

国外航空技术

国外航空编辑部

1975年12月1日

11-12

测试类

断裂力学实验技术

目 录

1. 序 言	(1)
2. 断裂力学	(2)
2.1 引 言	(2)
2.2 二维问题	(4)
Westergaard 应力函数	(4)
Muskhelishvili 应力函数	(8)
有限单元方法	(9)
理论依据	(10)
数值程序	(11)
承受内压、外表面带疵的圆筒	(13)
单轴拉伸板内的倾斜裂纹	(13)
2.3 断裂力学中的三维问题	(16)
圆裂缝	(16)
椭圆裂缝	(18)
承受单轴拉伸的无限大固体内的椭圆裂缝	(19)
承受纯弯曲的无限大固体内的椭圆裂缝	(19)
单侧表面突然受热厚板内的椭圆裂缝	(19)
表面半椭圆裂缝	(20)
有限单元方法	(20)
2.4 分析方法的局限性和实验力学的作用	(22)
3. 声发射技术	(25)
3.1 符 号	(25)
3.2 引 言	(26)
历史回顾	(26)
岩石声发射	(26)
金属声发射	(26)
3.3 测试设备	(27)
概 要	(27)
传感器	(28)
电子设备	(28)
3.4 声发射在探测裂纹方面的应用	(29)
无裂纹材料的声发射	(29)
含伤材料的声发射	(31)

3.5 声发射对于探测裂纹亚临界扩展的应用	(36)
升载期间的亚临界扩展	(36)
疲劳裂纹扩展的连续监视	(36)
疲劳裂纹扩展的间歇监视	(37)
应力腐蚀研究	(40)
氢脆	(43)
4. 柔度测量法	(48)
4.1 符 号	(48)
4.2 引 言	(48)
4.3 对线性断裂力学的应用	(49)
4.4 g_I 与 K_I 间关系	(50)
4.5 试验程序要点	(50)
4.6 实 例	(51)
试件说明	(51)
柔度传感器	(51)
实验程序	(51)
计 算	(52)
测量注意事项	(52)
测试仪器	(53)
摩擦效应	(53)
数据处理	(54)
4.7 关于位移的测量	(55)
4.8 几种已报导的结果	(55)
4.9 概 括	(59)
5. 试验系统以及有关测试装备	(62)
5.1 引 言	(62)
5.2 闭路系统	(63)
拉-压试验	(63)
加压试验	(63)
5.3 试验的程序	(65)
5.4 数据的读出	(66)
5.5 所需各试验系统中的基本不同点	(66)
引 言	(66)
硬系统和软系统	(67)
试验上的问题 (根据 Irwin)	(71)
裂纹扩展的阻力 (根据 D.P. Clausing)	(72)
稳定的撕裂	(72)
不稳定的撕裂	(72)
大尺寸试验的需要	(73)

利用共振作极大尺寸的试验·····	(75)
包含环境调节室的断裂力学试验·····	(76)
一种简化的断裂力学试验·····	(76)
5.6 切口处开裂过程的监测·····	(77)
引 言·····	(77)
涡(电)流探头(带有举高补偿)·····	(78)
5.7 试验的不同组成部分的自动化·····	(79)
完全自动化的计算机控制断裂力学试验·····	(79)
利用连续裂纹长度信号的裂纹扩展·····	(79)
5.8 概括和结论·····	(80)
6. 光弹性技术 ·····	(81)
6.1 引 言·····	(81)
6.2 二维静态光弹性学·····	(82)
等色线分析·····	(82)
热弹性学分析·····	(83)
6.3 动态光弹性学·····	(85)
动态光弹装置·····	(85)
动态应力强度因子·····	(87)
6.4 三维光弹性学·····	(89)
6.5 译 注·····	(91)

1. 序 言

Albert S. Kobayashi

虽然在许多世纪中都发生了结构构件的奇特的脆性断裂,而最常引用的一个经典例子却是1919年元月15日中午在波士顿(美国麻省)发生的糖汁贮存罐的断裂^[1]。从罐中流出达2,300,000加仑糖汁,造成12人死亡,40人受伤,淹死了一些马。当时的一些著名科学家考查了这个事故,但所得结果未能令人信服。自此以后,严重的断裂问题在飞机、大型转子、装甲车辆、大炮、贮存罐、承压容器、管道、焊接船舶^[2]和宇航结构^[3]中都有发生。

这种表现为丧失财产、人的生命甚至国家威望和安全的突然断裂潜在的灾难引起了对断裂现象的研究。在关于断裂研究的科目中,被称为断裂力学的一类方法已经发展到可以使用于金属构件的高等设计以及断裂破坏研究的地步。读者可参阅断裂方面的一个新近论著^[4],它以七卷篇幅对断裂力学进行的详细研究包罗了全部领域。

除本章所引用的文献以外,最新的资料都发表在下面两种主要刊登断裂力学题目的期刊里:International Journal of Fracture Mechanics, (Walters-Noordhoff出版)和International Journal of Engineering Fracture Mechanics (Pergamon Press出版)。

此外,断裂力学方面的技术论文还经常出现在下列刊物中:Experimental Mechanics, SESA, Journal of Basic Engineering, Transaction of ASME; Materials Research and Standards ASTM和Journal of Materials, MSTM。

全世界的技术和专业团体为了研究有关断裂问题的特殊目的已组织起各种委员会和专业力量。其中最活跃的是隶属于ASTM的一个组织the Committee E-24 on Fracture Testing of Metals。这个委员会分为六个分会,对诸如断裂力学试验方法、断裂摄象术和显微结构、动态实验方法、亚临界裂纹扩展、专门术语和定义以及应用等方面的问题进行研究。

这本SESA专题论文集的目的是把分散在上述许多刊物和委员会报告中的有关断裂力学的实验技术汇编成几章。包含在这第一个专集中的材料是想用来就原理、程序、应用以及实验断裂力学中现今使用的某些基本实验技术的条件限制等方面提供知识。标准的实验细节如断裂试件形状和加载程序,都在ASTM的专门刊物^[5-9]中详细描述,因此在这个专集中不再多费篇幅。当然,我们希望以限制每个题目篇幅的办法而使读者仍然能够对断裂力学的代表性实验技术获得初步的了解,然后转到这里为适应他特殊需要而辑录的专题文献。所以这本专集主要是为断裂力学入门者而写的,但也包含了一些适合于这方面专家的新颖内容。

在这个专集中包含五个主要方面。这些方面是(1)断裂力学理论;(2)声发射技术;(3)柔度测量;(4)试验系统和有关的测试装备;(5)光弹性技术。按照这些章节的顺序,在第二章里向读者提供了断裂力学方面的一些理论依据,在第三章里读者可以学习一种在探测断裂起始方面显示巨大能力的实验技术,在第四章里研究一种决定应变能释放率的实验技术,在第五章里向读者讲授在设计断裂试验的试验系统时某些意外的问题,在第六章里向读者介绍决定应力强度因子的光弹性技术。

有限单元分析作为广义的实验工具也被包含在第二章里, SESA最近把任务扩大到包括有限单元分析方法的课题也是这种想法的反映。在这个专集中强调了这种计算方法与实验技术之间相互补充的作用。

文 献

1. Shank, M. E., "A Critical Survey of Brittle Fracture in Carbon Plate Steel Structure Other Than Ships," published by Welding Research Council of the Engineering Foundation, New York(1954). See also ASTM STP 158,45(1954).
2. Liebowitz, H., ed., *Fracture, an Advanced Treatise*, 5, Design of Structures, Academic Press(1969).
3. Tiffany, C.F., and Masters, J.N., *Applied Fracture Mechanics*, ASTM STP 381, 249-278(1965).
4. Liebowitz, H., ed., *Fracture, an Advanced Treatise*, 1-7, Academic Press(1969, 1970).
5. *Fracture Toughness Testing and Its Application*, ASTM STP 381(1965).
6. *Plane Strain Crack Toughness Testing at High Strength Metallic Materials*, ASTM STP 410(1966).
7. *Fatigue Crack Propagation*, ASTM STP 415(1967).
8. Brown, W.F., Jr., ed., *Review of Developments in Plane Strain Fracture Toughness Testing*, ASTM STP 463(1970).
9. *Damage Tolerance in Aircraft Structure*, ASTM STP 486(1971).

2. 断 裂 力 学

Albert S. Kobayshi

2.1 引 言

在远低于结构材料屈服应力的承载条件下, 结构的破坏往往归因于结构中的裂纹或类似裂纹的疵瑕。这样的破坏表明, 常规的结构强度分析不论做得如何精确, 仅靠它还不足以保证结构在工作条件下的完整性。把裂纹扩展的性状看做所加载荷的函数而对结构进行的研究, 就称谓断裂力学。特别是在裂纹或疵瑕周围不出现大的塑性屈服区时, 这种研究便属于线性断裂力学。

作为过去十年中大力研究的成果, 线性断裂力学现在已经可以用来解决有关破坏分析、材料选择、判断结构寿命和接受性试验的许多实际工程问题。如果断裂发生在结构构件大范围屈服以前, 那么借引入不同塑性修正因数的办法, 线性断裂力学也可以推广应用来解决包括中等程度塑性屈服的问题。文献⁽¹⁾中给出了断裂力学发展史的一个很好回顾, 从1900年发表Ludwik的论文开始, 经过Inglis, Griffith, Stanton和Batson, Doherty, Westergaard, Sneddon, Sach, Fisher和Holloman, Irwin, Orowan, Irwin和Kies, Wells, 直到1957年发表Williams的论文为止。

线性断裂力学的基础是Griffith的那篇论文⁽²⁾, 它在三十年间未被认可。1921年提出的

最初的Griffith理论是这样阐述的：一个脆性材料即玻璃的物体承载如图 2.1 所示。当该物体內一个裂纹表面面积 A 扩大到 $A + \delta A$ 而

$$|\delta U_o| > |\delta U_{st}| \quad (2.1)$$

时便发生破裂，式 (2.1) 中

δU_o = 由裂纹表面面积增加 δA 引起的位能减少量，

δU_{st} = 由裂纹表面面积的增加引起的表面能增加量。

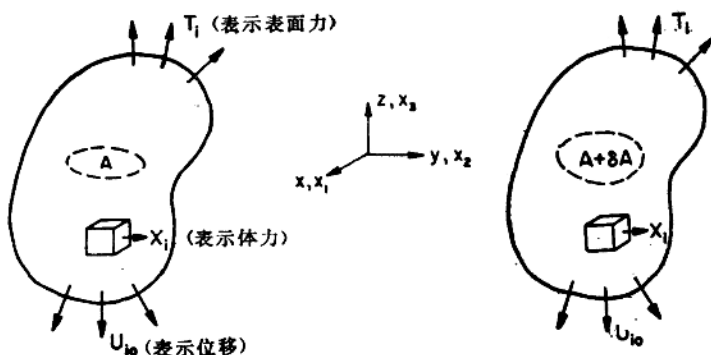


图2.1 带有扩展中裂纹的弹性体

以上包含能量增加的诸项是对裂纹表面面积增量 δA 计算的，因此以后带 δ 的诸量都是指变化率*。

Irwin^[3]和Orowan^[4]相继改进了最初的Griffith理论，借增加一个含有裂纹端周围塑性区内塑性能消散率的项而使这个理论能应用于金属情况。总能量平衡中的改变，包括了输入能量的改变以及由裂纹表面面积增加 δA 引起的消散能量的改变，并可表示为

$$\delta W + \delta U_o \geq \delta U_{st} + \delta P \quad (2.2)$$

其中 δW = 外加功的增加率，

δP = 塑性能消散的增加率。

Irwin 认为塑性能消散率比表面能消散率大得多，因而提出把后者忽略不计。于是 Griffith-Irwin 理论指出，当输入能量的变化率 $\delta W + \delta U_o$ 超过了塑性能消散的变化率时，不稳定性出现，而裂纹将迅速扩大。在常值位移边界条件下，即在通常所指的断裂试验中固定卡头加载条件下，对于试验系统没有附加功或 $\delta W = 0$ 。这时由方程 (2.2) 表示的稳定性判式变为

$$\delta U_o \geq \delta P \quad (2.3)$$

由此易于证明，不论是在固定卡头条件或固定载荷条件，还是在二者组合的条件下，对于裂纹的一个无限小扩展来说，输入能量的变化率都与所加载荷无关^[4]。因此，这个输入能量的变化率就是通常所指的带裂纹物体內裂纹表面单位面积增量上的应变能释放率 g 。**

Irwin 还认为塑性能消散的变化率 δP 是一个材料性质，这个性质可以由断裂起始时的标

* 本书所说 δ 变化率实际上是指变化量。因而 δW 的量纲是[功]，而不是通常概念中的[功率]——译注。

** 按照上面的定义，这个输入能量的变化率应为 g 与无限小面积增量 δA 的乘积——译注。

准化试验或是在方程(2.3)中取等号来确定。由于方程(2.3)左端 δU_0 依赖于加载条件和裂纹几何形状,所以线性断裂力学的问题就化为对不同裂纹问题来决定 δU_0 的边值问题。

上述Griffith关于能量平衡的理论和Irwin与Orowan对它的相继修正是断裂起始的必要条件^[5]。就这一点说,Griffith理论还不能很方便地说明断裂试验中观察到的所有型式的断裂。因此Irwin提出了用裂尖端局部应力场代替总输入能量变化率来作这种说明^[6]。

上述 δU_0 同局部应力场之间的关系可由逆问题的考虑来得到,在逆问题中,如图2.2所示的二维裂纹上一小段 δx 被用施加作用力 $\delta y y^*$
($-\delta x, 0$)于裂纹表面的办法而使之闭合。在这个逆向加载问题中总应变能吸收率等于输入能量的变化率 δU_0 ,而后者本身又等于裂纹扩展 δx 的过程中释放的应变能,即

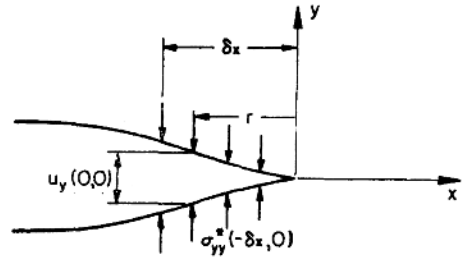


图2.2 裂纹端的闭合

$$\delta U_0 = g \cdot \delta x = \int_0^{\delta x} u_y(0,0) \cdot \sigma_{yy}^*(-\delta x,0) dx \quad (2.4)$$

其中 $u_y(0,0)$ 为裂纹由 $x-y$ 坐标原点起闭合一段长度 δx 时的裂纹闭合位移。

另外再假定裂纹端前方的塑性屈服区并未使应力状态发生显著变化,于是 $u_y(0,0)$ 和 $\sigma_{yy}^*(-\delta x,0)$ 就可以用弹性位移和弹性应力来确定,而这些位移和应力则通过裂纹端邻近的已知弹性状态得到。特别是 $u_y(0,0)$ 就是裂纹端位于坐标原点 $(0,0)$ 时的裂纹闭合位移, $\sigma_{yy}^*(-\delta x,0)$ 则是相关的闭合应力,它等于裂纹端前方 $(-\delta x,0)$ 处的正应力。这样一来,线性断裂力学的全部问题就可以化为线性弹性问题。

在下面几节里将说明如何应用线弹性理论导出断裂力学的某些关系。这里我们对线性断裂力学中某些有用的理论结果提出了一个梗概,其目的是要读者对阅读这个专集的各主要章节有所准备。至于更完全的内容,读者可参阅文献^[6-9]。

2.2 二维问题

Westergaard 应力函数

Airy 的应力函数是用来求解二维边值问题的双谱应力函数,它可以用复变量表示为

$$\phi_1 = \operatorname{Re} \bar{Z}_1 + y \operatorname{Im} \bar{Z}_1 \quad (2.5)$$

其中 $\bar{Z}_1 = -\frac{d\bar{Z}_1}{dZ}$, 而 $Z_1 = -\frac{dZ_1}{dZ}$

$$Z = x + iy$$

上述复变函数 $Z_1(Z)$ 就指的是 Westergaard 应力函数,常用它来求解有裂纹的结构中的二维问题。由式(2.5)定义的 Airy 应力函数和 Westergaard 应力函数中的下标 1 代表图 2.3* 所示的“张开型”或“Ⅰ型”裂纹端变形。相关的应力分量为

* 译注:原书中图 2.3 和图 2.4 相互错位,现已改正。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1' \\
 \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1' \\
 \sigma_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1' \\
 Z_1' &= \frac{dZ_1}{dZ}
 \end{aligned}
 \quad (2.6)$$

其中

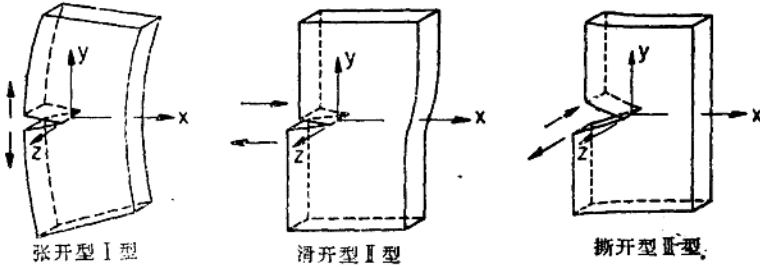


图2.3 邻近裂纹端的局部状态

还可以证明, 在图 2.4 中所示裂纹端位于 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$ 而具有 I 型裂纹端变形的情况, Westergaard 应力函数可以表示为

$$Z_1 = \frac{g(Z)}{\sqrt{Z^2 - a^2}}, \quad (2.7)$$

其中 $g(Z)$ 是一解析函数, 依赖于平板的外缘几何形状和有关的边界条件。易于证明, 对于均匀应力 σ 作用于无限大平板的情况, $g(a) = \sigma a$ 。

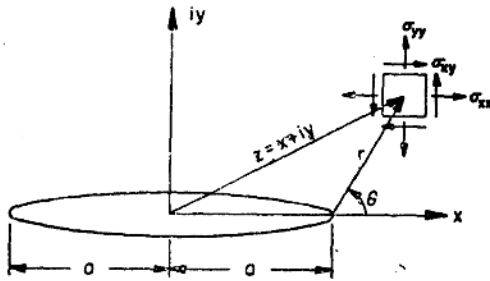


图2.4 裂纹端变形的型式

如果我们仅限于考察图 2.4 中所示裂纹端邻近的小区域并且以局部极坐标系 r 和 θ 表示所有的应力和应力函数, 则 Westergaard 应力函数变为

$$Z_1 = \frac{f(\rho)}{\sqrt{\rho}} \quad (2.8)$$

其中 $\rho = re^{i\theta}$, 而当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 对应于张开型的复变解析函数 $f(\rho)$ 趋近于实常数 $K/\sqrt{2\pi}$, 其中 K 为张开型的应力强度因子, 定义为

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy}(r, \theta = 0) \cdot \sqrt{2\pi r} \quad (2.9)$$

以局部坐标表示的局部应力为^[9]

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos\theta/2 \left[1 - \sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos\theta/2 \left[1 + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (2.10)$$

在平面应力状态下, 沿 x, y 方向的位移分量成为

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{K}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2\frac{\theta}{2} \right] \\ u_y &= \frac{K}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{1+\nu} - \cos^2\frac{\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (2.11a)$$

其中 G = 剪切模量,

ν = 泊松比。

在平面应变状态下, 位移分量成为

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2\frac{\theta}{2} \right] \\ u_y &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu - \cos^2\frac{\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (2.11b)$$

附加于张开型应力强度因子 K 的下标 I 表示在讨论只限于拉伸断裂时的平面应变状态。然而对滑开型即 II 型裂纹端变形^{*}却无此规定, 这时平面应力状态和平面应变状态的应力强度因子二者都表为 K_{II} 。

建立了裂纹端邻近的位移和应力状态以后, 因裂纹扩展引起的应变能释放率即可根据离裂纹端为 r 处算出的已知 $u_y(0,0)$ 和 $\sigma_{yy}*(-\delta x,0)$ 来决定, 后二者的表达式为

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{yy}*(-\delta x,0) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(\delta x - r)}} \\ u_y(0,0) &= \frac{2(1-\nu)}{G} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r}\end{aligned} \right\} \text{(对于平面应变)} \quad (2.12)$$

把式(2.12)代入式(2.4), 得出平面应变状态下因裂纹扩展 δx 而引起的应变能释放率

$$\delta U_o = g_I \delta x = \frac{1-\nu}{G} K_I^2 \int_0^{\delta x} \sqrt{\frac{r}{\delta x - r}} dr = \frac{1-\nu}{2G} K_I^2 \delta x$$

其中 g_I 是在平面应变条件下的应变能释放率。应变能释放率这个特征量也称为平面应变状态的裂纹扩张力, 它可以表示为

^{*} 参看图 2.3

$$g_I = \frac{1-\nu}{2G} K_I^2 \quad (2.13)$$

在上式中用 $\nu/(1+\nu)$ 代替 ν ，可以得到“平面应力状态”的应变能释放率，即 $g = K^2/E$ ，其中 E 为弹性模量。

塑性能消散率，根据 Griffith-Irwin 理论，是一个材料常数。现在可以用另一个相当的材料常数来代替它，这个常数就是快速断裂起始时的临界应变能释放率或 g_{Ic} 。由方程 (2.13) 可见，应力强度因子 K_I 是与 g_I 直接关连着的，因而 Griffith-Irwin 理论可以通过应力强度因子 K_I 重新表述，而 K_I 在快速断裂起始时变为材料常数 K_{Ic} 。这个临界应力强度因子 K_{Ic} 表示了材料的断裂韧性，它的量纲是应力 $\cdot \sqrt{\text{长度}}$ 。

对于 I 型裂纹变形这种“滑开型”情况，Westergaard 应力函数 Z_I ，以及应力分量和位移分量，都可以由一些与式 (2.6) 到 (2.11) 相当的式子来表示。例如，对于滑开型情况，Airy 应力函数写成形式^[8]

$$\Phi_I = -Y \operatorname{Re} \bar{Z}_I \quad (2.14)$$

对于有限小的 ρ 值，用图 2.4 中所示局部极坐标系表示的应力分量成为

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{-K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

同时，在平面应力状态下，位移分量成为

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ u_y &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.16a)$$

在平面应变状态下，则为

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ u_y &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.16b)$$

其中对应于 I 型裂纹端位移的应力强度因子也可以得到如下

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{xy}(r, \theta=0) \cdot \sqrt{2\pi r} \quad (2.17)$$

在 I 型变形情况应变能释放率采取与方程 (2.13) 相同的形式：

$$g_I = \frac{1-\nu}{2G} K_I^2 \quad (2.18)$$

除去上面两种裂纹端变形的型式以外, 还有一种“撕开型”, 即图 2.3 所示的 III 型变形。这种变形型式是由于在扭转加载中可能局部产生的离平面剪切。在这种裂纹端变形情况下, 用一个离平面的扭曲函数 $\omega(x, y)$ 来代替 Airy 应力函数更加方便, 前者是一个满足应力平衡方程的简谐函数。选择位移函数为 $\bar{Z}_{III}$, 则有

$$w = -\frac{1}{G} I_m \bar{Z}_{III} \text{ 和 } u_x = u_y = 0. \quad (2.19)$$

同样, 对于小的 ρ 值, 以局部坐标表示的应力和位移分量成为^[8]

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

和

$$u_z = w = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.21)$$

其中应力强度因子 K_{III} 可以由下列熟知的形式来决定:

$$K_{III} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sigma_{yz}(r, \theta = 0) \cdot \sqrt{2\pi r} \quad (2.22)$$

比较一下式(2.5), (2.14) 和 (2.19), 可以看出, 对于裂纹端变形的三种型式, 都能用 westergaard 应力函数 Z 来求解几何上相似的问题。最后, 应该注意到, 直到现在为止, 所述断裂力学理论都是根据了线弹性理论, 因此对于具有等同几何形状和同样裂开型式的其他边值问题, 应力函数可以迭加。因而对于相同的裂纹变形型式来说, 相应的应力强度因子可以迭加为

$$\begin{aligned} K_I &= K_{I1} + K_{I2} + \cdots + K_{Im} \\ K_{II} &= K_{II1} + K_{II2} + \cdots + K_{IIn} \\ K_{III} &= K_{III1} + K_{III2} + \cdots + K_{IIIp} \end{aligned} \quad (2.23)$$

其中 m, n 和 p 都是正整数。

另一方面, 裂纹扩张力是一个包含着应变能释放率的标量项, 因而对于不同型式的裂纹变形, 平面应变情况的裂纹扩展力可以迭加为

$$\begin{aligned} g &= g_I + g_{II} + g_{III} = -\frac{1-\nu}{2G} K_I^2 + -\frac{1-\nu}{2G} K_{II}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Muskhelishvili 应力函数

Muskhelishvili 应力函数^[10]适宜于用共形映射法求解边界值问题, 该函数已被广泛地用来决定各种二维问题中的应力强度因子。Muskhelishvili 应力函数由两个解析函数 $\Phi(Z)$ 和 $X(z)$ 组成, 后者和 Airy 应力函数 $\Phi(x, y)$ 的关系为

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z} \cdot \Phi(z) + x(z)] \quad (2.25)$$

其中 $\bar{z}$ 表示 z 的共轭复变量。于是, 平面应变情况的应力和位移状态可以表示为

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4\operatorname{Re}\{\Phi'(z)\} \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + i2\sigma_{xy} &= 2(\bar{z}\Phi''(z) + \chi''(z)) \\ u_x + iu_y &= \frac{3-4\nu}{2G}\Phi(z) - \frac{1}{2G}(z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}))\end{aligned}\quad (2.26)$$

采用图 2.4 所示的极坐标系并经过适当的近似处理, 可将这些方程简化为由方程 (2.10) 和 (2.11) 及 (2.15) 和 (2.16) 所表示的近场解。

如果仅关心于应力强度因子, 则无须确定整个应力和位移状态, 这是因为复应力强度因子可以表示为

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Phi'(a+\rho) \quad (2.27)$$

其中 a 表示裂纹端在图 2.4 中所示 x 轴上的坐标。所以, 为确定 K_I 和 K_{II} , 仅需知道第一个函数 $\Phi(z)$ 。

把长为 $2a$ 的一个直裂纹映射于 $\xi-\eta$ 平面上单位圆的映射函数可以表示为

$$Z = \omega(\xi) = \frac{a}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) \quad (2.28)$$

其中 $\xi = \xi + i\eta$ 。

由方程 (2.28) 可以看出, 裂纹端位置 $z = \pm a$ 现在被映射为 $\xi = \pm 1$ 。用来确定应力强度因子的方程 (2.27) 从而变为

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \Phi'(\xi) \Big|_{\xi=1} \quad (2.29)$$

例如, 具有直裂纹并受有均匀拉伸应力 σ 的无限大平板的解可以用 Muskhelishvili 应力函数表示, 这时函数的第一部分是

$$\Phi(z) = \sigma\sqrt{z^2 - a^2} = \frac{\sigma a}{2}(\xi - 1) \quad (2.30)$$

而应力强度因子成为

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\pi} \sigma \sqrt{a} \quad (2.31)$$

对于受有均匀剪应力 τ 的无限大平板情况, Muskhelishvili 应力函数的第一部分是

$$\Phi(z) = i\tau\sqrt{z^2 - a^2} = i\frac{\tau a}{2}(\xi - 1) \quad (2.32)$$

而应力强度因子成为

$$K_I - iK_{II} = -i\sqrt{\pi} \tau \sqrt{a} \quad (2.33)$$

有限单元方法

如上节所述, 把断裂力学应用于实际工程问题所需要的应力分析资料是由实际裂纹和可能裂纹的应力强度因子构成的。不巧的是, 除去有限数量的简单问题以外, 上面所引用的分析方法并不能找出大多数有裂纹的表面的应力强度因子。在断裂力学对于容许误差为 5—10% 的大多数工业应用中, 实际二维问题的数值解比起仅仅近似于实际条件的理想化问题的冗长精确解来显得更加合宜。在工业中已经广泛采用的数值解法就是在各种教科书中所描述

的有限单元分析方法(例如, 参看文献11)。然而有限单元分析应用于断裂力学中的二维问题还是新近的事, 因而需要比较细致地讲一讲。

理论依据 用局部坐标表示的裂纹端邻近的弹性应力状态, 可以由应力方程(2.10)和(2.15)*的线性迭加来得到, 即

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ &\quad - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (2.34)$$

对于平面应力情况, 裂纹端邻近的位移状态可以由这种情况的位移方程(2.11a)和(2.16a)的线性迭加表示为

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{K}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\ &\quad \cdot \left[\frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ u_y &= \frac{K}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[-\frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \\ &\quad \cdot \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (2.35)$$

如果裂纹端邻近的应力或位移状态能以正常的精确度确定出来, 则应用方程(2.34)或(2.35)即可算出应力强度因子。因此, 在这些方程都是正确的区域内, 有限单元分析必须给出足够精确的应力或位移状态。作为一个熟知的经验规则, 这个局部区域已经限定为 $r < (a/20)$, 其中 a 是一个直裂纹的半长。裂纹张开位移(COD)的简单计算表明, 沿裂纹边界(或 $\theta = \pi$)这一限制可以大大放宽, 还表明在单轴拉伸、中心有切口的无限大平板情况下, 当 $r = a/5$ 时, 用方程(2.35)算出的COD可能超过精确值5%。对于有限单元分析中确立最小网格尺寸来说, 把方程(2.34)或(2.35)适用的局部区域大小的限制这样地放宽是特别重要的。

* 译注 按原书此处还有“以及表示平面应力位移方程(2.11a)和(2.16a)”一段文字。根据文中的意义, 已将这一段文字移至下一段中。

最近, Watwood^[12] 及 Deverall 和 Lindsey^[13] 曾经指出, 能够以 1—3% 的精确度算出裂纹扩展时应变能释放率来确定应力强度因子。基本的程序是先对给定的裂纹几何形状计算出应变能的总储存量, 然后再算出该裂纹小量扩展后的应变能总储存量。两个总应变能之差 ΔU 。除以该裂纹在这两个长度时的表面面积之差 ΔA , 将给出应变能释放率 g , 即

$$g = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} \quad (2.36)$$

这个程序的优点在于所要求的裂纹端处最小网格尺寸可以放宽而不降低精确度。本章作者的新近著作中也肯定了这个论点^[14]。

数值程序 为确定计算应力强度因子的最佳程序, 我们考虑图 2.5 中所示中心带有切口的有限宽度受拉板。为进行疏网格分析, 这个板的四分之一先被分成 339 个矩形单元。在这个图中法向位移和切向力均取零值的对称线, 由滚柱代表。利用疏网格分析的结果, 对裂纹端部再进行密网格分析, 对于这部分采用上述疏网格分析时建立的力——边界条件。在这密网格分析中采取了 798 个单元。按照裂纹长度对板厚度之比 a/b 的每个值, 分别确定出图 2.5 中

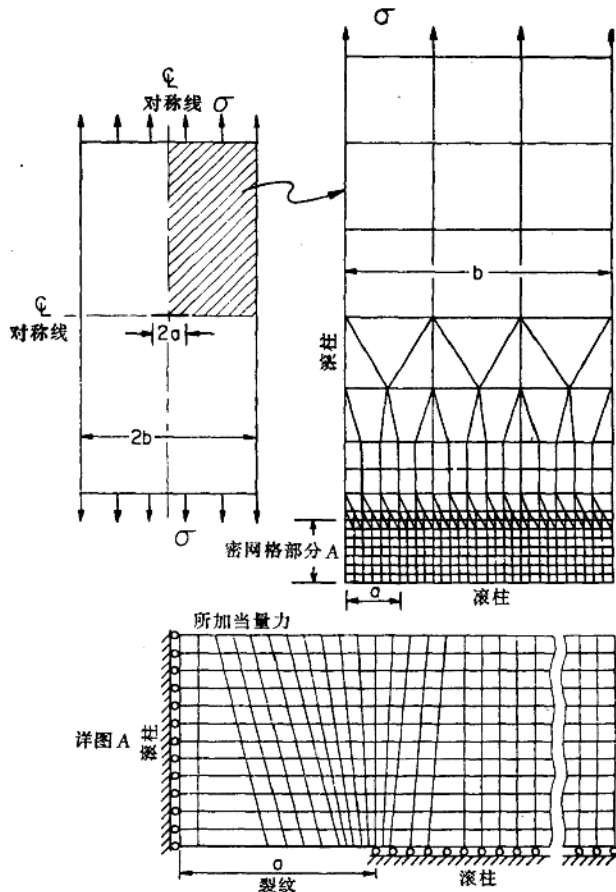


图2.5 单向受拉的中心带裂纹的板

详图 A 上裂纹端周围密网格的尺寸, 使得在所考虑的每个裂纹长度下的最小网格尺寸都小于 $a/10$ 。所用的计算机程序是从华盛顿大学计算机中心取得的直接刚度方法中的标准程序。在 IBM7040—7094 系统上进行疏网格和密网格分析的标准算程分别为 3.5 和 6.5 分钟。方程 (2.34) 和方程 (2.35) 两者都曾分别用来计算这个问题中的应力强度因子。

在使用方程 (2.34) 的应力作计算时发现应力强度因子被算低了大约 10—15%，这主要是由于有限单元分析法在处理具有象裂纹端部那样陡的应力梯度问题时缺乏有效性。这个误差部分地由于所用的刚度矩阵是在均匀应变的基础上导出的, 而在基本有限单元中则是均匀应力。

另一方面, 如果利用方程 (2.35) 的位移来作计算, 则当采用对裂纹端部的几个结点算出的应力强度因子中的最大值时, 这方法就给出合理的结果。图 2.6 示出了位移法中利用 COD 算出的应力强度因子同用分析法得到的应力强度因子的比较⁽¹⁵⁾。回忆起来, 直接刚度法通过刚度矩阵的应用可从已知的结点力求出未知的结点位移, 对于这种方法来说, 用 COD 来代替应力应该是很自然的。

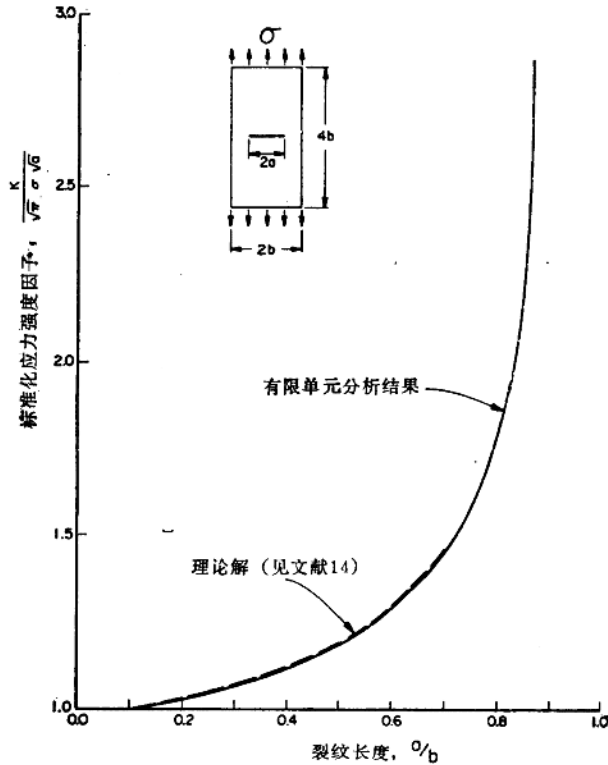


图 2.6 承受单轴拉伸、中心带裂纹的有限大板的应力强度因子

图 2.6 中的理论解仅仅延伸到 $a/b = 0.7$, 因此对 $a/b > 0.7$ 的情况还不能就现有结果的精确度做出确定的评价。用应变能释放率法, 亦即用方程 (2.36) 进行的类似计算⁽¹⁴⁾, 也给出图 2.6 中所示的相同结果。从我们用有限单元法进行结构分析的经验来看, 没有什么理由相

信在 $a/b > 0.7$ 的区域不能保持相同的精确度。

下面叙述了用有限单元分析方法解决的有关二维断裂力学的两个实际问题。在这两种情况下，尚不能用其他现有的分析方法来求解。

承受内压、外表面带疵的圆筒 在承压容器中常看到的疵瑕是在容器壁外表面上的^[16]。这种带疵筒壁代表了断裂力学中的一个三维问题，它将在下面叙述。尽管这样，筒壁的最大应力强度因子却往往可以借二维分析来计算。穿透承压圆筒整个壁厚的裂纹的应力强度因子已在过去确定^[17]，但对于承压圆筒外表面裂纹的情况，还没有应力强度因子的解。对于外表面裂纹很长的情况，裂纹底部的最大应力强度因子可以由图 2.7 中所示的二维模型近似地得出。图 2.8 给出了在厚度-半径比的三种情况下无量纲形式的应力强度因子以及单侧切口拉伸薄条的应力强度因子。圆周约束弯曲以及周向应力非线性分布的影响，可能就是这些结果同 Gross 结果间显著差异的原因^[18]。

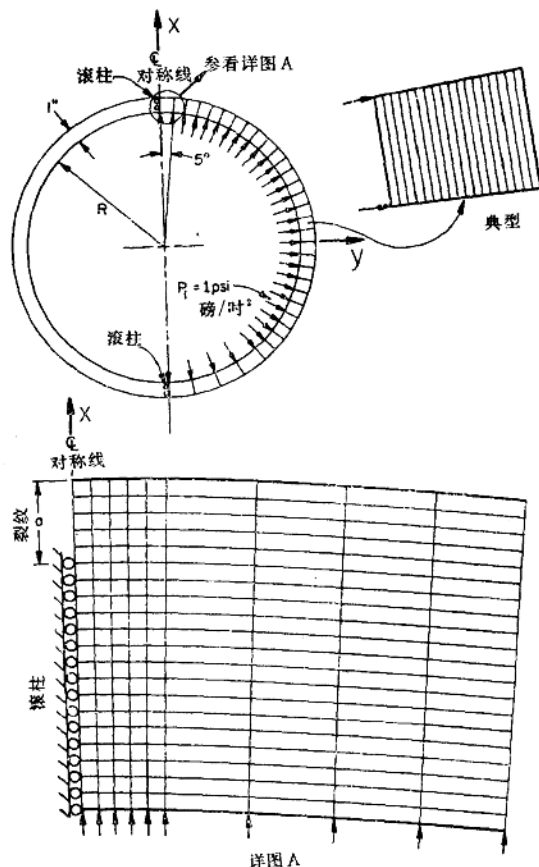


图2.7 承受内压、外表面带疵的圆筒

单轴拉伸板内的倾斜裂纹 在疲劳问题中人们往往遇到由于加载条件改变而改变了方向的裂纹。如图2.9所示有限宽的板内斜裂纹的应力强度因子仅能用数值方法得到。在这个问题中有两种型式的裂纹端变形，即张开型和滑开型，因此需要确定出 K 和 K_{II} 。参考方程(2.35)