)。同时,还要通过能量关系结合考虑材料的断裂准则和止裂准则。

以平面问题来讨论(三维问题在基本概念上并无不同之处,但分析讨论大为复杂),用 x, y, z 坐标系, xy 平面与物体平面重合, x 轴为裂纹方向(直线裂纹假设),研究 I 型断裂形式,故各参数与 z 无关。裂纹体的弹性动力学方程为(考虑线性情况):

$$(\lambda + \mu)u_{i,jj} + \mu u_{i,ji} = \rho \ddot{u}_i, \quad i, j = x, y \quad (2)$$

因一般情况下材料内耗阻尼很小而不计。按通常的模式分析法，方程(2)的解可写为

$$u_i = \sum_k (\phi_i)_k \cdot q_k(t) \quad i = x, y \quad (3)$$

$(\phi_i)_k$ 为 x, y 的函数——固有模态函数。问题的特点在于边界条件因考虑裂纹扩展而为时间的函数，并与材料的断裂准则有关，同时一般材料的断裂能又与扩展速度有关，致使问题求解极为复杂。以往的研究都先假定裂纹扩展量或速度的时间函数为已知，故可用双重 Laplace 变换与 Wiener-Hopf 方法求解应力和位移分布，如[8][12,13]等，但也只能解最简单的情况。这实际上并未解出动力特性问题。如采用动态有限元法[25]，计算极繁而算出结果又有不易解释之处（速度情况）。鉴于迄今已有的计算结果往往出入较大，实验资料又少而数据分散，因此应当着重于从物理概念出发，抓住主要矛盾并进行一些合理的简化，在熟知的动力学知识基础上建立计算模型，避免在繁琐的数值计算中往往不易分析和寻找基本规律。

如上所述，问题的困难在于随时间变化并由断裂准则决定的边界条件如何处理。分析其实质，主要是二点：**(1)** 裂纹扩展过程中裂纹体的能量逐渐消耗于断裂能；**(2)** 裂纹扩展时物体刚度不断变化。为使边界条件简化，针对以上二点采用下列二点简化假设：**(1)** 如前言中已述，将断裂能消耗用等效的阻尼能（假设可取比例阻尼或可对角线化的阻尼矩阵形式）表示；**(2)** 将扩展时刚度（裂纹长度）变化用对振动系统固有频率值修正的方法（引入非线性修正函数）来计及其影响（为计算方便，将相对于止裂位置的固有频率值作修正）。这样，边界条件就简化为固定条件，由止裂时的几何位置参数决定，不再与时间有关（因裂纹边界的断裂能已用振动系统的阻尼能等效）。

采用第**(1)**点假设后，裂纹体的几何形廓从开裂到止裂的变化就可以视作有阻尼的弹性体系在初始条件（开裂时几何位置相对于“静态”止裂——振动系统的静平衡位置时的位移场）下的瞬态响应，止裂时的位置就相当于最大响应的位置（因该时速度为零）。等效阻尼的大小由断裂准则确定（下节再述）。于是问题就成为求解通常的初值问题。由于我们假设在总能量等效的原则下等效阻尼可取比例阻尼形式（如粘性阻尼等），故可以用无阻尼情况下的固有模态函数对运动方程作正规化处理以建立独立（去耦）的振动方程组，即对已知固有振动解的构件，就易得到

$$\ddot{q}_k + 2n_k \dot{q}_k + p^2 q_k = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

对于复杂构件，则按惯例先离散化为多自由度系统，写出矩阵方程形式

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Sy = 0 \quad (5)$$

C 为等效阻尼矩阵，与上述相同，只要满足模型系统与实际构件的总能量相当原则，可假设 C 的形式能取为可用固有模态矩阵变换成对角线化的形式（特别是比例阻尼形式），故可正规化处理得[38]

$$M_p \ddot{q} + C_p \dot{q} + S_p q = 0 \quad (6)$$

经归一化处理，亦得到与(4)式形式相同的独立方程组。对于裂纹扩展情况，计算时应取几项来表达，即应取几阶固有模态来表达运动情况，经过计算实践（试取一，二，三项），发现按目前断裂动力学计算要求的精度只须取一项第一阶($k=1$)模态表达就够了，也就是说只须用单自由度系统作为计算模型，这使问题大为简化，使第**(2)**点假设引入非线性修正函数成为可能和容易实行的办法。顺便指出，对于裂纹扩展情况需要几项固有模态来表达时，

我们亦将按线性系统办法预先计算决定其相互比例关系，即取一定的振型作为近似解形式，而使模型成为单自由度情况，以便容易考虑非线性影响。

现在引入第(2)点假设：对于裂纹扩展过程中物体刚度变化引用一个非线性修正函数 $f_s(q_1)$ 来考虑，此函数是考虑裂纹长度变化引起刚度变化对固有频率值 p_1^2 的影响的。这样对单自由度模型才引入非线性修正函数的近似处理是为了避免一开始就处理一个非线性多自由度系统而使问题易于处理。经过这样的近似处理，最后要解的方程就为

$$\ddot{q}_1 + 2n_1 \dot{q}_1 + p_1^2 \cdot f_s(q_1) \cdot q_1 = 0 \quad (8)$$

综上所述，最后计算模型建立一个计及非线性影响的有阻尼单自由度系统的瞬态响应问题，而将取线性系统情况的振型作为其近似振型求解。其初始条件是：初始位移由开裂时裂纹几何形廓相对于静平衡止裂位置的位移转换为广义坐标 q_1 表示，初始速度为零。求得 q_1 及 \dot{q}_1 后，再算出裂纹速度 $\frac{da'}{dt}$ 及裂纹长度 a' (任一瞬时的)。为此，必须建立扩展长度 Δa 或 a' 与广义坐标 q_1 的关系式，即按裂纹扩展到任意长度 a' 时，将裂纹形廓线上各点垂直于裂纹方向的位移按取定的模态函数(振型)表达为广义坐标 q_1 ，即导出下列关系式

$$a' = A(q_1) \quad \text{或} \quad \Delta a = A_1(q_1) \quad (9)$$

由之求出扩展速度

$$\frac{da'}{dt} = \frac{dA}{dq_1} \cdot \dot{q}_1 \quad (10)$$

修正函数 $f_s(q_1)$ 的确定：在裂纹扩展到不同的位置 a' 时计算模型系统固有频率 p_1^2 值的公式中，将上列(9)式关系代入，即可得对止裂位置时的 p_1^2 值修正的函数 $f_s(q_1)$ 。

以上所用的二点近似的简化假设——在总能量相等的原则下采用假定的等效阻尼形式和用线性系统的振型(可用一定比例的几阶固有模态函数表示)作为非线性系统的近似振型求解，虽是振动问题近似计算方法(如 Rayleigh、Ritz 法等)所常用的，但对这种问题是否能得良好效果，必须由计算分析和实验验证来判断(到最后结果讨论时还将探讨)。下面将以 DCB 试件为算例具体说明计算方法，并作实验以验证计算模型的正确性。

四、能量等效和平衡关系

上述是动力学计算方法，而计算模型必须建立在能量关系等效于实际构件的基础上，并满足断裂力学的能量关系式。裂纹扩展过程中，必须遵循 Griffith-Mott 能量平衡关系

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} + \frac{dD}{dt} \quad (11)$$

根据能量等效原则，裂纹扩展过程中构件内应变能释放量 U 就相当于模型系统的位能变化，即整个过程的释放量应等于模型的最大位能，且各瞬时两者亦相当。同样，阻尼能与断裂能亦应相当(上式中 D 同时表示两者)。

按[20~25]认为动能最后(在扩展过程的后半阶段)仍将贡献给断裂能消耗，这见解与我们取振动系统为计算模型来说是完全一致的(因振动系统最后不论位能或动能都将消耗于阻尼能)。在裂纹自然止裂时总能量平衡关系为

$$W = U_{\text{释放}} - U_0 + D \quad (12)$$

这与以往断裂动力学研究中采用的能量平衡式

$$W = U_0 - U_0 + D \quad (13)$$

的差别在于以 U_0^{dyn} 代替 U_0 。这是按上述模型分析的结果, U_0^{dyn} 表示止裂时裂纹形廓处于最大响应位置(裂纹形廓由振型表示)时裂纹体的位能, 而 U_0 是指最后静止状态的位能, 相当于裂纹缓慢扩展到 a 长度止裂时的位能(不考虑动力响应的准静态情况), 此时裂纹形廓由静力平衡关系确定。可见, $U_0 - U_0^{dyn}$ 大于 $U_0 - U_0$ (动力响应作用的结果)。止裂后, 裂纹形廓由振型变至静平衡形状, 释放出能量 ($U_0^{dyn} - U_0$) 全部消耗在裂纹体本身内耗阻尼振动中(渐衰减至静止)。如开裂时 K_{Ic} 值愈大(尖端愈钝), 这部分能量往往愈多。这情况是用上述模型的基本概念来解释止裂时 K_{Ic} 值性质的根据(见下节)。

对于人为止裂情况, 止裂后物体还将有更大的衰减振动过程, 即相当于上述的 ($U_0^{dyn} - U_0$) 更大于自然止裂情况。

五、断裂准则和止裂准则

判别裂纹扩展的准则常用能量表达式, 也可用材料的断裂韧性值。下面将用材料动态断裂韧性值 K_{Iad} 表示断裂能消耗 (K_{Iad} 表示材料抗动态断裂的能力, 不可与快速扩展时的应力强度因子 K_{Ia} 相混淆, 以往有些工作就有此问题), 其关系定义为

$$R_a = \frac{dD}{da} = \frac{K_{Iad}^2}{E} b \quad (14)$$

应指出, 由于平面问题中断裂准则表示为单位扩展长度内消耗的断裂能, 而能量平衡关系式中用单位时间的能量变化率, 故须用各瞬时的裂纹速度来换算(用等速度假设时, 因两者等价, 故很简单)。

各种材料的 K_{Iad} 值目前还很缺乏, 已知情况大致是 K_{Iad} 与裂纹速度有关(与温度的关系这里暂不讨论), 一般随速度增加而增高, 这就是本文提出用粘性阻尼作用来等效于断裂过程以建立计算模型的根据。 K_{Iad} 与裂纹速度关系的具体规律则随材料而异, 如聚合物材料可认为与速度成正比[30], 而对软钢, 则当速度从零开始增大时, K_{Iad} 先略减小, 随即很快增高, 可用特殊抛物线规律表达[23, 24]。还有认为 $K_{Iad} = K_{Ic}$ 与速度无关的[25][28]和取 $K_{Iad} = \sqrt{K_{Ic} K_{Ia}}$ 公式表示的[20][22] (以上的 K_{Iad} 实际是指整个扩展过程中 K_{Iad} 的平均值) 所以用粘性阻尼等形式来等效描述只能定性地相当, 但只要满足能量相当关系, 效果是令人满意的。按严格要求, 应当不仅整个扩展过程的总断裂能消耗等于模型的总阻尼能消耗, 而且每一瞬时的阻尼能 D_a (以单位扩展量计算) 也须等于该瞬时的断裂能 R_a (平面应力情况 $D_a = \frac{K_{Iad}^2 \cdot b}{E}$) 这就要求材料的 K_{Iad} 必须与速度成正比, 但如上所述, 不是各种材料都符合这要求。因此我们建议的处理办法是: 主要使整个扩展过程的断裂能消耗等于计算模型的总阻尼能消耗。实践证明, 这一总量等效方法就能得到与实验符合的结果。

关于止裂准则, 即止裂时的 K_{Ic} 值是否材料固有属性? K_{Ic} 等于 K_{Ic} , 还是小于 K_{Ic} ? 迄今未有定论[20][28][33], 实验结果常发现 $K_{Ic} < K_{Ic}$, 而 $K_{Ic} = K_{Ic}$ 从静态断裂机理看也是合理的, 但实验结果 K_{Ic} 值往往大小不一又说明显然与结构因素等有关。我们将用上述瞬态响应计算模型对 K_{Ic} 值的性质试作分析解释。首先对于尖锐裂纹随载荷增大而缓慢扩展情况

(如楔块加载, 楔块逐渐压入, 裂纹也渐扩展), 因不存在动力响应, 裂纹扩展到静态平衡点就止裂, 故 $K_{IIc} = K_{IIc}$ 是符合实际的。对于钝头裂纹, 开裂是突然卸载, 必须按瞬态响应计算止裂点。此时, 止裂相当于裂纹形廓线到达最大响应位置, 这时的止裂准则仍可以是 $K_{IIc}^{dyn} = K_{IIc}$, 因为此时裂纹速度等于零, 相当于开裂点情况。止裂后, 裂纹形廓线经衰减振动趋向最后静止位置, 变形减小, 相当于最后 $K_{IIc} = K_{IIc}^{dyn} < K_{IIc}$ 。故 K_{IIc} 值将与试件的结构尺寸, 动力特性参数如裂纹速度, 长度等有关, 不只是材料的属性。据此可推断, 动力响应作用愈大(即等效阻尼愈小, 裂纹速度愈大), 响应位置的弹性变形也愈大, 最后静止时 K_{IIc} 值就愈小。这一分析说明与[28]的实验观察结果完全符合。我们用有机玻璃(PMMA)制 DCB 试件实验的结果, 发现 $K_{IIc} = K_{IIc}$ 与计算分析相符合, 因为 PMMA 材料相对言断裂能较大, 即等效阻尼甚大, 故动力响应作用很小, 响应放大系数 $RMF = 1$, 止裂阶段已接近静态缓慢扩展情况(速度很小, 渐趋于零, 见图 9), 故应有 $K_{IIc} = K_{IIc}$ 。这与[22]的实验结果亦完全一致。

K_{IIc} 值与结构因素有关, 使止裂准则不能预先取定, 因而扩展计算须用试凑的方法。

六、DCB 试件裂纹快速扩展——止裂过程的动力特性计算

DCB 试件(双悬臂梁)是以往研究得最多的对象, 故本文亦用以说明上述计算模型的应用, 且便于与已有结果比较。

以下考虑加载点位置固定情况下的快速扩展情况, 故外力不作功, 能量平衡式为

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} + \frac{dD}{dt} = 0 \quad (15)$$

(1) 静力学计算公式

图 3 所示 DCB 试件, 其结构模型可取作一端自由, 一端弹性固定的悬臂梁。根据实验和分析计算结果, 其弹性固定端可取位移是刚性支承而转角是弹性支承的情况(因为悬臂梁本身刚度较小, 故因弹性支承产生的附加位移相对于梁的挠度和转角引起的位移而言, 除接近支承处外, 可以忽略不计; 另外, 因下面计算主要考虑裂纹扩展前后位置之差, 故这一附

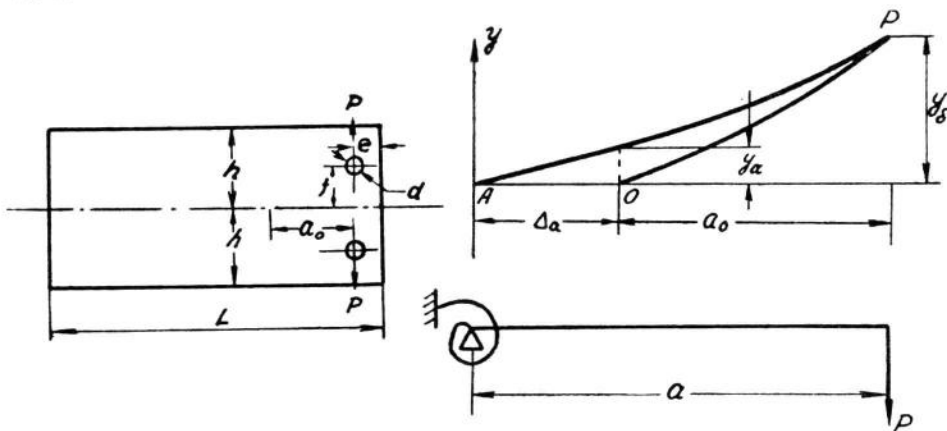


图 3 DCB 试件及其结构模型

加位移大部分抵消, 影响不大)。

在 P 力作用下, 长度为 a 的裂纹形廓线上各点的位移为

$$y = \delta \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^5 + \frac{3EI}{Ka} \left(\frac{x}{a} \right) \right] \quad (16)$$

自由端处 (加载点) 的位移为,

$$y_s = \delta \left(1 + \frac{3EI}{Ka} \right) \quad (17)$$

$\delta = \frac{1}{3} \frac{Pa^3}{EI}$, 是刚性固定的悬臂梁在加载点的挠度。

依据[19]的计算公式和我们的实验结果 (测固有频率方法), 抗转动刚度 K 由下列公式决定:

$$\frac{3EI}{Ka} = f(a) = 1.92 \left(\frac{h}{a} \right) + 1.22 \left(\frac{h}{a} \right)^3 + 0.39 \left(\frac{h}{a} \right)^5 \quad (18)$$

裂纹长度为 a 时应力强度因子和梁的应变能计算式为

$$K_I = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Eh^{3/2} \left(1 + 0.64 \frac{h}{a} \right)}{[1 + f(a)]} \cdot y_s \quad (19)$$

$$U_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{3EI}{a^3 [1 + f(a)]} \cdot y_s^2 \quad (20)$$

当裂纹由初始长度 a_0 扩展到 a 时, 裂纹形廓线由 \widehat{AOP} 变至 \widehat{AP} (图 3), 形廓线上各点的位移 (即动力学计算时的初始位移计算式) 为,

$$\begin{aligned} y(x) &= \delta \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^5 + f(a) \left(\frac{x}{a} \right) \right] \quad \text{当 } x \leq \Delta a \\ &= \delta \left\{ \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^5 + f(a) \left(\frac{x}{a} \right) \right] - \frac{1 + f(a)}{1 + f(a_0)} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x - \Delta a}{a_0} \right)^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{x - \Delta a}{a_0} \right)^5 + f(a_0) \left(\frac{x - \Delta a}{a_0} \right) \right] \right\} \quad \text{当 } x > \Delta a \end{aligned} \quad (21)$$

(2) 动力学计算公式

在裂纹快速扩展过程中, 加载点固定的 DCB 试件的每一臂相当于两端支承的梁。由于梁长度相对高度而言是不大的 (l/h 常为 $2 \sim 5$ 或更大些, l 指扩展后的裂纹长度)。因此振动方程必须考虑切力和转动惯量的影响, 同时因梁本身刚度甚大 (最低阶固有频率为 10^3 量级以上), 故两端支承均不能认为是刚性的, 必须考虑是弹性支承。因此我们采用的结构模型是一端位移和转角都是弹性支承, 另一端 (加载点) 位移弹性支承而转角自由的梁, 支承刚度与梁本身刚度 (简支时) 是同量级的情况。 (顺便指出, 上节悬臂梁计算时忽略了位移支承的弹性, 因为悬臂梁本身刚度远小于两端支承梁的刚度, 故相对言, 位移支承对悬臂梁还可认为是刚性的)。

上述梁的运动方程为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial t^2} + c_a \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\rho A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\rho I}{g} \left(1 + \frac{E}{k' G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (22)$$

G 为剪切弹性模数, k' 为考虑剪力的截面系数。按上节的讨论, 方程的解可用固有模态函数 X_k 表达:

$$y = \sum_k X_k(x) \cdot q_k(t)$$

$X_k(x)$ 及固有频率 p_k^0 按上述弹性支承边界条件计算, 见附录 I。根据计算实践(试取三项表达式等), 发现取一项(一阶振型)就能满足要求(也可看具体情况取几项彼此比例固定的固有模态函数组成近似振型形式, 这样仍使问题成为单自由度情况)。构件内耗阻尼远小于等效阻尼 $c_{e,0}$, 只在止裂后的衰减振动中起作用。考虑裂纹扩展时梁长度改变(从 $a_0 \rightarrow a$) 引起刚度变化而影响固有频率 p_1^0 值的修正函数 $f_s(q_1)$, 最后得到运动方程为(单自由度有阻尼的非线性系统方程)

$$\ddot{q}_1 + 2\nu p_1 \dot{q}_1 + p_1^2 f_s(q_1) \cdot q_1 = 0 \quad (24)$$

按上述模型概念, 梁的瞬态响应位移和速度就是要计算的对象。当响应速度达零时(响应位移达最大时)就相当于止裂位置。图4中 $\widehat{PO_s A}$ 为“静态”计算(裂纹缓慢扩展情况, 止裂准则就是 $K_{I,c}$, 如尖裂纹用楔块加载时缓慢扩展的情况)的止裂位置, $\widehat{PO_{ad} A}$ 线是考虑动力响应的止裂位置, 随后经过衰减振动, 裂纹形廓线最后静止位置为 $\widehat{PO_0 A}$ (以后具体计算中因为只对最后静止位置感兴趣, 所以将不顾衰减振动等情况, 而只计算最终位置 $\widehat{PO_0 A}$)。如以开裂点相对于静态平衡位置的位移作为振动系统的初始位移来看, 因动力响应作用, 最大位移(止裂位置)为 $y_s = y_0 \cdot (RMF)$, $(RMF) \geq 1$ 为动力响应放大系数, 与阻尼大小有关(阻尼大时 $(RMF) \rightarrow 1$)。

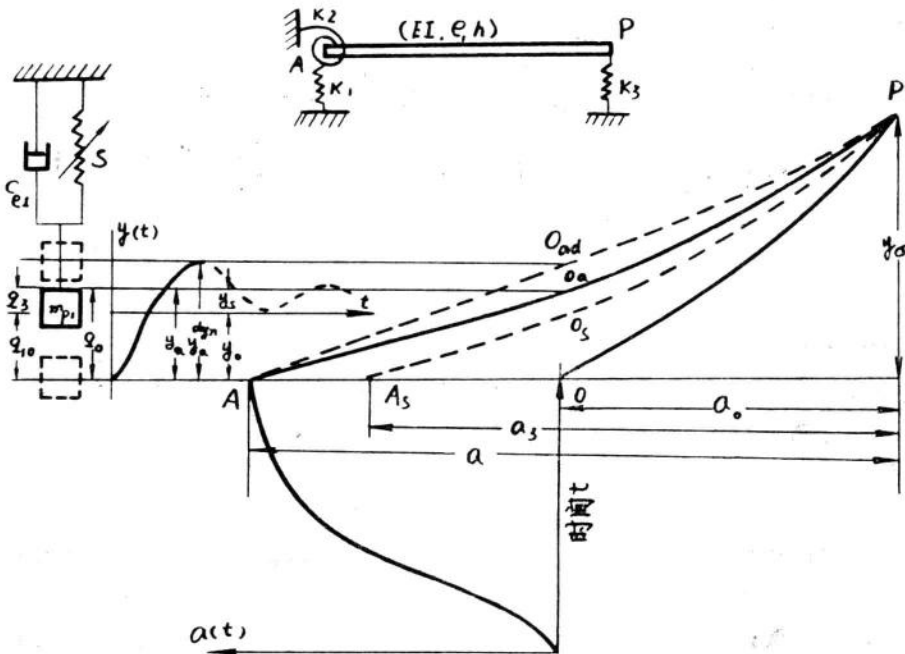


图4 裂纹扩展时形廓线位置的变化(所示乃等效阻尼 ν 值较小, 动力响应较大的情况)

由图4可见, 梁在开裂时的位置 \widehat{AOP} 就相当于初始条件(位移)。具体计算均用相对于最后静止线 $\widehat{AO_0 P}$ 的位移 $y_s(x)$, $y_0(x)$ 来表示, y_0 及 y_s 按(21)式取 $\Delta a = (a - a_0)$ 及 $\Delta a =$

$(a-a_s)$ 算出, a_s 由静态止裂准则 K_{Ic}^* 根据载荷大小 (y_s 或 K_Q/K_{Ic}) 算出。模型系统的初始条件用广义坐标表示为

$$\left. \begin{aligned} q_{10} &= q_{1a} - q_{1s} = \int_0^1 y_0 \left(\frac{x}{a} \right) \cdot X_1 \left(\frac{x}{a} \right) d \left(\frac{x}{a} \right) \\ \dot{q}_{10} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中 $y_0 \left(\frac{x}{a} \right) = y_a \left(\frac{x}{a} \right) - y_s \left(\frac{x}{a} \right)$, $q_{1a} = \int_0^1 y_a \left(\frac{x}{a} \right) \cdot X_1 \left(\frac{x}{a} \right) \cdot d \left(\frac{x}{a} \right)$ 和 $q_{1s} = \int_0^1 y_s \left(\frac{x}{a} \right) \cdot X_1 \left(\frac{x}{a} \right) \cdot d \left(\frac{x}{a} \right)$ 。为运算方便, 采取无量纲化和归一化处理, 命 $\tau = p_1 t$, $q = \frac{q_1}{q_{1a}}$, 使(24)式写成

$$\frac{\ddot{q}}{d\tau^2} + 2\nu \frac{\dot{q}}{d\tau} + f_s(q) \cdot q = 0 \quad (26)$$

初始条件则为

$$q_0 = 1 - q_s \left(= 1 - \frac{q_{1s}}{q_{1a}} \right); \quad \left(\frac{dq}{d\tau} \right)_0 = 0. \quad (27)$$

现导出裂纹扩展量与广义坐标的函数关系和对固有频率值 p_1^2 的非线性修正函数 $f_s(q)$ 。按(21)式, 任意扩展长度 a' 时 ($a_0 < a' < a$; 令 $\Delta a' = a - a'$), 有

$$q = \frac{1}{q_{1a}} \int_0^1 y_a' \left(\frac{x}{a} \right) \cdot X_1 \left(\frac{x}{a} \right) \cdot d \left(\frac{x}{a} \right) \quad (28)$$

式中 $y_a' \left(\frac{x}{a} \right)$ 为裂纹长度为 a' 时形廓线上各点相对于 $\widehat{AO_sP}$ 线的位移。由之可得 a' 与 q 的关系, 写为

$$\frac{\Delta a'}{a} = F(q); \quad a' = a - \Delta a' = a[1 - F(q)] \quad (29)$$

固有频率值可表示为 $p_1^2 = \frac{S_0}{m_{p1}}$ 。 m_{p1} 为广义质量。(应指出, 以后具体计算中, m_{p1} , S_0 以及上述的 q_{1a} 等值都将由模型与实物的能量相当关系式决定, 而且不须算出具体数值, 这里只用其表达式和计算相对比例数值(无量纲值)。由附录 I; $p_1^2 = \frac{(kl)_a^4}{a^4} \left(\frac{E_{dyn} I_g}{\rho A} \right)$; 任意 a' 时: $p_1'^2 = \frac{(kl)_{a'}^4}{a'^4} \left(\frac{E_{dyn} I_g}{\rho A} \right) = \frac{S(q)}{m_{p1}'}$ 。特征值 $(kl)_{a'}$ 亦与 a' 有关, 根据数值计算结果, 找出

$$(kl)_{a'}^4 = [1 - G(q)] (kl)_a^4 \quad (30)$$

于是, 根据关系式

$$p_1^2 f_s(q) = \frac{S(q)}{m_{p1}} = \frac{S(q)}{m_{p1}'} \left(\frac{m_{p1}'}{m_{p1}} \right) = p_1'^2 \left(\frac{a'}{a} \right) = p_1^2 \left[\frac{(kl)_{a'}^4}{(kl)_a^4} \right] \left(\frac{a'}{a} \right)^3$$

可得

$$f_s(q) = [1 - G(q)] [1 - F(q)]^{-3} \quad (31)$$

因 $f_s(q)$ 函数形式复杂, 故方程(26)只得采用数值解法。求解时初始位移的取定应注意: 因不同的相对阻尼比 ν 值对应于不同的响应情况(图5, 因这节主要对算出止裂最终位置感兴趣, 故忽略图4所述的止裂后可能存在衰减振动等情况而只按 q_0 值计算)。在刚度为非线性情况下, 对应于不同的静平衡位置 q_s (对应于 a_s), 其刚度变化关系是不同的。在数值计