《概率论与数理统计教程》
习 题 解 答

华东师范大学数理统计系

《概率论与数理统计教程》
习 题 解 答

华东师范大学数理统计系

一九八五年

目　　录

概率论习题解法探讨

何 声 武

随着科学技术的发展，概率论与数理统计在众多的学科（包括自然科学与社会科学）及生产实际部门中得到了越来越广泛的应用。特别是随着我国经济建设迅猛的发展，这方面的要求越来越多。与此相适应，"概率论与数理统计"不仅成为大学数学系的一门基础课程，而且在理、工、医、农以至文科的一些系科中也相继设置这门课程。在中学数学教学改革中，国外许多中学数学教材中都在不同程度上列入了这一内容，或者专门作为一门课程设置，在数学竞赛中也包括概率方面的题目。在我国，现行数学教学大纲也已规定在中学阶段要学习一些关于概率统计的初步知识。但是，这门课程的设置，或者把其中某些内容安排在中学学习，毕竟历史较短，因此对概率论与数理统计的教学，从教材到教学方法，积累经验并进行广泛的探讨是一项很值得重视的研究课题。概率论习题的解法与讲解就是其中的一个值得探讨的问题。

历来形成这样一种片面的看法，认为概率论的习题十分困难（虽然也很有趣），不易掌握规律，甚至新学这门课程的学生尚未入门先有此见，这在一定程度上对教学产生了不良的影响。事实上，与任何一门数学课程一样，概率论的习题就基本部份来讲并不特别困难。问题在于概率论是处理随机现象的，其处理方法与其它数学学科很不一样，解决问题时更着重概念与思路，学生一下子不易掌握。然而概率论也有其突出的优点，那就是有

非常强烈的直观意义，有利于理解与想象。因此在做概率论习题时适当地予以指导，逐步懂得与运用概率论的特点，对教师与学生都是有一定帮助的。本文试图通过一部份典型习题的分析，介绍一些解概率论习题的有用方法。这些方法大多体现了概率论本身的一些特点。解法上有一定共同点的几个习题合成一节，但各节前后并没有严格的连贯性。事实上，这些习题的选取有很大的片面性，不仅没有全面地包括各种类型的习题（特别是基本的习题），而且内容上也不完整（例如没有大数定律与极限定理方面的习题），有特色的解题方法没涉及的很多。从某些习题的难度与深度来说，也许是高了些，但从扩大眼界与开阔思路的要求看，可能还是有用处的。

一、古典概型中样本空间的选取

古典概型是初等概率论中最基本的内容之一。刚开始学习概率论时，大部份的习题就集中在这部份。由于在古典概型的习题中大量运用排列组合方法，而排列组合的灵活性相当大，因此主要也是在这里给学生开始造成概率论习题难做的印象。作者认为应从两个方面来解决这个问题。首先应注意在教学中不能大量选用只是单纯计算排列组合的习题，不能使重在掌握排列组合的计算技巧超过重在掌握概率论的基本概念；其次在解题时对概率性质的运用要予以充分的注意，我们将会看到，注意了这点，复杂的排列组合的计算也是可以避免的。

设一个随机试验的全部可能结果（样本点）只有有限个：ω_1，ω_2，…，ω_n，其中每一个结果出现的可能性都相同（等可能性），即 $P(\omega_1)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$。一个随机事件可表示为样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 的一个子集 A，且它的概率为 $P(A)=\frac{k}{n}$，

其中 k 是 A 所包含的样本点个数(有利场合的个数)。这就是古典概型。古典概型的习题大多是求某个随机事件 A 的概率。这里应包含两个步骤:第一步是选取适当的样本空间 Ω,使它满足有限,等可能的要求,且把 A 表示为 Ω 的某个子集;第二步则是计算 n(样本点总数)及 k(有利场合的个数)。只是在第二步因为要计数才使排列组合起到重要作用。(也应注意在简单的问题中,计数只需枚举,排列组合也不必用。我们常会遇到这样的学生,他认为算概率必用排列组合,碰到不必用排列组合的简单问题反而做不来了。)人们往往重视第二步而忽视了第一步。在这一节中我们将通过一些例子着重谈谈重视第一步对解题的意义。

〔例 1〕 n 个朋友随机地围绕圆桌而坐,求其中甲、乙两人坐在一起(座位相邻)的概率。

〔解〕 很自然会把这个问题看作园周排列的一个简单应用,但我们不用这种办法。设甲已先坐好,考虑乙怎么坐法。显然乙总共有 $(n-1)$ 个位置可坐,这 $(n-1)$ 个位置都是等可能的,而有利场合,即乙坐在甲的边上,有二个,因此所求概率为 $\frac{2}{n-1}$。

如把上述解法作细致的分析,那就是我们取样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}\}$, ω_i 表示乙坐在甲左边第 i 个位置上,它满足有限与等可能的要求,我们要求概率的事件 A 表示为 Ω 的子集 $\{\omega_1, \omega_{n-1}\}$。显然,对例 1 这样选取的样本空间 Ω(有限并等可能)是最小的了,再要小的话,事件 A 就"装"不进去,或者就无法保证等可能性了。用其它办法做这道题目选取的样本空间只会更大,比上述解法复杂。值得指出的是在我们的解法中用不到排列组合。

〔**例 2**〕 袋中有 a 只黑球，b 只白球。把球随机地一只只摸出来(不放回)。求第 k 次($1\leqslant k\leqslant a+b$)摸出黑球的概率。

〔**解**〕 这是复旦大学编"概率论"第一册(20 页)中的一个例题。那里提供了两种解法，一种用排列，一种用组合。在该书上也指出了可以有更简单的办法，那就是取样本空间为第 k 次摸出的球的全部可能的结果(形象地说，不要从摸球人的角度看问题，而从球的角度看问题，是哪一个球在第 k 次被摸到)。详细地说，设把($a+b$)个球加以编号，前 a 个球为黑球，后 b 个球为白球。样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{a+b}\}$，$\omega_i$ 表示第 k 次摸出第 i 号球。易见每一个球都可能在第 k 次被摸到，且被摸到的可能性相同。我们要求的是事件 $A=\{\omega_1, \cdots, \omega_a\}$的概率，所以

$$P(A)=\frac{a}{a+b}。$$

看了例 1 之后来理解例 2 的做法是不困难的，因为思考方法完全是一样的。在例 2 中样本空间的取法也是最小的(再小就不能保持等可能性了)。我们为什么能取到最小的样本空间使计算大大简化了呢？读者可以发现，其中关键的一点在于我们抓住了刻划出欲求概率的事件的本质特点，而把无关的因素都丢掉不予考虑了。例 2 的结果是十分重要的，值得把它当作一个基本定理看待，把它牢牢记住，因为不少问题可归结到例 2 所考虑的情形。下面再举一个这样的例子。

〔**例 3**〕 袋中有 a 只黑球，b 只白球。把球随机地一只只摸出来(不放回)，直至袋中剩下的球颜色都相同为止。求最后剩下的全是黑球的概率。

〔**解**〕 设想摸球直到摸完为止，那么"最后全剩下黑球"(事件 A)与"最后摸出的是黑球"(事件 B)是同一回事。这可以这样思考：如果最后全剩下黑球(A 发生)，那么最后摸出的必是黑

球（B 发生，所以 $A\subset B$）；反过来，如果最后摸出的是黑球（B 发生），那么最后剩下同一种颜色的球时必包含这最后一球，所以剩下的必全是黑球（A 发生，所以 $B\subset A$）；因此两个事件相等。现在由例 2，事件 B 就是第 $(a+b)$ 次摸出黑球，所以它的概率为 $\dfrac{a}{a+b}$。

在不少概率论教科书中都把例 3 作为习题，一般的解法是分别计算最后剩下 1 个，2 个，…，a 个黑球的概率再相加。（例如见王梓坤著"概率论基础及其应用"第一章习题 27 的解答提示。）注意到剩下黑球的前面一个球是白球，所求概率为 $\dfrac{1}{C_{a+b}^{b}}\sum\limits_{k=1}^{b}C_{a+b-1-k}^{a-1}$。由上面的解法它应等于 $\dfrac{a}{a+b}$。这样我们也就用概率方法证明了一个组合恒等式：（记 $m=a-1$，$n=b$）

$$C_n^m+C_{n+1}^m+\cdots+C_{n+m-1}^m=C_{n+m}^{m+1}。$$

〔例 4〕 设有 $m\times n$ 个球，其中一个是黑球，一个是白球，其余都是红球。把这 $m\times n$ 个球任意地放入 m 个袋中，每袋放 n 个球。求黑球与白球恰在同一袋中的概率。

〔解〕 这道题目的叙述看似十分复杂，但同样可用前面的方法容易地解决。首先注意到题目所述等价于随机地把 $m\times n$ 个球依次排列（例如第一个袋的球排在最初 n 个位置上，接下来 n 个位置上排第二个袋的球等等），我们只要关心黑球与白球的位置。设黑球已先放好，白球的可能位置共 $(mn-1)$ 个，显然它们是等可能的。有利场合，即白球落入黑球所在的袋中，有 $(n-1)$ 个，故所求概率为 $\dfrac{n-1}{mn-1}$。

上述例题都可以用计算排列组合的方法来做（不难设想，对例 4 这将是很困难的），但是我们充分把握了对古典概率的要

求，做到了不用排列组合而十分简便地得到结果。当然我们的例子是经过有意识的选择的，但这种注重样本空间的选取的思想是很有用的，掌握它也不困难，但却往往不被人们重视。

下面的例子也是与样本空间的选取有关的。

〔例 5〕 任取一正整数，求该数的平方的末位数是 1 的概率。

〔解〕 必须注意的是我们不能把正整数全体取为样本空间，这样的空间是无限的，谈不上等可能了。因此首先要作分析。一个正整数的平方的末位数只取决于该正整数的末位数，它们可以是 $0,1,\cdots,9$ 这十个数字中的任一个。现在任取一正整数的含义就是这十个数字是等可能地出现的。换句话说，取样本空间 $\Omega=\{0,1,\cdots,9\}$。欲求概率的事件就是 $A=\{1,9\}$，所以 $P(A)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$。

面对这类题目，学生往往茫无头绪，恐怕这也是与没有真正认识到选取样本空间是解题的第一步有关系的。

二、逆事件公式与加法公式的运用

在计算概率时必须学会充分运用概率的性质，把计算复杂事件的概率化为计算较简单事件的概率。其中关键的是要牢牢掌握求逆事件的概率公式：

$$P(\bar{A})=1-P(A) \tag{1}$$

（$\bar{A}$ 表示 A 的逆事件）和概率的加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{2}$$

事实上，(1)是(2)的推论（在(2)中取 $B=\bar{A}$ 即得(1)）。公式(1)给我们的启示是在计算事件 A 的概率时应先想一想：计算逆事件 $\bar{A}$ 的概率是否更方便些？然后再选择容易的一个做。这一点

通常已被注意到了，但是否足够重视，并在解题时能自觉应用呢？事实是在教学中有强调的需要。

〔例6〕 在分别写有1，2，3，4，5，8的六张卡片中任取两张，把卡片上的两个数字组成一个分数。求所得分数是既约分数的概率。

〔解〕 以A记事件“所得分数为既约分数”，它相当于“所取两个数中至少有一个是奇数”，它的逆事件 $\bar{A}$ 是“所取两个数都不是奇数”。易见求 $P(\bar{A})$ 容易：$P(\bar{A})=C_3^2/C_6^2=\frac{1}{5}$，因此 $P(A)=\frac{4}{5}$。

〔例7〕 设掷 n 次均匀硬币，求出现正面的次数多于反面的次数的概率。

〔解〕 以 A 记事件“出现正面的次数多于反面的次数”。首先注意到，当 n 为奇数时正面次数与反面次数不会相等，因此 A 的逆事件 $\bar{A}$，正面次数不多于反面次数，就是反面次数多于正面次数。由于正、反面地位是对称的（形象地说正、反面是可以互换的），因此 $P(A)=P(\bar{A})=\frac{1}{2}$。在 n 为偶数时，正、反面次数可能相等，且相等的概率为 $C_n^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^n}$。仍用前面的办法，去掉相等的情况就可算得 $P(A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n}\right)$。

如果在计算概率时不是有意识地把逆事件的概率公式作为一个有力的工具，恐怕就难以想到上述例7的解法，更何况在其中的偶数情形，逆事件概率公式的运用又深入一步。易见，这种解法比直接计算要简洁，这点在下面的例子中可看得更清楚。

〔例8〕 设甲掷均匀硬币 $(n+1)$ 次，乙掷 n 次，求甲掷出正

面的次数多于乙掷出正面的次数的概率。

〔解〕 以A记事件“甲掷出正面的次数多于乙掷出正面的次数”。同样考虑逆事件$\bar{A}$：“甲掷出正面的次数不多于乙掷出正面的多数”。注意到甲掷的次数恰比乙掷的次数多一次，$\bar{A}$就是“甲掷出反面的次数多于乙掷出反面的次数”。（更详细些：设甲掷出k次正面，$(n+1-k)$次反面；乙掷出l次正面，$(n-l)$次反面，若$k\leqslant l$，则$n-k\geqslant n-l$，即$n+1-k>n-l$。）同样由对称性，$P(A)=P(\bar{A})=\dfrac{1}{2}$。

在例8中直接计算要复杂得多，但在例7的基础上来看上述例8的解法就不会感到突然了。当然，在例8中关键的地方是假设甲比乙多掷一次。不少学生在看到这个解法后，往往没有充分领会到这一点，就认为这解法在甲掷$(n+2)$次时也应该成立。让提出这种想法的学生彻底搞清甲掷$(n+2)$次的情形是很有好处的，上述解法仍有可用之处（与例7中n为偶数时有点类似），还要用到加法公式。

概率的加法公式（2）是用来计算两个事件中至少发生一个的概率的。用归纳法不难把它推广到n个事件中至少发生一个的场合：

$$
\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{1\leqslant i\leqslant n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\
&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\
&-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\qquad(3)
\end{aligned}
$$

公式(2)或(3)是求概率的一个有力手段，也应大大地强调。

〔**例9**〕 把标有数字1，2，3，4的四个球任意地放入也标有数字1，2，3，4的四个盒子中，每盒放一个球。求至少有一个盒子，它的号码与放进这盒子的球的号码一致的概率。

〔解〕 有的学生看到求“至少有一个…”的概率时，总以为要用逆事件公式去求“没有一个…”的概率。这种观念是错的，现在这道题就不能这么做，而应运用加法公式，以 A_i 记事件“第 i 个盒子的球与盒子的标号相同”，$i=1,2,3,4$。我们要求的是 $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$。由例 2 的结果（把它当作一条定理！）可知，$P(A_1)=\cdots=P(A_4)=\frac{1}{4}$，由同样的推理方法可知

$P(A_1A_2)=P(A_2A_3)=\cdots=\frac{1}{4\cdot 3}$，$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2A_4)=\cdots$

$=\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}$，$P(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$，故由(3)式

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=4\times\frac{1}{4}-6\times\frac{1}{4\cdot 3}+4\times\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}-\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{5}{8}。$$

这个例题可以进一步推广到 n 个球与 n 个盒子的一般情形，这就是著名的“匹配问题”。至少有一对盒子与球配合上的概率为 $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$。

在解例 9 时我们已经指出，不能盲目地用逆事件概率公式，那么应该如何掌握呢？其实这并不困难，只要看一看，究竟 $P(\bar{A}_i)$ 与 $P(A_i)$，$P(\bar{A}_i\bar{A}_j)$ 与 $P(A_iA_j)$ 等等中哪一个容易计算就行了。在例 9 中 $P(A_i)$，$P(A_iA_j)$ 等容易计算，因此用加法公式直接算 $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$，而不去计算 $P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4)$。为了说明这一点，我们再举一个例子。

〔例 10〕 从数字 1,2,…,9 中（可重复地）任取 n 次，求 n 次所取的数字的乘积能被 10 整除的概率。

〔解〕 乘积要能被 10 整除必须既取到数字 5（事件 A），又

取到偶数(事件 B)，所以我们要求 $P(AB)$。易见，不取到 5 的概率 $P(\bar{A})$，不取到偶数的概率 $P(\bar{B})$ 及不取到 5 也不取到偶数的概率 $P(\bar{A}\bar{B})$ 容易算出：

$$P(\bar{A})=\left(\frac{8}{9}\right)^n,\ P(\bar{B})=\left(\frac{5}{9}\right)^n,\ P(\bar{A}\bar{B})=\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

因此，先转到逆事件，再用加法公式：

$$\begin{aligned}P(AB)&=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})]\\&=1-\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}.\end{aligned}$$

三、全概率公式的运用

全概率公式是初等概率论中一个非常有用的基本公式。它是这样叙述的：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间 Ω 的一个分割，即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$（即 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少要发生一个，至多也只能发生一个），则对任一事件 B，成立公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

全概率公式的作用在于：直接求一个较复杂的事件 B 的概率比较困难，但在附加的条件 A_i 下求条件概率 $P(B|A_i)$ 却较容易。自然我们要考虑到全部可能的 A_i，并能求出 $P(A_i)$，这样利用全概率公式就能求得 $P(B)$。可以说这是一种“化整为零”的方法，化复杂为简单的方法。我们要强调的是，使用全概率公式不仅使计算简单了，而且使分析问题的思路变得十分清晰，这点是特别重要的。在任何一本概率论教科书中都有使用全概率公式的例题，下面举几个较困难但有趣的例题，由于使用了全概率公式而使解题的思路十分清晰，从而把题目的难度也大为降低

了。

〔例 11〕 r 个人相互传球，从甲开始。每次传球时，传球者等可能地把球传给其余$(r-1)$个人中的任何一个。求第 n 次传球时仍由甲传出的概率。

〔解〕 以 A_n 记事件“第 n 次传球时由甲传出”，我们要求 $p_n=P(A_n)$。A_{n+1} 发生与否显然与 A_n 发生与否有关系。若 A_n 发生，A_{n+1} 就不能发生了：$P(A_{n+1}|A_n)=0$；若 A_n 不发生，则 A_{n+1} 可能发生，即由第 n 次传球者把球传给甲，因此 $P(A_{n+1}|\bar{A}_n)=\frac{1}{r-1}$。所以由全概率公式

$$p_{n+1}=(1-p_n)\frac{1}{r-1},\quad n\geqslant 1, \tag{4}$$

$$p_1=1,$$

由此解得

$$p_n=\frac{1}{r}\left[1-\left(\frac{1}{r-1}\right)^{n-2}\right],\ n\geqslant 2。$$

(为解差分方程(4)，讨论一般的一阶常系数差分方程

$$x_{n+1}=ax_n+b,\quad n\geqslant 1,$$

用逐次叠代法可解得

$$x_n=a^{n-1}x_1+b(1+a+\cdots+a^{n-2}),\ n\geqslant 2)$$

读者可参阅王梓坤著“概率论基础及其应用”32 页上本题的解法，比较一下就可明瞭用全概率公式思路较为简洁。

象例 11 那样利用全概率公式列出差分方程，然后通过解差分方程求得概率是概率论中常用的一种基本方法。特别当所求概率与正整数 n 有关时往往可用这种方法。在初等概率论的习题中一般遇到的大多是一阶或二阶常系数差分程，它们常常可

以直接求解。

〔例 12〕 掷均匀硬币直至第一次出现接连两个正面为止，求这时共掷了 n 次的概率。

〔解〕 以 A_n 记事件"掷了 n 次，第一次出现接连两个正面"，$p_n = P(A_n)$。易见，$p_1 = 0$，$p_2 = \frac{1}{4}$。考虑 A_{n+2} $(n \geqslant 1)$ 的情况。事件 A_{n+2} 发生可分为下列两种情况：(i) 第一次出现反面，接下来的 $(n+1)$ 次投掷中（与第一次掷独立），第 $(n+1)$ 次才首次出现接连两个正面；(ii) 第一次出现正面，第二次出现反面，接下来的 n 次投掷中（与第一、二次掷独立）第 n 次才首次出现接连两个正面。用全概率公式，并考虑到独立性，我们有

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n, \quad n \geqslant 1 \tag{5}$$

令 $q_n = 2^n p_n$，则(5)式变成

$$q_{n+2} = q_{n+1} + q_n, \quad n \geqslant 1 \tag{6}$$

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 1。$$

因此 q_n 就是著名的斐波那契(Fibonacci)数列：

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right], \quad n \geqslant 1$$

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right], \quad n \geqslant 1。$$

（二阶常系数差分方程(6)可按下法求解。设

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \quad n \geqslant 1。$$

若 λ_1，λ_2 为特征方程 $x^2 = a\lambda + b$ 的两个不等的实根，则

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n,$$

其中常数 c_1 与 c_2 由初始值 x_1 与 x_2 决定。）

在例 12 中我们利用了这样的性质：对“首次出现接连两个正面来说，如果第一次掷出反面，那么从第二次投掷起，情况与从头开始是完全一样的；如果第一次掷出正面，第二次掷出反面，那么从第三次投掷起，情况又与从头开始一样。利用了这性质才使得 p_{n+2} 与 p_{n+1}，p_n 建立起联系。这也是一种十分有用的思考问题的方法，对解题很有好处。下面的例子也说明了这一点。

〔例 13〕 甲、乙两个比赛射击，每回射击胜者得 1 分。每回射击中甲胜的概率为 α，乙胜的概率为 β $(\alpha+\beta=1)$。比赛进行到有一人比对方多 2 分为止，多 2 分者最终获胜。求甲最终获胜的概率。

〔解〕 以 A 记“甲最终获胜”这一事件。以 B_1 记事件“在第一、二回射击中甲均获胜”，B_2 记事件“在第一、二回射击中乙均获胜”，B_3 记事件“在第一、二回射击中甲、乙各胜一回”。易见，$P(B_1)=\alpha^2$，$P(B_2)=\beta^2$，$P(B_3)=2\alpha\beta$。若 B_1 发生，甲已获胜，故 $P(A|B_1)=1$；若 B_2 发生，乙已获胜，故 $P(A|B_2)=0$；若 B_3 发生，从第三回开始，比赛犹如从头开始一样，因此 $P(A|B_3)=P(A)$。现在由全概率公式得

$$P(A)=\alpha^2+2\alpha\beta P(A),$$

$$P(A)=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}。$$

最后举一个应用全概率公式计算可靠性的例子。

〔例 14〕 设一个线路由五个同样的电子元件组成（图 1）。每个元件正常工作的概率（元件的可靠性）为 p，元件损坏即断路。各个元件的工作状况互相独立。求线路的可靠性（即线路两端保持电路连通的概率）。

〔解〕 我们知道，由两个元件串联而成的线路的可靠性为

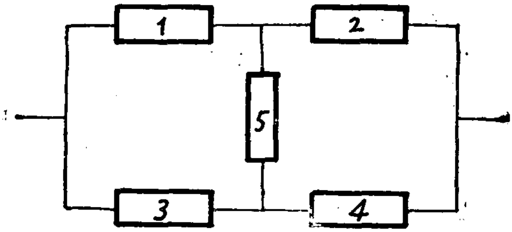

图 1

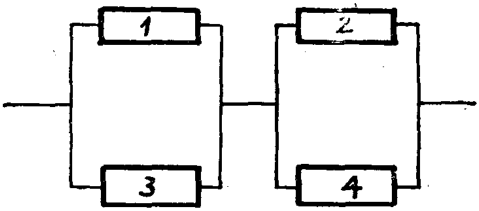

图 2

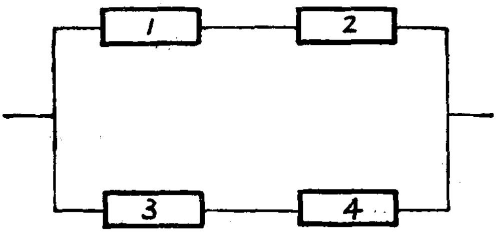

图 3

p^2，由两个元件并联而成的线路的可靠性为 $1-(1-p)^2=2p-p^2$。

现在令 A_1 记事件"元件 5 正常工作"，A_2 记事件"元件 5 损坏"。若 A_1 发生，则线路即为先并联后串联（图 2），这时线路可靠性为 $(2p-p^2)^2$。若 A_2 发生，则线路即为先串联后并联（图 3），这时线路可靠性为 $2p^2-p^4$。现在用全概率公式，线路的可