

改 著

X線応力測定法

日本材料学会編

75.227
141

改 著

X線応力測定法

日本材料学会編



1981

55427/17

東 京

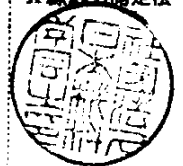
株 式 会 社

養 賢 堂 発 行

1981

昭和 56 年 4 月 10 日 第 1 版発行

改 著
X 線応力測定法



© 著作権所有

著 作 者 日 本 材 料 学 会

発 行 者 株式会社 養 賢 堂
代 表 者 及 川 鋭 雄

印 刷 者 合資会社 真 興 社
責 任 者 福 田 三 郎

定価 2800 円

東京都文京区本郷 5 丁目 30 番 15 号

発 行 所 株式会社 養 賢 堂

振替東京 2-25700・電話東京 (814) 0911 番 (代表) 〒 113

製本所 有限会社 新墨製本所

序 文

X線応力測定では、材料を構成する金属結晶組織からのX線回折環のピーク位置が、巨視的弾性変形により変化することを利用して応力を算定する。この方法は、残留応力を非破壊的に測定しうる唯一の方法として、古くから工業界の関心を集めている。しかし、X線回折像は結晶組織の変化に極めて敏感であるから、測定には金属材料が変形時に示す微視的な現象に対する理解も必要である。

日本材料学会が、図書“X線応力測定法”の初版を刊行したのは1966年であった。これは、当時の材料学会、X線材料強度部門委員会の共同研究の成果に基づき、X線応力測定法が正しい認識のもとに、工業的な応力測定法として広く利用されることを意図して編集された。しかし、最近の科学技術の急速な進歩と、X線回折機器ならびにX線回折法の応用、解析法の大きな発展から、初版出版後数年にしてすでに、改訂の必要が関係者の間で論じられ、一部ではその作業も進められたようである。

その間において、X線材料強度部門委員会の成果の一部は、図書“X線材料強度学（基礎編、実験法編）”として、養賢堂から出版された。また、部門委員会の、X線応力測定法に関する共同研究も熱心に続けられ、“X線応力測定法標準”が作成され、さらに、その改訂作業も進められている。

このような状況のなかで、今回ようやく、“X線応力測定法”改訂版が出版される運びになった。これは、本部門委員会の白岩前委員長を編集責任者とし、委員として活躍しておられる執筆者により、全面的に書き改められたものである。長年絶版の形にあった本書が、現状に則した新しい形で、再び刊行されることは、この方面の研究に関心を持つ者の一人として、誠に嬉しいことである。

本書が、すでにX線応力測定に何らかの関係を持っておられる方々の間で、便利に利用されるのみでなく、一人でも多くの方が、この方法に興味と

(ii) 序 文

理解を持って頂くよすがにもなることを祈って筆をおく次第である。

社団法人 日本材料学会

X線材料強度部門委員会

委員長 青 山 咸 恒

本書を読まれる方へ

社団法人日本材料学会X線材料強度部門委員会は当初、X線応力測定部門委員会として1961年12月に大阪大学名誉教授 故小島公平先生を委員長として発足した、以来この方面に関心のある大学を始め諸研究機関、事業所に所属しておられる100有余名の委員の方々の熱心な研究活動が展開され、応力測定法としてのX線法が工業的立場における応力測定法として実用に適するものであることが実証され、測定機器の開発とともに正しい認識の下に広く一般に利用されるようになってきた。

さらに部門委員会活動は、X線応力測定法のみならず、X線回折法を基礎としこれに関連する実験方法とともに、材料の微視的な組織変化を捉える各種の実験手段が開発され、広く材料強度の研究へ応用され、多大の成果を挙げてきた。この方面の研究に指導的役割をつとめてこられたのは小島公平先生から委員長を引き継がれた京都大学教授 故平修二先生である。部門委員会の今日の活発な活動の基盤は両先生によって築かれたものである。真に惜しくも1978年の晩秋にお二方とも相次いで他界されたことは痛恨の極みである。謹しんでご冥福をお祈りするとともに両先生の優れたご業績が部門委員会の発展の基盤となっていることを深く思いおこすものである。

X線材料強度部門委員会では、X線応力測定法の確立を目指して、部門委員会設立当初から分科会を設けて測定技術に関する共同研究を展開してきた。その成果の一部は1972年に日本材料学会から“X線応力測定法標準”として刊行された。現在わが国における唯一の測定法マニュアルとして広く活用されている。1977年から始められたオーステナイト系鋼のX線応力測定に関する共同研究（X線弾性定数および残留応力測定）の一部が最近になってまとめられ、上記X線応力測定法標準の改訂作業が進められている。

本書はさきに刊行された図書“X線応力測定法”を上述のX線応力測定法標準にのっとり全面的に改筆したもので、併せて測定機器、測定技術、応用例などに関する最新の情報を盛り込んである。

本章の構成はまず第1章および第2章で応力およびひずみ、X線の性質などに関する基礎的事項を説明した。第3章ではX線応力測定法の原理と測定法および測定の実際について述べた。第4章では応力測定装置の構成および関連機器について述べた。第5章ではX線応力測定法を実際に適用する上での留意点についてまとめ、測定上の問題点、使用する定数、測定対象との関係などについてふれた。第6章ではX線応力測定の方法強度への応用を中心にして最近の実測例を含めて述べた。第7章ではX線以外の応力測定法について概略を示した。

本書は以上7章より構成しているが全編を通じてできるだけ平易に記述するとともにていねいな説明図と写真を付しており、大学理工学部学生諸君を始めとして広く技術者、研究者諸氏に活用して戴けるよう配慮した心算である。

本書を刊行するに当り、この方面にご関係の研究者諸氏に資料のご提供を賜わった。深甚なる謝意を表するとともに刊行の機会を与えて下さった株式会社 養賢堂社長 及川鋭雄氏に厚くお礼申しあげる。

編集者 著者一同

目 次

第1章 応力およびひずみ……………1

1.1 応力およびひずみの

基礎式……………1

1.1.1 弾性体内の一点におけ

る応力……………1

1.1.2 座標変換による応力成分……………4

1.1.3 主応力および主せん断

応力……………4

1.1.4 Mohr の応力円……………8

1.1.5 応力のつりあい方程式 ……10

1.1.6 ひずみと変位 ……11

1.1.7 主ひずみおよび主せん

断ひずみ ……14

1.1.8 応力-ひずみ関係式……………17

第2章 X線の性質、物質との相

互関係……………21

2.1 X線結晶学概説……………21

2.1.1 結晶格子 ……21

2.1.2 結晶方向と格子面 ……24

2.1.3 ステレオ投影法 ……27

2.2 X線の発生と性質……………33

2.2.1 X線の波長とエネルギー ……33

2.2.2 X線の発生 ……33

2.2.3 連続X線 ……33

2.2.4 特性X線 ……35

2.2.5 蛍光X線 ……38

2.2.6 X線の一般的性質 ……38

2.3 X線の吸収……………40

2.4 Lorentz かたより因子と

吸収因子……………44

2.5 結晶によるX線の回折 ……48

2.5.1 体心立方格子 ……52

2.5.2 面心立方格子 ……52

第3章 X線による応力測定法 ……54

3.1 測定の原理……………54

3.1.1 X線応力測定法とその特徴

……………54

3.1.2 基礎理論……………57

3.1.3 X線的弾性定数の測定法 ……60

3.1.4 残留応力の測定……………62

3.2 測定の方法……………62

3.2.1 $\sin^2 \psi$ 法と簡便法……………62

3.2.2 回折角の測定法……………63

(1) 回折X線の検出方法……………64

(2) θ 角の測定方向……………65

(3) X線の入射方法……………66

3.3 測定の実際……………68

3.3.1 測定の手順……………68

3.3.2 被測定物の表面処理……………68

3.3.3 測定方法の選定……………71

3.3.4 測定条件の選定……………71

(1) 特性X線……………71

(2) 管電圧と管電流……………72

(3) 入射および受光スリット……………72

(4) 照射面積……………73

(5) X線入射角……………73

(6) 時定数と走査速度……………73

3.3.5 回折角の決定法……………73

(1) 半価幅法……………74

(2) 切線法……………75

(3) 放物線近似法……………75

3.3.6 計数管法による測定……………76

(2) 目 次

(1) データの解析と応力値の算出	77
(2) 測定誤差の推定	80
(3) 吸収補正	81
3.3.7 写真法による測定	83
(1) フィルム撮影法と比較物質 の取扱い	83
(2) データの解析と応力値の算出	85
第4章 X線応力測定装置	89
4.1 X線応力測定装置について	89
4.2 X線応力測定装置の構成	91
4.3 X線管球およびX線発生 装置	92
4.3.1 X線管球	92
4.3.2 X線発生装置	95
4.4 計数管式応力測定装置	97
4.4.1 ゴニオメータ	97
(1) 分析用ゴニオメータ	97
(2) 並傾法ゴニオメータ	101
(3) 側傾法ゴニオメータ	102
(4) ゴニオメータの使用上の諸 注意	103
4.4.2 検出器	104
(1) GM管, PC管	104
(2) SC管	106
4.4.3 計数および記録装置	107
(1) 検出器高圧電源	107
(2) ディスクリミネータあるいは PHA	107
(3) レートメータ	108
(4) 記録計	109
(5) スケータ	109
4.4.4 自動測定とゴニオメータ コントローラ	109
(1) ゴニオメータコントローラ	110
(2) データ処理処置	111

4.4.5 最近のX線応力測定装置	112
4.4.6 測定機器の検査	113
(1) X線管, X線発生装置, 検 出器, 計数装置の検査	113
(2) ゴニオメータの走査速度, 角度マークの検査	114
(3) ゴニオメータのX線入射角, セッティング治具の検査	114
(4) 応力測定精度の検査	114
(5) 経年的変化の検査	114
4.5 写真式応力測定装置	115
4.5.1 背面反射型カメラ	115
4.5.2 X線フィルム	116
4.5.3 ミクロフォトメータ	118
4.5.4 フィルムコンパレータ	119
第5章 X線応力測定における留 意点とその考え方	121
5.1 応力測定に際して	121
5.2 測定法に関する留意点	121
5.2.1 X線回折面および特性 X線の選び方	121
5.2.2 スリット系	123
5.2.3 測定精度に及ぼす統計 変動要因の影響	125
(1) 放物線近似法	127
(2) 半価幅中点法	127
(3) 重心法の場合	128
5.3 X線の弾性定数と回折面 依存性	129
(1) Voigt モデル (ひずみ一定)	130
(2) ReuB モデル (応力一定)	132
(3) Kröner モデル	133
5.4 金属組織学的留意点	136
5.4.1 粒晶粒度の影響	136
5.4.2 成分, 組織の影響	139
(1) 成分の影響	139

(2) 組織の影響	140	質の評価	185
5.4.3 集合組織の影響	141	6.3.1 品質管理	185
5.5 X線浸透深さの影響	145	6.3.2 材料強度評価	186
5.6 機械工学的留意点	149	6.3.3 損傷の検出	190
5.6.1 被測定物の形状	149	6.3.4 X線フラクトグラフィー	197
5.6.2 被測定物の表面性状	150	6.3.5 X線回折法のその他の 材料強度問題への応用	203
第6章 応力測定と材料強度	156	(1) 混合組織材料および複合材 料の変形	203
6.1 応力測定とX線回折法	156	(2) 細束X線回折法による局所 の応力および変形の観察	205
6.1.1 応力測定の必要性	156	(3) その他の材料強度問題	207
6.1.2 巨視的応力および微視 的応力と強度	157	第7章 その他の応力測定法	211
6.1.3 X線回折法により得ら れる材料情報	158	7.1 機械的および光学的ひ ずみ計	211
6.2 応力の諸現象に及ぼす 影響	160	7.2 電気抵抗型ひずみ計	212
6.2.1 物理的および金相学的 現象への影響	160	7.3 光弾性実験法	215
6.2.2 材料強度学的諸現象へ の影響	163	7.3.1 平面光弾性法	216
(1) 静的強度に及ぼす影響	163	7.3.2 三次元光弾性法	220
(a) 降伏および変形	163	7.3.3 光弾塑性法	222
(b) パウシンガー効果	166	7.3.4 光塑性法	223
(c) 座屈	167	7.4 応力塗料	224
(d) 硬さ	170	7.5 モアレ法	226
(2) 残留応力の破壊に及ぼす影響	171	7.6 類似現象を利用する方法	230
(a) 焼割れおよび研削割れ	171	7.7 残留応力の測定法	231
(b) 脆性破壊	173	7.7.1 円筒の残留応力	231
(c) 応力腐食割れ	175	7.7.2 板の残留応力	235
(3) 残留応力の疲労に及ぼす影響	178	索引	241
(a) 疲労過程中的変化	178		
(b) 疲労強度に及ぼす影響	181		
6.3 X線回折法による材料品			

第 1 章 応力およびひずみ

本章では X 線応力測定の基本となる応力とひずみの諸関係について述べている。表現はテンソル表示とし、応力およびひずみの基礎式、主応力と主ひずみ、および両者の関係式までを示した。X 線との関連については、対象材料が結晶体であることから結晶の力学的挙動と関係づけて後に述べる。

1.1 応力およびひずみの基礎式¹⁾

1.1.1 弾性体内の一点における応力

図 1.1 に示すような任意の形状の弾性体が、数個の外力を受けてつりあい状態にある時、この物体の任意の断面 S には、外力によって定まる P なる力が作用、反作用として働いている。 S 断面上の任意の点 O に働く応力は、 O 点のまわりに微小面積 dA をとり、これに作用する力を dP として

$$p = \frac{dP}{dA} \quad (1.1)$$

で与えられる。この p はベクトルとして表わされるが、その方向は一般に面 S に垂直でなく、図に見るように S 面に垂直に働く垂直応力 (normal stress) σ と、 S 面内に働くせん断応力 (shear stress) τ とに分解される。 σ 、 τ を用いて $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ となるので、 p を合応力 (resultant stress) という。

一般に弾性体内の一点 O における応力状態を表わすには、図 1.1 のように

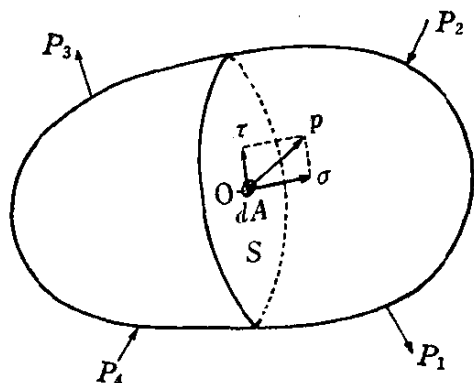


図 1.1 弾性体内の任意の面に作用する応力

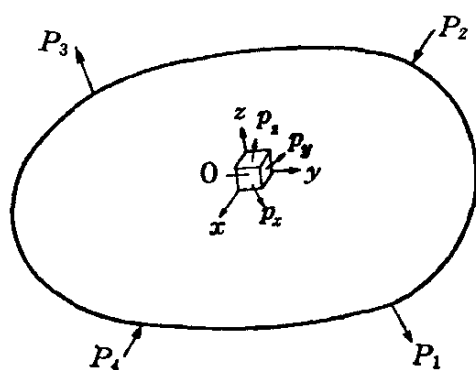


図 1.2 弾性体内の任意の一点における
応力の表現法

一つの面上の単一なベクトル量としてではなく、図 1・2 に示すように O 点を通る直角座標軸 xyz をとり、各 x, y, z 面に作用する 3 個の合応力 p_x, p_y, p_z をもって表わすか、または図 1・3 のように各 x, y, z 面に働く 3 個の垂直応力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ および 6 個のせん断応力成分 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 計 9 個の応力成分をもて表わさねばならない。この 9 個の応力成分は応力テンソル (stress tensor) と呼ばれ、 $\sigma_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ で表わすが、これはマトリックス形で次のように書ける。

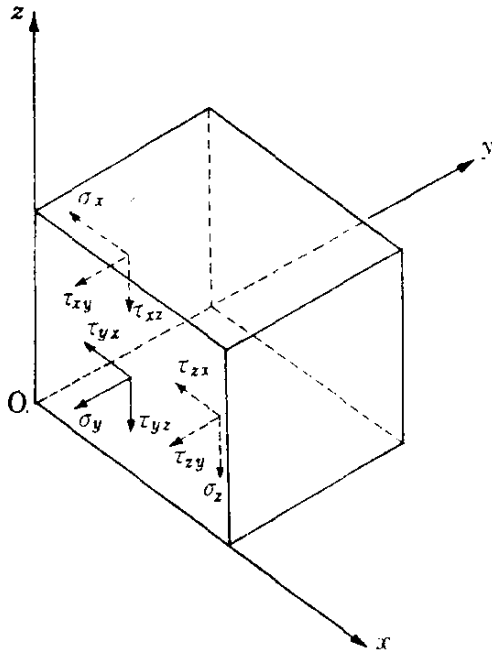


図 1・3 弾性体内の任意の一点における
応力の表現法

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

テンソル表示では $\sigma_{11}=\sigma_x, \sigma_{22}=\sigma_y, \sigma_{33}=\sigma_z, \sigma_{12}=\tau_{xy}, \sigma_{23}=\tau_{yz}$ などと対応する。せん断応力成分の間には共役の関係によって $\tau_{yx}=\tau_{xy}, \tau_{zy}=\tau_{yz}, \tau_{zx}=\tau_{xz}$ であるから、実際には $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ の 6 個の応力成分によって、O 点の応力状態は完全に表現できる。上に述べた各応力成分は、O 点を通る x, y, z 面 (x 面は x 軸に垂直な面など) に作用する応力である。

次に x, y, z 軸と任意の傾きを持つ面上に作用する応力を求める。図 1・4 において面 ABC を任意の傾斜面とし、原点 O からこの面へおろした法線 On の方向角を α, β, γ とする。ABC 面に作用する合応力を p とし、この方向角を λ, μ, ν とし、 p と垂直応力 σ とのなす角を ϕ とする。 p の x, y, z 軸方向の成分を p_x, p_y, p_z とすると、各軸方向のつりあいより次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \cos \lambda = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ p_y &= p \cos \mu = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ p_z &= p \cos \nu = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

ただし, l, m, n は方向余弦 (direction cosines) と呼ばれ, $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, $n = \cos \gamma$ である. (1.3) 式は ABC 面上で各応力成分が満足すべき式で, これを境界条件 (boundary conditions) という. $\sigma = p \cos \varphi$ および $\cos \varphi = l \cos \lambda + m \cos \mu + n \cos \nu$ なる関係が成り立つので, (1.3) 式の第 1, 2, 3 式にそれぞれ l, m, n を乗じて, これらを加えることによって

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl) \quad (1.4)$$

を得る. また (1.3) 式より

$$\begin{aligned} p^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ &= (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n)^2 + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n)^2 + (\tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n)^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

となる. σ, p が求まると, せん断応力は $\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2}$ として求まり, また角 φ は $\tan \varphi = \tau / \sigma$ から計算できる.

上の特別な場合として, 平面応力状態の時, 次のようになる. 図 1.5 において, 法線が x 軸と角 θ をなす任意の斜面 AB に作用する応力 σ と τ は, それぞれ法線 On の方向および面 AB の方向における力のつりあいより, 次のように表わされる.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (1.6)$$

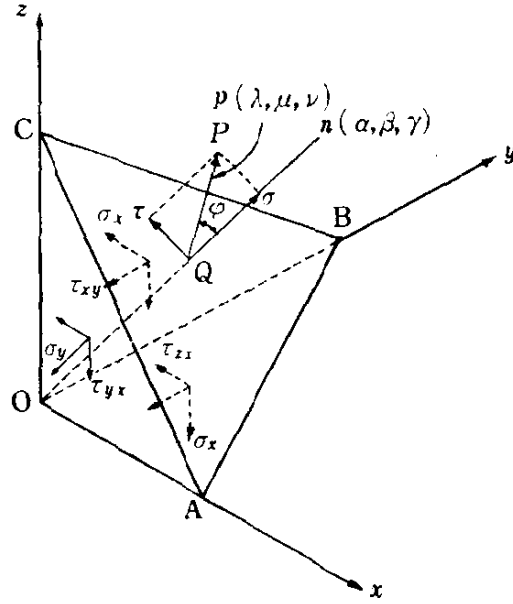


図 1.4 任意の傾斜面上の応力

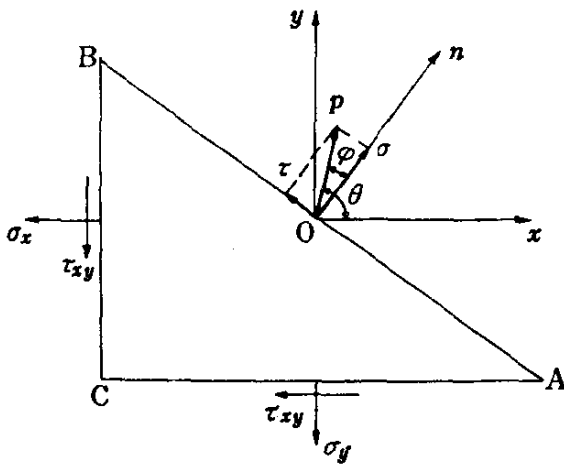


図 1.5 平面応力状態における任意の傾斜面上の応力

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

上式の σ は (1.4) 式で $l = \cos \theta$, $m = \sin \theta$, $n = 0$, $\sigma_x = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ においても求められる. また合応力 p および角 φ は

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \theta + \sigma_y^2 \sin^2 \theta + (\sigma_x + \sigma_y)\tau_{xy} \sin 2\theta + \tau_{xy}^2 \\ \tan \varphi &= \tau / \sigma \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

より求められる.

1.1.2 座標変換による応力成分

任意の直角座標軸 xyz に関する 6 個の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ が与えられると, 原点 O を共有する他の任意の直角軸 $\xi\eta\zeta$ に関する各応力成分は, 両座標軸のなす角の方向余弦を

	x	y	z
ξ	l_1	m_1	n_1
η	l_2	m_2	n_2
ζ	l_3	m_3	n_3

とすると, 垂直応力成分は (1.4) 式より, せん断応力成分は ξ, η 面上の合応力を考えて (1.3) 式を用いることにより, 次のように表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2(\tau_{xy} l_1 m_1 + \tau_{yz} m_1 n_1 + \tau_{zx} n_1 l_1) \\ \sigma_\eta &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2(\tau_{xy} l_2 m_2 + \tau_{yz} m_2 n_2 + \tau_{zx} n_2 l_2) \\ \sigma_\zeta &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2(\tau_{xy} l_3 m_3 + \tau_{yz} m_3 n_3 + \tau_{zx} n_3 l_3) \\ \tau_{\xi\eta} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) \\ &\quad + \tau_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \tau_{zx}(n_1 l_2 + n_2 l_1) \\ \tau_{\eta\zeta} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy}(l_2 m_3 + l_3 m_2) \\ &\quad + \tau_{yz}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \tau_{zx}(n_2 l_3 + n_3 l_2) \\ \tau_{\zeta\xi} &= \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy}(l_3 m_1 + l_1 m_3) \\ &\quad + \tau_{yz}(m_3 n_1 + m_1 n_3) + \tau_{zx}(n_3 l_1 + n_1 l_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

1.1.3 主応力および主せん断応力

図 1.2 において x, y, z 軸をある特定の方向にとると, 3 個の合応力 p_x, p_y, p_z はそれぞれ x, y, z 面に垂直となって, せん断応力成分は消失する. この場合の 3 個の垂直応力を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で表わして, これらを主応力

(principal stresses) という。普通 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ にとるが、この時 σ_1 , σ_3 は物体に働くすべての垂直応力のうち、それぞれ最大値および最小値を与える。これらの3主応力の作用方向は互いに直交しており、これを主応力軸といい、主応力の作用する3直交面を主応力面という。

主応力が存在することは次のように証明できる。いま (1.8) 式の σ_ξ をとり、この作用方向の方向余弦を l , m , n とすると

$$\sigma_\xi = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl) \quad (a)$$

となる。また方向余弦の性質から

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (b)$$

である。(a), (b) 式において l , m を独立変数と考え、 σ_ξ が極値をとる軸の方向余弦を求めるために

$$\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial m} = 0$$

とおくと、(a) 式より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n + (\tau_{xx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z m) \frac{\partial n}{\partial l} &= 0 \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n + (\tau_{xx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n) \frac{\partial n}{\partial m} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

を得る。同様に (b) 式を l , m で微分して

$$l + n \frac{\partial n}{\partial l} = 0, \quad m + n \frac{\partial n}{\partial m} = 0 \quad (d)$$

(d) 式を (c) 式に代入して

$$\frac{\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n}{l} = \frac{\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n}{m} = \frac{\tau_{xx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n}{n} \quad (e)$$

が得られる。(e) 式は (1.3) 式を用いると

$$\frac{P_x}{l} = \frac{P_y}{m} = \frac{P_z}{n} \quad (f)$$

となる。(f) 式は合応力の成分がそれぞれ方向余弦に比例することを示しており、このことは合応力が面に垂直であることにほかならない。すなわち、この面が主応力面である。

$$\frac{P_x}{l} = \frac{P_y}{m} = \frac{P_z}{n} = \sigma$$

とおくと、主応力の大きさは

$$p_x l + p_y m + p_z n = \sigma (l^2 + m^2 + n^2) = \sigma$$

となる。(e) 式を σ に等置した式より

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

を得る。上式は l, m, n に関する連立 1 次方程式で、(b) 式より l, m, n は同時に零とはならないから、(g) 式の各係数の行列式は零でなければならない。すなわち

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

この行列式を展開して

$$\begin{aligned} &\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2)\sigma \\ &- \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

この 3 次方程式の 3 根は主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の値を与える。これらの値を順次 (g) 式に代入した式と (b) 式とから l, m, n の値が求まり、主応力軸の方向が定まる。(1.9) 式を

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0$$

と表わすと、 J_1, J_2, J_3 は座標軸のとり方に無関係に、それぞれ一定値となるので、これらを応力成分の不変量 (stress invariants) と呼ぶ。(1.9) 式はまた $(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$ と書けるから、 $J_1 \sim J_3$ は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

図 1.4 において x, y, z 軸を主応力軸にとると、せん断応力成分は消失するから、(1.4), (1.5) 式は次のように簡単となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \\ p^2 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \\ \tau^2 &= p^2 - \sigma^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

次にせん断応力は隣接する2主応力面を2等分する3種の面上で極値をとり、次の値となることを証明することができる*。

$$\tau_1 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_2 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \quad \tau_3 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.12)$$

これらを主せん断応力 (principal shear stresses) という。

平面応力の場合には (1.6) 式から $d\sigma/d\theta=0$, $d\tau/d\theta=0$ を求めて、 σ , τ が極値をとる傾き角はそれぞれ

$$\tan 2\theta_n = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{および} \quad \tan 2\theta_t = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \quad (1.13)$$

で与えられる。上式より $\tan 2\theta_n \cdot \tan 2\theta_t = -1$ なる関係があるので、 $\theta_t = \theta_n \pm (\pi/4)$ となる。 σ , τ の極値すなわち主応力および主せん断応力は、(1.13) 式から $\sin 2\theta_n$, $\cos 2\theta_n$ および $\sin 2\theta_t$, $\cos 2\theta_t$ を求めて、これらを (1.6) 式に代入することによって次のように求められる。

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (1.14)$$

$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (1.15)$$

図 1.5 において x , y 軸を主応力軸にとると、(1.6), (1.7) 式は次のように簡単となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \\ p^2 &= \sigma_1^2 \cos^2 \theta + \sigma_2^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

例：曲げとねじりを受ける丸軸の表面における主応力は、次のようになる。曲げ応力を $\sigma = 32M/\pi d^3$, ねじり応力を $\tau = 16T/\pi d^3$ として

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

* 現代弾性力学, オーム社, p.10 参照。