

· 内部交流 ·

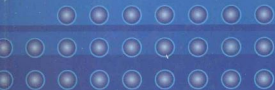
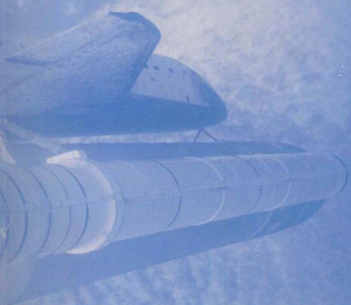


下
册

论文集

力学问题学术研讨会

首届全国航空航天领域中的



北京航空航天大学
中国力学学会

二〇〇四年九月

前 言

由中国力学学会固体力学专业委员会和流体力学专业委员会牵头,北京航空航天大学主办的“首届全国航空航天领域中的力学问题学术研讨会”于2004年9月18—20号在四川成都召开。会议的意义在于扩大和拓宽力学和其它学科之间的交叉与融合,通过交流我们的研究成果,共同探讨当前航空航天科学技术所关心的重要力学问题,进一步促进我国航空航天科学技术的发展。大会安排了六个特邀报告,它们是:

报告人	报告题目	职务或职称
袁家军	浅谈载人航天系统	神舟五号飞船系统总指挥(五院院长)
唐长红	航空力学的应用与发展	中航一集团第一飞机设计研究院总师
张涵信	非定常流与飞行器动稳定性问题	院士(CFD国家实验室学术委员会主任)
白以龙	从“哥伦比亚号”悲剧看航天中的多尺度力学问题	院士(中国科学院力学研究所)
崔尔杰	新一代航空航天飞行器的发展与关键力学问题	院士(中国航天科技集团第701研究所)
杜善义	航空航天新材料与力学	院士(哈尔滨工业大学)

本次会议是一次高水平的学术研讨会,由哈尔滨工业大学杜善义院士任主席,北京航空航天大学杨嘉陵教授、孙茂教授任副主席。还邀请了一大批知名学者作为顾问委员会和学术委员会委员。有来自国内20余所著名高等院校以及中国航空工业总公司一集团、二集团和中国航天科技集团、中国航天科工集团等单位约二百人参加了会议。

作为此次学术会议的成果介绍,我们编辑出版了“首届全国航空航天领域中的力学问题学术研讨会”论文集,分为上、下册。其中上册包含的内容主要是流体、总体和其它;下册包含的内容主要是结构、材料等。

论文的收编工作得到了广大作者的积极响应,投稿踊跃,最后收编至论文集中的论文有157篇(考虑到本人意见,大会特邀报告和分会主题报告没有收编)。在此,对各位同仁的支持,表示衷心的感谢。但由于时间的限制,且适逢假期,联系不畅,加上我们水平有限,论文集编辑过程中难免会有遗漏和错误,敬请广大作者给予体谅和理解。

“首届全国航空航天领域中的力学问题学术研讨会”的成功召开和论文集的出版,为航空航天科学技术所涉及的交叉学科领域的各界人士提供了一起学习和交流的舞台,意义重大,相信这样的会议还会继续举办下去。

在此我们要特别鸣谢以下单位的支持:中国力学学会;航空科学基金委员会;北京航空航天大学科技处。

二零零四年九月
大会组委会于北京

本论文集的出版由航空科学基金委员会提供部分赞助

首届全国航空航天领域中的力学问题学术研讨会

目录

(按第一作者汉语拼音排列)

1. 用均匀化方法研究微孔结构对多孔材料等效弹性常数的影响曹晓卿 王志华 马宏伟 赵隆茂 杨桂通 (1)
2. 某航空发动机低压涡轮工作叶片静强度分析陈立杰 谢里阳 (6)
3. 含粘性界面的斜交铺设矩形板柱形弯曲的精确解陈伟球 丁皓江 (10)
4. 固体火箭发动机复合材料壳体应力分析及薄弱区补强研究程 勇 邵珠山 刘丙禹 (14)
5. 基于敏度阈值拓扑优化方法在飞机加强框设计中的应用邓扬晨 刘晓欧 朱继宏 (17)
6. 轻质点阵材料的力学行为分析方岱宁 郭海成 A. K. Soh 卢天健 (22)
7. Study the radial motion error of main spindle of the lathe based on the neural network of harmonic wavelet傅晓锦 (25)
8. 陶瓷隔板的有限元分析及优化设计高美艳 周紫光 方继明 涂言青 (30)
9. 减振支架结构随机响应的灵敏度分析葛健全 唐乾刚 雷勇军 (34)
10. 航天结构优化设计的数值方法顾元宪 陈颀松 (38)
11. NiCrAl/NiAl 微叠层材料的力学性能研究关春龙 李 垚 李 滕 敏 (42)
12. 2D-C/SiC 复合材料的力学行为模拟管国阳 矫桂琼 潘文革 张增光 (47)
13. 柔性双连杆机械臂运动规划及仿真郭 军 崔 龙 (51)
14. 斜碰撞振动研究的若干进展韩 维 胡海岩 金栋平 侯志强 (55)
15. 不对中裂纹转子的动力学特性及其诊断研究何 田 刘献栋 李其汉 (60)
16. 端头帽再入时碳颗粒的旋转效应黄海明 高索文 (64)
17. 复合材料层合板复杂加载强度的细观力学模拟黄争鸣 (69)
18. 混合遗传算法的研究及其在压气机叶型优化设计中的应用金东海 桂幸民 (72)
19. 蜂窝夹芯旋转壳的屈曲分析李 军 薛明德 (76)
20. 空间充气天线支撑结构动载作用下力学分析李学涛 苗常青 马 浩 杜文文 (81)
21. 卫星次承力结构设计对振动响应的影响李应典 (85)
22. 复合材料壳体外压稳定性分析李 媛 利凤祥 李越森 王 锬 胡春波 (90)
23. 应用于智能结构的光纤智能夹层初步研究梁大开 李东升 熊 克 (94)
24. GLARE 层板的力学性能及其在 A380 客机上的应用梁中全 薛元德 陈绍杰 武文静 (97)
25. 质量矩控制技术的控制力、控制力矩分析廖国宾 罗 青 (100)
26. 管道轴向流固耦合振动的行波方法研究林 磊 任建亨 姜节胜 (106)
27. 发汗冷却层板结构的受热损伤分析刘伟强 孙文胜 张 峰 张肇毅 (110)
28. 一种新型热塑性复合材料的制备与力学性能分析刘文博 白荣国 矫维成 (114)
29. 超燃冲压发动机燃烧室冷却结构设计制造隆永胜 刘初平 白蒨生 陈德江 (119)
30. 航空与航天器中蜂窝夹层板动力分析的 Hamilton 体系与辛算法罗 恩 黄伟江 姜凤华 (122)
31. 45 碳钢的单轴应变和应力循环随动硬化演化实验研究罗 艳 杨显杰 高 庆 蔡力勋 (126)
32. 缝合复合材料弹性常数的有限元分析孟凡颖 童小燕 陈绍杰 杨 卫 (130)
33. 室温硫化有机硅粘接剂的应用与研究进展苗蓉丽 (134)
34. 受运动约束输液管的非线性振动研究倪 樵 王 琳 (139)

首届全国航空航天领域中的力学问题学术研讨会

35. 从几个国防课题看实验力学在航空工程研究中的优势和重要作用 宁文贤 (143)
36. 基于单轴高周疲劳寿命预测的局部应力应变法的研究 钱桂安 王茂廷 (148)
37. K_{1c}数据有效性判据 青映德 (151)
38. D406A 钢的力学统计特征 邱保文 涂应宏 张 彤 祝洪川 (155)
39. Cr18Ni9Ti 不锈钢低周疲劳随动硬化实验研究 邵 斌 杨显杰 毛江徽 孙亚芳 (159)
40. 利用 MSC/NASTRAN 进行飞机结构随机响应分析 宋春艳 (163)
41. 复合材料层合板 1:2 内共振的非线性动力学的研究 宋春枝 张 伟 (169)
42. 某产品振动疲劳寿命分析与验证 孙建勇 (172)
43. 考虑强度及散热性能的泡沫材料结构—材料协同优化设计 王 博 程耿东 (176)
44. 先进复合材料高性能、快速、低成本成型技术的工艺力学基础研究
..... 王殿富 于 佳 刘 玲 张博明 武湛君 (180)
45. 位移约束下平面刚架结构形状优化设计 王 栋 (185)
46. 基于小波分析炮击振动信号的降噪处理 王光芦 徐 明 (189)
47. 飞机振动信号中周期分量的识别 王光芦 徐 明 (193)
48. 带支耳壳体的三维有限元分析 王宏伟 (197)
49. 导弹对接面预紧螺栓组在弯矩作用下的受力分析 王 军 郝志明 史平安 刘平艳 刘远东 (200)
50. 摇臂式起落架缓冲器参数设计与计算 王明义 贾玉红 (203)
51. 弹粘塑性材料稳恒扩展 II 型裂纹尖端应力场 王振清 周 博 梁文彦 王纪滨 王永军 (207)
52. 基于均匀化理论的多孔材料细观力学特性数值研究 王志华 曹晓晴 马宏伟 赵隆茂 杨桂通 (211)
53. 空间充气展开结构展开过程仿真分析 卫剑征 苗常青 谭惠丰 杜星文 (216)
54. 具有主动变阻尼控制的瞄准线稳定装置设计和研究 魏洋天 程 伟 王荇卫 (221)
55. 材料表面及界面疲劳损伤过程的数值描述研究 吴维青 (225)
56. 基于小裂纹理论的航空材料疲劳寿命预测 吴学仁 刘建中 (229)
57. 大型柔性对称结构的主动控制 吴志刚 (236)
58. 非惯性系下矩形板动力学建模与仿真 吴志桥 任均国 (240)
59. 某飞机液压管路动特性的有限元分析 奚盛海 肖文键 朱庆友 (244)
60. 刚柔耦合系统动力学建模与数值仿真 肖建强 章定国 (248)
61. 横向载荷作用下功能梯度简支梁弯曲变形分析 校金友 张 铎 白宏伟 (254)
62. 飞机外挂多输入多输出振动试验技术 徐 明 (259)
63. 多层桁架夹层结构与蜂窝夹层结构的比较及优化 徐胜利 王 博 程耿东 (263)
64. 复合型裂纹试样动态应力强度因子的有限元分析 许泽建 李玉龙 (267)
65. 热诱发航天器附件弯扭耦合振动的有限元分析 薛明德 黄彦文 张逸凡 (271)
66. 自主移动质量对旋转梁振动的抑制分析 闫安志 徐 晖 (275)
67. 面向设计的纤维缠绕/金属内衬压力容器结构分析 晏 飞 戴德海 朱智春 (279)
68. 智能旋翼压电复合材料层合梁主动扭转分析 杨卫东 卢德军 曹 涛 (283)
69. 63Sn-37Pb 钎料合金的室温单轴应变循环相关变形行为
..... 杨显杰 邵 斌 罗 艳 孙亚芳 徐尹杰 (290)
70. 捷联惯导系统振动耦合特性研究 姚建军 付继波 (294)
71. 含参数激励的薄板的多脉冲轨道和混沌动力学分析 姚明辉 张 伟 (299)

首届全国航空航天领域中的力学问题学术研讨会

72. 飞机典型变厚度壁板损伤容限特性分析 殷之平 黄其青 (302)
73. 轴向载荷下螺栓非啮合螺旋段变形的实验和三维有限元计算分析
..... 尹益辉 符春渝 黄鹏 魏晓贞 (305)
74. 航天器振动试验中的动力吸振现象 于新战 宋燕平 刘明治 (309)
75. 薄壁加筋板的稳定性能分析研究 曾国华 董 聪 赵 敏 (312)
76. 一类挠性多体卫星的动力学及物理仿真试验 曾海波 李铁寿 (316)
77. 三维四向编织复合材料非线性响应及失效分析 曾 涛 方岱宁 (320)
78. 弹性件厚度不均匀柔性接头三维非线性分析 张爱华 刘勇琼 尤军锋 任全彬 (324)
79. 再生冷却塞式喷管塞锥热变形数值分析 张肇毅 张 峰 刘伟强 (329)
80. 外压圆柱壳的屈曲分析 张 璟 晏 飞 (334)
81. 基于均匀化方法的双向铺层层合板弹性性能计算及优化设计 张 璞 李 书 张 放 (337)
82. 基于模糊推理的基向量曲线求解方法 张秋华 韩 琦 孙 毅 (341)
83. 芯片封装中翘曲问题的三维有限元数值模拟 张士元 郑百林 吴景深 贺鹏飞 (345)
84. 非均匀泡沫金属材料在冲击载荷下的变形模拟 张铨铨 赵隆茂 杨桂通 (349)
85. 计算技术在航空航天领域中的应用 郑 耀 (353)
86. 形状设计灵敏度分析的无网格法 周进雄 王学明 张智谦 张 陵 (357)
87. 空间充气支撑结构刚化机理研究 周 涛 谢志民 杜星文 (361)
88. 太阳帆板振动对卫星姿态动力学影响分析 宗 红 陈义庆 (365)
89. 亚表面压剪裂纹问题及其研究进展 左 宏 (369)

用均匀化方法研究微孔结构对多孔材料等效弹性常数的影响

曹晓卿, 王志华, 马宏伟, 赵隆茂, 杨桂通

(太原理工大学 应用力学研究所, 山西 太原 030024)

Studying the Effects of Micro-structure on the Equivalent Elastic Constants of Porous Materials with Homogenization Theory

CHAO Xiao-qing, WANG Zhi-hua, MA Hong-wei, ZHAO Long-mao, YANG Gui-tong¹

(The Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

摘 要: 多孔材料作为一种功能结构材料在许多领域受到青睐, 在航空航天工业因其超轻质和特有的功能性如吸能性等应用日益广泛。本文在线弹性范围内, 根据均匀化理论, 基于虚位移原理结合有限元方法推导出二维周期性结构的均匀化的有限元格式。取具有不同孔洞形状的正方形胞元作为周期性结构的代表胞元, 计算出不同微孔形状及大小下规则二维周期性结构材料的等效弹性常数, 比较分析了微孔结构对多孔材料等效弹性常数的影响。

关键词: 均匀化理论; 胞元; 微结构; 多孔材料; 等效弹性常数

Abstract: Porous material is attracting more eyes in many industrial fields as a kind of functional and structural material, and being super-light and other special functions such as energy absorbing is being used widely in aerospace industry. In this paper the equivalent in-plane elastic moduli of two-dimensional periodic structures are evaluated. Starting from the weak form of virtual displacement equation, the homogenization method is introduced for linear elastic problems. Then a homogenization finite element method (Homo FEM) is developed for the 2-D periodic structures and applied to the calculation of the equivalent elastic constants of a regular 2-D periodic structure with various relative densities and with square as base-cell including different shape of hole (micro-structure). The numerical results obtained by homo FEM shows that both the cell volume fraction and cell shape influence the equivalent elastic constants of porous structures.

Key words: homogenization theory; base cell; micro-structure; porous material; equivalent elastic constants

以较大孔径和高孔隙率为特征的多孔材料, 是一种多相材质的复合材料系统, 其中包含固体基体介质、流体或气体相孔洞介质。固体孔洞材料由于具有高比强度、隔热抗震性能好等优点, 日益受到广泛的应用和研究^[1]。二维的蜂窝结构材料和三维的泡沫材料, 特别是金属蜂窝材料和金属泡沫材料, 都是典型的超轻固体孔洞材料, 因而在航空航天领域得到日益广泛的应用。研究多孔材料, 不仅要了解其宏观性能, 还应建立宏、微观的关系, 主要考虑孔洞形式、尺寸及壁厚等因素在宏、微观尺度上对材料力学性能的影响。

自80年代初期发展起来的均匀化理论(homogenization theory)是一套严格的数学理论, 一直

是现代应用数学领域的研究课题之一。它从构成材料微结构的“胞元”(base cell)入手, 假定胞元具有空间可重复性(平移或转动), 通过同时引入宏观尺度和微观尺度, 从而可以详尽地考虑材料微结构的影响。均匀化理论不同于其它的一些细观力学的方法, 它不需要人为地假定胞元的边界条件, 而是采用摄动解的形式, 建立了适用于整体材料的渐近分析理论。起初人们主要将均匀化理论与有限元方法相结合用于复合材料性能的分析及理论预测, 近年来, 国内外有不少学者将均匀化理论用于多孔材料的分析中^[2-6]。在三维孔隙材料如泡沫材料中, 胞孔的形状及大小并非完全均匀的, 因此借助二维均匀化方法来讨论胞孔形状及大小对多孔材料性能的影响有现实意义。

本文在线弹性范围内, 根据均匀化理论, 基于虚位移原理结合有限元方法推导出二维周期性结构的均匀化的有限元格式。取具有不同孔洞形状的正方形胞元作为周期性结构的代表胞元, 计算出不同微孔形状及大小下规则二维周期性结构材料的等效弹性常数, 比较分析了微孔结构对多孔材料等效弹性常数的影响。

1 均匀化理论及其二维有限元格式

如果表示一个非均匀介质的一些物理量的函数具有性质 $F(\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{Y}) = F(\mathbf{x})$, 就可以说该介质具有一定的(规则的)周期性。其中 $\mathbf{x}$ 是点的位置矢量, $\mathbf{N}$ 是一个 3×3 的对角阵, 且 $\mathbf{Y}$ 是一个常数矢量, 定义结构的周期; F 可以是位置矢量 $\mathbf{x}$ 一个标量函数或者是一个矢量函数甚至可以是一个张量函数。

考虑由非均匀材料(含空洞)组成基础胞元(base cell)而形成的弹性体, 其胞元具有周期分布的性质, 设基础胞元的无量纲特征尺寸 ε , 与宏观尺度相比, ε 是一个非常小的量。当结构受外载作用时, 结构场变量如位移和应力将随宏观位移的改变而产生变化。但是由于细观胞元结构的高度非均质性, 使得结构的场变量在宏观位置 $\mathbf{x}$ 的非常小的领域内 ε 也有很大变化。因此需引入两个尺度, $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$, 来描述结构宏观场变量的性质, 其中 $\mathbf{x}$ 是宏观尺度, $\mathbf{y}$ 表示细观尺度, 以 Ω^ε 表示随两尺度变化的材料的实体部分, $\mathbf{Y}$ 对应于一个基础胞元, $\mathbf{Y}$ 表示胞元的实体部分, 则根据线弹性范围的虚位移原理有

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} t_i v_i d\Gamma + \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS \quad (1)$$

其中 f_i^ε 为体积力, t_i 表示施加在 Ω^ε 力边界 Γ_f 上的外载荷, u^ε 为真实位移, $\mathbf{v}$ 为满足外固定边界条件的任意虚位移,

$u^\varepsilon, \mathbf{v} \in V^\varepsilon = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3 \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_f} = 0 \right\}$, H^1 是 R^3 空间的Hausdorff 维, 基础胞元孔内边界 S 作用力 p_i , 将 u^ε 表示成关于 ε 渐近展开式

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + O(\varepsilon^2) \quad (2)$$

将式(2)代入(1)式, 运算后得

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_i} \frac{\partial v_l}{\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_i} \right) \frac{\partial v_l}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} \right] + \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_i} \right) \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_i} \right) \frac{\partial v_l}{\partial y_j} \right] + \varepsilon(\dots) \right\} d\Omega$$

$$= \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} t_i v_i d\Gamma + \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS \quad (3)$$

根据Y-周期函数的性质[14], 任意函数 $\Phi(\mathbf{y})$ 满足

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} \Phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\Omega = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\Omega^\varepsilon} \int_{\mathbf{Y}} \Phi(\mathbf{y}) d\mathbf{Y} d\Omega \quad (4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^\varepsilon} \Phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\Omega = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\Omega^\varepsilon} \int_S \Phi(\mathbf{y}) dS d\Omega \quad (5)$$

比较 ε 的同阶项系数, 可得到控制方程

$$\frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\Omega^\varepsilon} \int_{\mathbf{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_i} \frac{\partial v_l}{\partial y_j} d\mathbf{Y} d\Omega = 0, \quad (6)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} E_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_i} \right) \frac{\partial v_l}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} \right] d\mathbf{Y} \right\} d\Omega = \varepsilon \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS \right) d\Omega \quad (7)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} E_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_i} \right) \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k^1}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} \right] d\mathbf{Y} \right\} d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} f_i^\varepsilon v_i d\mathbf{Y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_f} t_i v_i d\Gamma \quad (8)$$

由 $\mathbf{v}$ 的任意性, 对(6)式运用散度定理, 可得

$$\frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\Omega} \left\{ \int_{\mathbf{Y}} \left[-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_i} \right) \right] v_l d\mathbf{Y} + \int_S E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_i} n_j v_l dS \right\} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \quad (9)$$

从而由周期函数的性质可得,

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}). \quad (10)$$

即 u^ε 的渐近展开式中的第一项 u^0 只与宏观尺度 $\mathbf{x}$ 有关而与微观尺度 $\mathbf{y}$ 无关。对(7)式取 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ 可得:

$$\int_S p_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS = 0. \quad (11)$$

上式表明,在孔边界上的力 $p_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 必须是自平衡的。取 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{y})$ 代入式 (7) 中得,

$$\int_Y E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l^1}{\partial y_i} \right) \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_i} dY = \int_S p_i v_i dS \quad (12)$$

将式(12)中 $\mathbf{x}$ 看作参量,注意到方程关于 $\partial u_k^0 / \partial x_i$ 和 p_i 是线性的, $\mathbf{u}^1$ 的解可表示为

$$\mathbf{u}_i^1 = -\chi_i^k(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} - \psi_i(\mathbf{y}) + \tilde{u}_i^1(\mathbf{x}) \quad (13)$$

其中, $\tilde{u}_i^1$ 是关于 $\mathbf{y}$ 的常数, $\chi^k \in V_Y$, 满足方程

$$\int_Y E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^k}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY \quad (14)$$

$\psi \in V_Y$, 满足方程

$$\int_Y E_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY = \int_S p_i v_i(\mathbf{y}) dY \quad (15)$$

将式 (10) 代入式 (8) 得

$$\int_{\Omega} D_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \tau_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_i} t_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (16)$$

其中,

$$D_{ijkl}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^k}{\partial y_m} \right) dY \quad (17)$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} dY \quad (18)$$

$$b_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \quad (19)$$

(16)式为均匀化后的宏观方程。其中 D_{ijkl} 是均匀化的等效弹性张量, τ_{ij} 是孔内作用力 p_i 引起的平均“残余”应力, b_i 是平均体力。

从上述分析可知,等效均匀化过程需先解细观单元满足的方程(14)得到附加参数 $\chi^k(\mathbf{y})$, 再利用式(17)求得均匀化弹性常数 D_{ijkl} 然后由式(16)可以得到宏观问题的解。

根据均匀化理论,结构的宏观等效弹性模量必须通过在基础胞元结构中求附加参数 $\chi^k(\mathbf{y})$ 来得到。对于二维平面问题,只需求解三个细观尺度上的附加参数。方程(11)可改写为:

$$\int_Y E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^k}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial P_p^k}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY \quad (20)$$

其中, $P^k = y_j \delta_{jk} e_k$ ($i, j = 1, 2$; $k = 1, 2$), δ_{jk} 为Kronecker符号。对基元采用平面四边形等参元离散,并应用相应的插值函数分别对 $\mathbf{y}, \mathbf{v}(\mathbf{y}), \chi^k(\mathbf{y})$ 进行插值。引入预应变矢量 ε_0^{kl} ($k, l = 1, 2$)

$$\varepsilon_0^{11} = [1 \ 0 \ 0]^T \quad \varepsilon_0^{22} = [0 \ 1 \ 0]^T \quad \varepsilon_0^{12} = \varepsilon_0^{21} = [0 \ 0 \ 1]^T$$

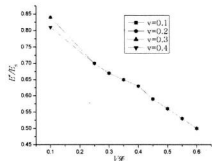
对多孔结构采用平面应力假设,则方程(20)可简化为如下有限元格式

$$\sum_e \int_{Y_e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{B}} |J| d\xi_1 d\xi_2 = \sum_e \int_{Y_e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \varepsilon_0^k |J| d\xi_1 d\xi_2$$

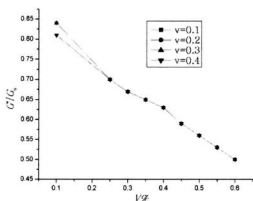
上式即为均匀化的有限元求解附加参数 $\chi^k(\mathbf{y})$ 的方程, 获得单元各节点的 $\chi^k(\mathbf{y})$, 可由式(17)求解出宏观等效弹性张量 D_{ijkl} 。

2 数值模拟及结果分析

本文选取具有不同孔洞形状的正方形胞元作为周期性结构的代表胞元,计算出不同微孔形状及大小下规则二维周期性结构材料的等效弹性常数,比较分析了微孔结构对多孔材料等效弹性常数的影响。胞壁材料为纯铝,相应的 $E_s = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ 。壁厚为 $l = 6 \text{ mm}$,选取圆形胞孔和正六边形胞孔来考察等效参数随微结构形状及所占体积分数的变化。依据对称性,有限元计算模型取为基础胞元的四分之一,在实体胞壁区域内划分平面四边形单元网格,单元个数随胞孔尺寸和形状的不同而不同,并根据数值计算的收敛性和误差分析来确定。



(a) 等效弹性模量 (正六边形孔)



(b)等效剪切模量(圆孔)

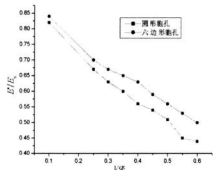
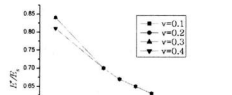
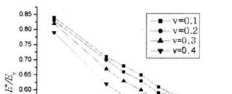


图3 等效弹性模量随孔洞体积分数的变化
Fig.3 Equivalent Young's modulus versus volume fraction of cell of different shape

图2所示为含圆形孔洞或正六边形孔洞的多

孔材料的等效弹性模量和等效剪切模量随孔洞体积分数的变化情况。从图中可见, 等效弹性参数均随孔洞体积分数的增大而减小, 这和现有的实验及理论结果是一致的^[1]。图2中同时还表示出了胞壁材料的泊松比 $\nu_s = 0.1 \sim 0.4$ 变化时对宏观等效参数的影响, 从图中可以发现, 在较大的孔洞体积分数范围内, 胞壁材料的泊松比对正六边形孔洞材料的宏观等效杨氏模量影响不大, 对圆形孔洞材料的宏观等效杨氏模量则有较大影响。胞壁材料的泊松比对圆形孔洞的宏观等效剪切模量的影响类似于对正六边形孔洞材料的宏观等效杨氏模量的影响。由此看来, 多孔材料(无论孔洞规则与否)的抗拉和抗弯性能主要由胞壁的杨氏模量来决定也还存在疑问。

图3所示为泊松比取0.3时, 两种孔洞材料的等效宏观弹性模量随孔洞体积分数的变化。从图中可见, 在所研究的范围内, 相同孔洞体积分数下, 圆形孔洞材料的等效宏观弹性模量略高于正六边形孔洞材料。本文中只讨论了两种孔洞形状, 实际上真实多孔材料中孔洞形状是多种多样的, 这还需要进一步的研究。

4 结论

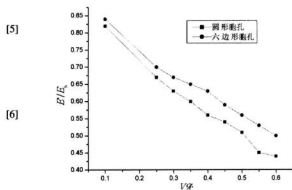
本文利用二维周期结构的均匀化有限元格式计算出含有不同体积分数圆形孔洞及正六边形孔洞材料的等效弹性参数, 考察了胞壁固体相的力学性能参数对宏观力学性能的影响。数值计算结果表明: 多孔材料的等效弹性参数不仅取决于微孔结构的数量, 而且对微孔结构的形状也有一定程度的敏感, 同时对基体材料的泊松比的变化敏感与否也与微孔结构有关。

参考文献

- [1] Gibson L J, Ashby M F. Cellular Solid: Structure and Properties, 2nd ed[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.185,204.
- [2] 庄守兵, 吴长春, 冯森林, 等. 基于均匀化方法的多孔材料细观力学特性数值研究[J]. 材料科学与工程, 2001, 19(4): 9-13. (Zhuang S B, Wu C C, Feng M L, et al. Microscopic Investigation of Cellular Materials Mechanical Properties Based on Homogenization Theory [J]. Materials Science & Engineering, 2001, 19(4): 9-13.)
- [3] 王飞, 庄守兵, 虞吉林. 用均匀化理论分析蜂窝结构的等效弹性参数[J]. 力学学报, 2002, 34(6): 914-923. (Wang F, Zhuang S B, Yu J L. Application of Homo-

genization FEM to the Equivalent Elastic Constants of
Honeycomb Structures [J]. Acta Mechanica Sinica, 2002,
34(6): 914-923.)

[4] Okazaki N, Okumura D, Matsuki H. Micromechanics simulation



某航空发动机低压涡轮工作叶片静强度分析

陈立杰, 谢里阳

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110004)

Static Strengthen Analysis Of Low-Pressure Stage Turbine Blades For An Aero-Engine

CHEN Li-jie, XIE Li-yang

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

摘要: 本文对某航空发动机低压涡轮工作叶片建立了全尺寸有限元模型, 根据台架试验及实际工作承载条件, 综合考虑叶片工作时所承受的离心负荷与气流量, 以及箍带与叶身小孔的配合间隙对结构应力场分布的影响, 进行了线弹性与弹塑性有限元分析。得出叶片结构强度的薄弱之处: 榫头第一喉部; 叶身小孔; 叶背一侧圆根处。为确定叶片技术寿命时考核部位的选择提供了可靠的依据。

关键词: 涡轮叶片; 静强度分析; 线弹性有限元分析; 弹塑性有限元分析; 配合间隙

Abstract: In this paper, it established a full size finite element model of low-pressure stage turbine blades. According to the test-rig and working load, linear elastic and elasto-plastic finite element analysis have been performed using software ANSYS. It analyzed the effect on the stress distribution of the structure by different match clearance. The considered loads involved centrifugal force and airflow pressure. It found the weakness part of the blade on the static strength, namely the first throat section of the fir-tree root, the hole in the blade body and the circularity root on the back of the blade. The analysis results present a theoretic basis on the critical locations chooses for service life prediction.

Key words: turbine blades; static strength analysis; linear elastic FEA; elasto-plastic FEA; match clearance

据不完全统计, 我国航空发动机以往发生的各类断裂失效中, 转动部件的失效高达80%^[1]以上。涡轮部件处于高温高压燃气区工作, 是航空发动机中动力负荷最大, 且出现故障较多的部件。如何对其强度进行准确的分析, 直接影响到发动机技术寿命确定的可靠性。对低压涡轮叶片而言, 其叶型复杂且承载较大, 叶片工作时仅离心力可达100kN^[2]以上。本文对低压涡轮工作叶片, 考虑离心力与气流量, 分别进行了线弹性与弹塑性有限元分析, 并对箍带与叶身小孔配合间隙对结构应力场分布的影响进行了分析。

1 涡轮叶片结构与计算模型

1.1 涡轮叶片结构

低压涡轮工作叶片为变截面实心叶片, 叶片型线沿叶高变化, 截面积由叶尖向叶根逐渐增加。叶片间为减震, 由箍带将各叶片相联接。

由于叶型及承载的复杂性, 静强度分析通常采用的模型^[2-3]有: ①为克服网格离散及计算困

难, 叶身与叶根分别建模分析, 在圆根处不能给出精确的计算结果; ②为克服对叶片复杂边界条件的处理, 对叶片与轮盘整体建模, 进行非线性接触分析, 计算量大, 且接触部分的计算精度依赖于榫头与榫槽相接触部分的模型精度。

本文对叶片结构进行了全尺寸建模, 包括: 叶片、榫头、篦齿、缘板、箍带, 在圆根处计算结果较精确。叶根的边界条件可以进行经验性处理, 避免叶片与轮盘整体计算工作量大的问题。对榫头和叶尖的倒角及圆弧处进行简化处理后, 叶片模型质量为0.314kg, 质心半径243.44mm。

1.2 计算模型

1.2.1 叶片有限元模型

叶片有限元模型采用三维20节点六面体单元与10节点四面体单元综合建模, 两种单元过渡处为金字塔单元。单元总数为9384, 箍带与叶身小孔处设有接触对共48对, 计算模型如图1(图中仅示意坐标轴方向, 坐标原点实际位于轴心)。

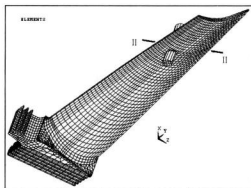


图1 叶片整体有限元模型

Fig.1 Full size FEA model of turbine blades

低压涡轮叶片材料为镍基高温合金GH4049，密度 8.44g/cm^3 。由于叶身表面进行了渗铝，表层的主要成分为铝和镍，箍带与叶片间的摩擦系数取值为0.24。强度分析时按叶片低周疲劳台架试验加载温度，材料基本特性的参考值为：弹性模量 172.55GPa ，泊松比0.3445。

1.2.2 各种计算工况中边界条件的处理

叶片工作时，叶身上主要承受两种力：离心力与气流量。在最大稳态载荷下对低压涡轮叶片进行静强度分析，与较大的离心力相比，可以忽略结构热应力的影响^[3-4]。

(1) 离心力加载时边界条件处理

箍带与叶身小孔配合处按接触分析计算。根据循环对称边界条件：在箍带两循环对称截面内各节点坐标系下（x、y、z轴分别平行于涡轮的周向、径向、轴向），两循环对称面内相应的节点具有相同的位移分量。通过耦合两循环对称面内对应节点的各位移分量，来模拟循环对称边界条件。对于考虑配合间隙的接触分析，还应设置接触面的初始偏移量，并约束箍带两截面部分节点的周向位移，避免箍带位移过大而造成接触分析的不收敛。

约束叶根底面的径向位移、榫头后端面沿榫齿方向的位移及缘板侧面的周向位移，以避免产生刚体位移。

榫头各齿面按均匀受力条件^[3, 5]，将整个叶片的离心力平均到每个齿面上的作用力 P 为：

$$P = \frac{\sum C_i}{2n \cos \frac{\phi}{2}} \quad (1)$$

其中， $\sum C_i$ 表示整个叶片（包括叶根）的

离心力； ϕ 为枞树型叶根的锥形角； n 为榫齿对数。计算得叶片离心力为 104.46kN ，平均到每个齿上的作用力为 10.81kN 。

叶片离心负荷按稳态转动角速度进行加载：转速为 11150r/min 。

(2) 气流量加载时边界条件处理

对于静强度分析，只考虑气流力的平均值分量^[3]。与离心负荷相比，叶片承受的气流量较小，主要考虑气流量对截面叶身小孔处的局部应力分布的影响。位移边界条件处理如下：约束各榫齿面的法向位移；榫头后端面沿榫齿方向的位移；缘板侧面的周向位移。箍带两循环对称截面内边界条件的处理与（1）中相同。

叶片的级平均直径 D_m 与叶高 l 的比为：

$$\frac{D_m}{l} \approx 3.6 < 10 \quad (2)$$

应考虑气流量沿叶高的变化。计算取发动机稳态运转时的载荷，气流量沿叶高的变化受圆周速度的影响较大，可按气流量沿叶高呈线性分布简化。气流量加载由叶盆和叶背的压差实现^[6]。

(3) 离心力与气流量组合加载时边界条件处理

位移边界条件与（1）中施加方式相同，力边界条件为（1）与（2）的组合。

2 线弹性与弹塑性有限元计算结果及分析

不考虑箍带与叶身的配合间隙时，关键部位的线弹性与弹塑性计算结果分别见表1、2。考虑箍带与叶身的配合间隙时，关键部位的线弹性与弹塑性计算结果分别见表3、4。表中所列关键部位见图2（其中点164是孔上半面最高点）。

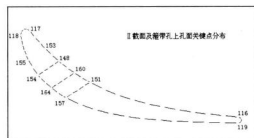


图2 危险截面·内关键点分布

Fig.2 Keypoints location in the critical section

表1 线弹性有限元分析结果(MPa)

Table 1 The results of linear elastic FEA analysis

without match clearance (MPa)				
关键点编号	148	164	圆根Z处 (叶背侧)	第一 喉部
①离心拉应力(径向)	817	—	566	726
②气动应力(径向)	37	-84	—	—
①+②(径向)	767	—	527	727
①+②VonMises 等效应力	1118	174	495	644

表2 弹塑性有限元分析结果(MPa)

Table 2 The results of elasto-plastic FEA analysis

without match clearance (MPa)				
关键点编号	148	圆根Z处 (叶背侧)	第一 喉部	
①离心拉应力(径向)	497	574	637	
①+②(径向)	493	533	630	
①+② Von Mises 等效应力	546	501	576	

表3 线弹性有限元分析结果(MPa)

Table 3 The results of linear elastic FEA analysis

with match clearance of 0.045mm (MPa)				
关键点编号	148	164 附近	圆根Z处 (叶背侧)	第一 喉部
①离心拉应力(径向)	593	-197	455	732
②气动应力(径向)	45	-114	—	—
①+②(径向)	601	-234	461	725
①+②VonMises 等效应力	932	278	432	647

表4 弹塑性有限元分析结果(MPa)

Table 4 The results of elasto-plastic FEA analysis

with match clearance of 0.045mm (MPa)				
关键点编号	148	圆根Z处 (叶背侧)	第一 喉部	
①离心拉应力(径向)	459	455	631	
①+②(径向)	434	462	628	
①+② Von Mises 等效应力	628	433	580	

(1) 离心拉应力计算结果分析

榫带与叶身无配合间隙时, 榫头离心拉应力计算结果见图3a~3c。计算结果表明: 榫头第一喉部承载最大。第一喉部靠叶盆一侧后端位置在加载时, 比榫头其他点先超出弹性极限进入塑性区, 使应力重新分配。因而与线弹性分析结果略有不同, 在弹塑性分析中榫头最大离心拉应力点位于叶背一侧喉部中间位置。

配合间隙对榫头部分应力分布的影响微弱, 可以忽略。而对圆根及叶身小孔的应力分布影响较大, 因其接触状态由无间隙时均匀接触变为有间隙时的局部接触。叶身II截面内点148与157附近区域为该截面离心拉应力最大区域。

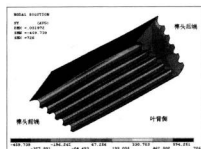


图3a 线弹性分析榫头应力分布(1)

Fig.3a Stress distribution on the fir-tree by linear elastic analysis(1)

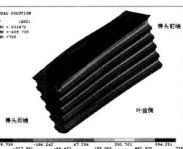


图3b 线弹性分析榫头应力分布(2)

Fig.3b Stress distribution on the fir-tree by linear elastic analysis(2)

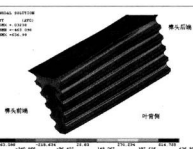


图3c 弹塑性分析榫头应力分布

Fig.3c Stress distribution on the fir-tree by elasto-plastic analysis

(2) 气动应力计算结果分析

不考虑榫带与叶身小孔的配合间隙时, Von Mises等效应力最大值为107MPa, 位于叶身小孔处点164; 考虑配合间隙时, Von Mises等效应力最大值为171MPa, 位于叶身小孔处点148。

圆根Z处的径向应力分布如图4所示。气流力加载在叶盆一侧产生拉应力, 叶背一侧为压应力, 进气与排气边产生较大的拉应力。

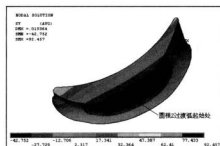


图4 圆根Z处受气流力时径向应力分布

Fig.4 Stress distribution on circularity root under air-flow pressure in the radial direction

(3) 离心力与气动力综合加载计算结果分析

如图5所示,叶片整体模型在气动力与离心负荷共同作用下,叶身小孔处的等效应力值最大,集中在点148与点157附近区域,其次为榫头第一喉部与圆根处(叶背侧)。这些部位也是叶片实际工作中易出现裂纹或断裂事故的部位。

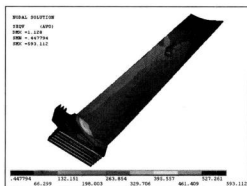


图5 不考虑配合间隙弹塑性分析时叶片应力分布

Fig.5 Von Mises equivalent stress distribution by elasto-plastic analysis without match clearance

叶片与榫带间不同配合间隙对整体结构最大等效应力的影响如图6所示。间隙超过0.03mm后,间隙量的改变对结构的最大等效应力影响较小,榫带与叶片间的接触处于相对稳定状态。

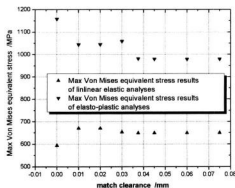


图6 最大等效应力随配合间隙变化

Fig.6 Max equivalent stress vs. different match clearance

3 计算结果精度分析

考虑由结构离散引起的误差,对于线弹性结构分析以应变能为基础,能量百分比误差 E 为:

$$E = 100 \times \left(\frac{e}{U + e} \right)^2 \quad (3)$$

U 为模型中单元应变能总和(%) , e 为各单元能量误差 e_i 之和。对单元 i 其能量误差为:

$$e_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\Delta \epsilon\}^T D \{\Delta \epsilon\} d\Omega \quad (4)$$

其中, $\Delta \epsilon$ 为应变差; D 为弹性系数矩阵。

叶片在气动力与离心负荷作用下,模型的绝大部分单元能量误差小于1.2%,精度较好。

4 结 论

(1) 叶身小孔与榫带的配合间隙对结构应力场分布有较大影响,对于结构静强度分析,建模时应当考虑平均间隙量。

(2) 通过适当的控制叶身小孔与榫带的配合间隙,在某种意义上可改善结构的强度。

(3) 叶片上强度的薄弱之处有:叶身小孔、榫头第一喉部和圆根处,此三处应作为寿命考核的关键部位。

参 考 文 献

- [1] 陶春虎, 钟培道, 王仁智等编著. 航空发动机转动部件的失效与预防[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.
- [2] Tao C H, Zhong P D, Wang R Z, et al. Failure analysis and prevention for rotor in aero-engine[M]. Beijing: Nation al Defense Industry Press, 2001.
- [3] 《航空发动机设计手册》总编委会编. 航空发动机设计手册第18册 叶片轮盘及主轴强度分析[M]. 北京: 航空工业出版社, 2001.
- [4] (Aeroengine design handbook chief edit committee. Aero-engine design handbook (vol.18) [M]. Beijing: Aeronautics Industry Press, 2001.)
- [5] 吴厚钰主编. 透平零件结构和强度计算[M]. 北京: 机械工业出版社, 1982.
- [6] (Wu H Y. Turbine parts structure and strength calculation [M]. Beijing: China Machinery Industry Press, 1972.)
- [7] Hou J F, Wicks B J, Antoniou R A. An investigation of fatigue failures of turbine blades in a gas turbine engine by mechanical analysis[J]. Engineering failure analysis, 2002, 9, 201-211.
- [8] 王相平, 徐鹤山. 有限元计算中叶片边界条件的选取[J]. 航空发动机, 1998, 4: 42-46.
- [9] (Wang X P, Xu H S. The boundary condition selection in finite element analysis of blades[J]. Aero engine, 1998, 4: 42-46.)
- [10] 周柏卓. 各向异性高温涡轮叶片材料本构关系研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 1999.
- [11] (Zhou B J. A Research of Constitutive Relationships for Hot Section Anisotropic Materials[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1999,7.)

含粘性界面的斜交铺设矩形板柱形弯曲的精确解

陈伟球, 丁皓江

(浙江大学 土木系, 浙江 杭州 310027)

Exact Solution of Angle-Ply Laminates in Cylindrical Bending with Viscous Interfaces

CHEN Wei-qi, DING Hao-jiang

(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

摘 要: 由于优越的力学性能, 层合板结构在包括航空航天在许多工程领域中得到了应用。在高温环境, 已观测到界面粘结材料会呈现粘性流动特性, 使得结构即使在静力荷载作用下其响应也随时间变化, 增加了问题的复杂性。针对具有粘性界面的斜交铺设层合板柱形弯曲问题, 本文在空间域内基于状态空间方法建立了层合板上、下表面状态矢量之间的关系, 进而利用边界条件导出了下表面未知状态变量和各粘性界面处相对滑移的关系。然后, 利用递推关系和粘性界面本构方程建立了时间域内关于各粘性界面相对滑移的状态方程, 并给出了相应的解。与文献中的结果进行了比较, 取得了一致的结论。

关键词: 斜交铺设层合板; 柱形弯曲; 粘性界面; 状态方程; 精确解

Abstract: Laminated structures have been widely used in engineering applications including aerospace technology. Experimental evidence has indicated that bonding materials usually exhibit certain viscous flowing characteristic under high temperature circumstance, and hence the structural response will be time-dependent. For a simply supported angle-ply laminated plate in cylindrical bending with viscous interfaces, a relationship between state vectors at the top and bottom surfaces is established via the state space approach. The satisfying of boundary conditions yields a relationship between the unknown state variables at the bottom surface and the relative sliding displacements at all viscous interfaces. By virtue of the interfacial constitutive relations, a state equation of the relative displacements with respect to time variable is obtained, from which the exact solution is then derived. Comparison is made with existing results, and good agreement is obtained.

Key words: angle-ply laminate; cylindrical bending; viscous interface; state equation; exact solution

近年来对于复合材料结构的研究有很大一部分集中在层与层之间的粘结性能及其对结构响应的影响上, 这是因为复合材料板的层间粘结在使用过程中很容易产生劣化甚至完全丧失联接功能, 产生诸如剥离、滑移等常见失效现象。为了能够正确预测因粘结性能劣化而导致结构静动态特性的变化, 已提出了许多不同的简化分析方法^[1-8], 这些简化理论通常是在对传统的层合梁、板、壳理论的某些假设作出修正的基础上建立的。Cheng等人^[2,3,5]仅通过考察具有理想粘结性能的板、壳结构而进行简化理论的适用性评估, 相关结论对于具有弱粘结性能的层合结构是否有效需要作进一步研究。针对正交铺设层合矩形板的柱形弯曲问题, Williams和Addessio^[9]首先把Pagano的弹性精确分析^[10]推广到层间非完美粘结情形, 并与他们所提出的简化理论作了比较, 证明了简化理论的有效性; 但是在他们的论文中代表层间弱粘结特性的界面柔度系数取值范围比较

窄。另外, 我们也知道, 随着复合材料结构层数的增大, Pagano方法中最后求解的方程数目越来越大, 效率越来越低。为此, 陈伟球等^[11-15]提出了非完美粘结层合结构的状态空间分析方法, 该方法由于最后方程数目不随层数的增加而增大, 因此计算效率非常高。通过算例比较, 还可以看到Cheng等人^[2,3,5]所提出的广义折线型简化理论(zigzag theory)的精度随着界面柔度系数的提高而很快下降。Wang和Zhong^[16]对于非完美粘结的且具有表面压电层的无限长层合圆柱壳提出了一种传递矩阵分析方法, 这一方法的实质和状态空间法^[11-15]基本上是一致的。

以上文献处理弱界面时都把其理想化为线性弹簧模型, 这在状态空间方法中只需引进所谓的界面传递矩阵即可^[11-15]。尚有许多其它类型的弱界面模型, 比如粘性界面模型可以用来描述高温环境时界面的流动特性。He和Jiang^[17]针对这一模型将Pagano的分析方法作了推广, 获得了一个

精确的弹性解。鉴于前述Pagano方法的缺点, Chen和Lee^[18]最近联合运用状态空间法和时间域内的分段近似法, 提出了一种半解析的高精度、高效迭代分析方法, 其中每次迭代求解的方程数目和一般的状态空间法^[12]相同。

本文在文献[18]的基础上, 进一步求得了一个精确的状态空间解。在时间域内, 不用Taylor展开近似, 而是将有关控制方程转化成状态方程, 从而可以精确求解。尽管这一状态方程的阶数也随粘性界面的增多而增大, 但是由于不需要进行迭代计算, 因此计算效率非常高; 同时由于在时空域内都表达成状态空间列式, 因此可以利用Mathematica或者Matlab所提供的矩阵运算功能, 编程较为简单。本文得到的解没有采用任何近似假设, 因此是完全精确的, 可以作为近似分析或数值分析的基准解。

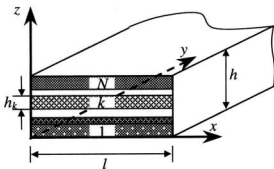


图1 层合板的柱形弯曲

Fig.1 Cylindrical Bending of rectangular laminate

1 状态空间法

考虑一个N层的斜交铺设的复合材料矩形板(图1), 假设其处于柱形弯曲状态, 即x、y和z三方向的位移u、v和w都与坐标变量y无关, 相应的弹性力学状态方程为^[18]

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ u \\ v \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{c_{44}}{\alpha} & -\frac{c_{45}}{\alpha} \\ \text{sym.} & & \frac{c_{55}}{\alpha} \\ \frac{1}{c_{33}} & -\frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{c_{36}}{c_{33}} \frac{\partial}{\partial x} \\ \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ \text{sym.} & \beta_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ u \\ v \\ w \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中各符号的意义同文献[18](下同)。对于两边简支条件, 上述方程的精确解为^[18]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ u \\ v \\ w \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -c_{44}^{(1)} \bar{\sigma}_z(\zeta, t) \sin(n\pi\zeta) \\ h\bar{u}(\zeta, t) \cos(n\pi\zeta) \\ h\bar{v}(\zeta, t) \cos(n\pi\zeta) \\ h\bar{w}(\zeta, t) \sin(n\pi\zeta) \\ c_{44}^{(1)} \bar{\tau}_{xz}(\zeta, t) \cos(n\pi\zeta) \\ c_{44}^{(1)} \bar{\tau}_{yz}(\zeta, t) \cos(n\pi\zeta) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中 $\zeta = z/h$ 和 $\xi = x/l$ 为无量纲坐标, n 为半波数, $c_{44}^{(1)}$ 中的上标(1)代表第一层(底层), 且

$$\mathbf{V}(\zeta, t) = \exp[\mathbf{A}(\zeta - \zeta_{k-1})] \mathbf{V}(\zeta_{k-1}, t), \quad (\zeta_{k-1} \leq \zeta \leq \zeta_k, k=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

其中

$\mathbf{V}(\zeta, t) = [\bar{\sigma}_z(\zeta, t), \bar{u}(\zeta, t), \bar{v}(\zeta, t), \bar{w}(\zeta, t), \bar{\tau}_{xz}(\zeta, t), \bar{\tau}_{yz}(\zeta, t)]^T$ 为无量纲状态矢量, $\zeta_0 = 0$, $\zeta_k = z_k/h = \sum_{j=1}^k h_j/h$, h_k 为第k层的厚度。上式中 $\mathbf{A}$ 为常数矩阵, 其表达式详见文献[12,18]。在式(3)中令 $\zeta = \zeta_k$, 可以得到

$$\mathbf{V}_1^{(k)} = \mathbf{M}_k \mathbf{V}_0^{(k)} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{V}_1^{(k)}$ 和 $\mathbf{V}_0^{(k)}$ 分别是第k层上下表面的无量纲状态矢量, $\mathbf{M}_k = \exp[\mathbf{A}(\zeta_k - \zeta_{k-1})]$ 为该层的传递矩阵。

2 粘性界面条件

如令 $\delta_x^{(k)}$ 和 $\delta_y^{(k)}$ 为第k个界面处上下层之间在x和y方向的相对错动, 则它们也有如下Fourier展开式

$$\delta_x^{(k)} = h \bar{\delta}_x^{(k)}(t) \cos(n\pi\zeta), \quad \delta_y^{(k)} = h \bar{\delta}_y^{(k)}(t) \cos(n\pi\zeta) \quad (5)$$

因此该界面处需满足的条件可表示为

$$\mathbf{V}_0^{(k+1)} = \mathbf{V}_1^{(k)} + \mathbf{Q}^{(k)} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{Q}^{(k)} = [0, \bar{\delta}_x^{(k)}, \bar{\delta}_y^{(k)}, 0, 0, 0]^T$, 而且

$$\frac{d\bar{\delta}_x^{(k)}}{d\tau} = \bar{\tau}_{xz}^{(k)} \bar{\eta}_x^{(k)}, \quad \frac{d\bar{\delta}_y^{(k)}}{d\tau} = \bar{\tau}_{yz}^{(k)} \bar{\eta}_y^{(k)} \quad (\zeta = z_k) \quad (7)$$

其中 $\tau = c_{44}^{(1)} t / [\eta_x^{(1)} h]$ 为无量纲时间, $\bar{\eta}_i^{(k)} = \eta_i^{(1)} / \eta_i^{(k)}$ ($i=x, y$)。式(6)是无量纲化的粘性界面本构方程。到目前为止, 本文公式和文献[18]中的完全一致, 但接下来我们将展示精确分析方法的过程。

3 精确解

利用式(6)和式(4), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0^{(2)} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{V}_0^{(1)} + \mathbf{Q}^{(1)} \\ \mathbf{V}_0^{(3)} &= \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{V}_0^{(1)} + \mathbf{M}_2 \mathbf{Q}^{(1)} + \mathbf{Q}^{(2)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_0^{(N)} = \left(\sum_{j=N-1}^1 \mathbf{M}_j \right) \mathbf{V}_0^{(1)} + \left(\sum_{j=N-1}^2 \mathbf{M}_j \right) \mathbf{Q}^{(1)} + \dots + \mathbf{M}_{N-1} \mathbf{Q}^{(N-2)} + \mathbf{Q}^{(N-1)} \quad (8)$$

$$\mathbf{V}_1^{(N)} = \left(\sum_{j=N}^1 \mathbf{M}_j \right) \mathbf{V}_0^{(1)} + \left(\sum_{j=N}^2 \mathbf{M}_j \right) \mathbf{Q}^{(1)} + \dots + \mathbf{M}_N \mathbf{M}_{N-1} \mathbf{Q}^{(N-2)} + \mathbf{M}_N \mathbf{Q}^{(N-1)}$$

假设仅板的上表面作用有法向正弦荷载 $c_{44} q_n \sin(n\pi\xi)$, 则从上式的最后一式可以得到

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} T_{1,N}^{12} & T_{1,N}^{13} & T_{1,N}^{14} \\ T_{1,N}^{52} & T_{1,N}^{53} & T_{1,N}^{54} \\ T_{2,N}^{62} & T_{2,N}^{63} & T_{2,N}^{64} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} q_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_x^{(1)} \\ \bar{\delta}_y^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{3,N}^{12} & T_{3,N}^{13} \\ T_{3,N}^{52} & T_{3,N}^{53} \\ T_{3,N}^{62} & T_{3,N}^{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_x^{(2)} \\ \bar{\delta}_y^{(2)} \end{bmatrix} - \dots - \begin{bmatrix} T_{N,N}^{12} & T_{N,N}^{13} \\ T_{N,N}^{52} & T_{N,N}^{53} \\ T_{N,N}^{62} & T_{N,N}^{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_x^{(N-1)} \\ \bar{\delta}_y^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 $T_{k,p}^u$ 是矩阵 $\mathbf{T}_{k,p} = \sum_{j=p}^k \mathbf{M}_j$ ($p \geq k$) 的相应元素, $\mathbf{U}_0 = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]^T$ 为下表面处的位移列阵。从上式可以看出, 层合板底面位移不仅和作用的荷载有关, 而且也与相邻层之间的相互错动有关。从式(8)中的其它各式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \bar{\delta}_1 &= \eta_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{U}_0 \\ \frac{d}{d\tau} \bar{\delta}_2 &= \eta_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{U}_0 + \eta_2 \mathbf{W}_{2,2} \bar{\delta}_1 \\ &\vdots \\ \frac{d}{d\tau} \bar{\delta}_{N-1} &= \eta_{N-1} \mathbf{N}_{N-1} \mathbf{U}_0 \\ &\quad + \eta_{N-1} (\mathbf{W}_{2,N-1} \bar{\delta}_1 + \dots + \mathbf{W}_{N-1,N-1} \bar{\delta}_{N-2}) \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\bar{\delta}_j = [\bar{\delta}_x^{(j)}, \bar{\delta}_y^{(j)}]^T$, 且

$$\eta_j = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_x^{(j)} & 0 \\ 0 & \bar{\eta}_y^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} T_{1,j}^{52} & T_{1,j}^{53} & T_{1,j}^{54} \\ T_{1,j}^{62} & T_{1,j}^{63} & T_{1,j}^{64} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{i,j} = \begin{bmatrix} T_{i,j}^{52} & T_{i,j}^{53} \\ T_{i,j}^{62} & T_{i,j}^{63} \end{bmatrix}$$

利用式(9), 可以将式(10)改写成

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\delta} = \mathbf{S} \bar{\delta} + \mathbf{H} q_n \quad (11)$$

其中 $\bar{\delta} = [\bar{\delta}_1^T, \bar{\delta}_2^T, \dots, \bar{\delta}_{N-1}^T]^T$, 而 $\mathbf{S}$ 为 $2(N-1) \times 2(N-1)$ 的矩阵, $\mathbf{H}$ 是 $2(N-1)$ 阶的荷载系数列阵, 它们的元素容易从式(10)得到。考虑到零初始条件, 式(11)的解为

$$\bar{\delta} = q_n \int_0^t e^{\mathbf{S}(t-\tau)} \mathbf{H} d\tau \quad (12)$$

得到了各粘性界面处的相对位移后, 层合板中的物理量便可以完全确定^[18]。

4 数值论证

考察 He 和 Jiang^[17] 文中的含粘性界面的两层各向同性板承受正弦荷载 $q = p_0 \sin(\pi\xi)$ 作用的问题, 有关参数可以在文献[17]或者[18]中找到, 这里略。计算结果及其与文[17,18]的比较见表 1, 其中有关的无量纲量定义如下

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_z(l/2, h/2, t)}{p_0}, \quad \omega_1 = \frac{\tau_{xz}(0, h/2, t)}{p_0} \\ w_0 &= \frac{c_{44}}{p_0} \frac{w(l/2, h/2, t)}{h}, \quad u_0 = \frac{c_{44}}{p_0} \frac{u(0, h/2, t)}{h} \\ v_0 &= \frac{c_{44}}{p_0} \frac{v(0, h/2, t)}{h} \end{aligned}$$

可以看到本文的精确解和我们在文献[18]中得到的结果完全一致。这里必须说明的是, He 和 Jiang^[17] 的解理论上是完全精确的, 但是我们计算时采用了他们文中附录所给出的公式, 这些公式中的有关数字含有截断误差, 因此和本文及文[18]的结果稍有差别。

表 1 二层各向同性板的计算结果比较

Table 1 Comparison for a two-layered isotropic laminate in cylindrical bending

		文[17]	文[18]	本文
$\tau = 10$	σ	0.3740	0.373995	0.373995
	ω_1	-3.1761	-3.17628	-3.17628
	$u_0^{(1)}$	10.971	10.9662	10.9662
	$u_0^{(2)}$	-26.555	-26.5501	-26.5501
	w_0	-436.813	-436.747	-436.747
$\tau = 30$	σ	0.3148	0.314831	0.314831
	ω_1	-1.6604	-1.66080	-1.66080
	$u_0^{(1)}$	38.028	38.0178	38.0178
	$u_0^{(2)}$	-46.252	-46.2429	-46.2429
	w_0	-641.947	-641.837	-641.837

另外, 也考察了文[18]中的五层正交或斜交铺设的矩形板, 发现计算结果同文[18]也完全一致(文[18]第 242 页例数第二行 $\bar{\eta}^{(1)} = 2\bar{\eta}^{(3)}$ 应为 $\bar{\eta}^{(3)} = 2\bar{\eta}^{(1)}$), 这里不再列出; 有关粘性界面对层合板内弹性场分布的影响也请参阅文[18]。

5 结论

本文没有采用任何近似来描述层合板中弹性场随时间的变化, 而是精确求解了时间域内的一个状态方程, 因此本文方法是完全精确的。与文献的比较证明了本文推导及其编程都正确无误, 同时也证明了文[18]中所提出的半解析法具有非