

測 量 全 书

第四卷 数学大地測量学

第二分册 球面上和椭圓体面上的大地計算

中国工业出版社出版(北京佟麟閣路丙10号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张34·插頁3·附附录一册·字数728,000

1966年5月北京第一版·1966年5月北京第一次印刷

印数0001—1,580·定价(科五)5.60元

*

統一书号: 15165·4145(测绘-152)

目 录

第三部份 球面上的大地計算

第七章 球面三角形的計算	1
§ 76. 球面上的水平距离和水平角	1
§ 77. 球面角超	2
§ 78. 勒让德尔定理	6
§ 79. 附加教法	11
§ 80. 勒让德尔定理中的较高次项 (球面三角的级数展开包括 $1/r^4$ 次项)	17
第八章 球面直角坐标	29
§ 81. 球面坐标系统的概述	29
§ 82. 球面直角坐标——佐耳德内尔坐标	30
§ 83. 球面直角坐标的察卡里埃公式	44
§ 84. 按球面坐标计算距离和方向角	46
§ 85. 球面角超和横坐标线收敛角	47
§ 86. 各种球面问题	48
§ 87. 球面直角 (佐耳德内尔) 坐标计算的范例	56
第九章 球面上的地理坐标	61
§ 88. 通用符号	61
§ 89. 球面极三角形的微分公式	65
§ 90. 地球上地理坐标、极坐标和直角线坐标的严密计算公式	70
§ 91. 用球面直角坐标推算地理坐标 (高斯解法) 的算例	76
§ 92. 用球面直角坐标推算地理坐标 (克吕格解法)	77
§ 93. 按距离 σ 的各次幂 (取至三次幂 σ^3) 而展开的级数式	81
§ 94. 勒让德尔级数	84
§ 95. 以中纬度为引数的级数展开式 (由弧度两端点的地理坐标计算极坐标)	86
§ 96. 中纬度公式继续展开至五次项	92
第十章 地理坐标与球面直角坐标之间的关系	95
§ 97. 地理坐标 φ, λ 和球面直角坐标 x, y	95
§ 98. 斜轴球面坐标	100
§ 99. 坐标变换	107
第十一章 球面在平面上的表象	113

§ 100. 透視投影与一般的天頂投影	113
§ 101. 圓柱投影与圓錐投影	116
§ 102. 圓球的橫坐标正长投影 (橫軸方格投影)	119
§ 103. 高斯正形投影, 第一次近似	129
§ 104. 高斯正形投影的进一步扩充	138
§ 105. 球面投影	146
§ 106. 球面投影的級数展开	150
§ 107. 球面投影的长度改化和方向改化	152
§ 108. 具有一个正长平行圈的正形圓錐投影	157
§ 109. 正形圓錐直角坐标 x, y	160
§ 110. 正形圓錐投影的长度改化和方向改化	163
§ 111. 其他的圓錐投影	167

第四部份 橢圓体面上的大地測量計算

第十二章 法截弧和大地綫	171
§ 112. 相对法截弧	171
§ 113. 法截面的橢圓弧	179
§ 114. 两条法截弧的收敛	183
§ 115. 照准点的高程对水平角观测的影响	187
§ 116. 利用豎截弧在橢圓体上推算經度、緯度和方位角	189
§ 117. 大地綫	194
§ 118. 一般曲面上的大地綫和大地坐标	196
§ 119. 旋轉橢圓体面上的大地綫	199
§ 120. 大地綫与法截弧的比較	202
第十三章 扁球面三角形的計算	208
§ 121. 大地綫的归化长度	208
§ 122. 扁球面极坐标	211
§ 123. 平行坐标系和极坐标系的关系	213
§ 124. 直角扁球面三角形的級数展开式	215
§ 125. 一般的 (斜角的) 扁球面三角形的計算	221
§ 126. 扁球面三角形的曲面面积	225
§ 127. 扁球面三角形一般理論的实际应用	228
第十四章 扁球面坐标	234
前言	234
§ 128. 概論	235
§ 129. 两种大地主題的唯一性的研究	254
§ 130. 利用勒让德級数解算短距离的第一大地主題	261
§ 131. 短距离的第一大地主題的史賴伯解法	270

§ 132. 利用高斯-克吕格公式短距离和中距离的两种大地主题的解法	278
§ 133. 推算地理坐标的克吕格公式	289
§ 134. 中距离及长距离的两种大地主题的黑耳默特解法	293
§ 135. 中距离及长距离的两种大地主题的黑耳默特解法(附一些补充)	303
§ 136. 按勒瓦路瓦-杜比依法解算中距离及长距离的两种大地主题	334
§ 137. 短距离及中距离的第二大地主题的约尔旦解法	351
§ 138. 短距离及中距离的两种大地主题利用法截弧的解法	360
§ 139. 中距离及长距离的大地主题的近似解法	379
§ 140. 椭圆体上的直角坐标	383
§ 141. 直角坐标和地理坐标的幂级数	396
§ 142. 直角横轴坐标	404
第十五章 地球椭圆体在平面上的表象	411
§ 143. 表象的基本方程式和等量纬度的概述	411
§ 144. 地球椭圆体的正形投影	415
§ 145. 高斯-克吕格投影的赫里斯托夫表示法	418
§ 146. 高斯-克吕格投影中的子午线收敛角和扩大比	426
§ 147. 地理坐标与正形平面坐标的克吕格公式	438
§ 148. 高斯-克吕格投影中的距离改化和方向改化	441
§ 149. 高斯-克吕格坐标的第一和第二大地主题	449
§ 150. 按地理坐标计算高斯-克吕格坐标, 子午线收敛角和扩大比的计算表和算例	451
§ 151. 按高斯-克吕格坐标计算地理坐标	458
§ 152. 计算高斯-克吕格投影中距离改化和方向改化的计算表和算例	458
§ 153. 两相邻高斯-克吕格系统的坐标变换	461
§ 154. 两相邻高斯-克吕格系统间坐标换算的计算表和算例	476
§ 155. 正形投影的幂级数	481
§ 156. 高斯-克吕格投影的幂级数和折点数字表	504
§ 157. 正形圆锥投影	517
§ 158. 球面投影	531
§ 159. 椭圆体的斜轴正形投影	537
§ 160. 地球椭圆体的横轴正形投影	550
§ 161. 椭圆体在圆球上的正形投影	555
第十六章 椭圆体的转换和网的换算	564
§ 162. 椭圆体的转换和网的配合	564
§ 163. 黑耳默特的椭圆体转换和网的配合法	567
§ 164. 博德米勒的正形椭圆体转换和网的配合	581
§ 165. 椭圆体转换和网的换算的其它方法	595
名詞 (中德对照) 索引	598

附录

第 I 部分	辅助用表	[1]
第 II 部分	大地测量演算的数学辅助公式	[86]
第 III 部分	正形坐标计算与换算表的汇集和新的辅助表	[116]

第三部份 球面上的大地計算

第七章 球面三角形的計算

§ 76. 球面上的水平距离和水平角

为了說明測得的水平距离和水平角与算得的或导出的各元素之間的密切关系，我們在这章里先提供 F. R. 黑耳默特关于应用圓球作为投影面的經典理論^①。

在大規模的測图中，我們把地球表面上某一任意部分內的各点都投影到一个水准面上，亦即投影到一个各处都和投影线成正交的表面上。在此把鉛垂线作为投影线，这些鉛垂线都是輕度弯曲的空間曲线，而各水准面則皆是曲面。現在我們第一次近似地把水准面看作是同心球面，而鉛垂线則是經過各球共同中心的直线，所以这些投影即是彼此相似的图形。如果用 r 表示內球的半径，而 h 表示相邻球面間的距离，于是相邻球面上的这些图形的相应边长成下列的比例， $r:(r+h)$ 或 $1:(1+h/r)$ 。 P_1 和 P_2 两点的鉛垂线具有一个共同的豎直面。这个豎直面在地球自然表面上截出一个地形断面，在投影圓球上則截出一个大圓，介于 P_1 和 P_2 之間的大圓的长度就是两点之間的水平距离。水平距离与水准面的高程位置有关，在同心圓球的情况下，則与所选的投影圓球的半径有关。

这里不予証明，而逕指出^②：水平距离也就是两点投影的最短距离。

因为所有的半径都是球面的法线，而每个大圓平面都通过球心，所以連接两点的大圓的平面不仅是两个端点的，而且也是所有中間点的共同豎直面。因此通过每三个无限接近的点所作的平面，即密切面，总是一个豎直面。在一个大圓弧的每一个点上，法面与密切面相重合，換句話說，曲线的主法线与曲面的法线相重合。因此，大圓就是球面上的大地线。

水平距离的直接丈量只有在断面比較有利的情况下才能进行和值得进行。在所有其他情况下，就要应用三角測量方法，这时直接丈量的基线要布設得使其能便于量測。此外，要根据一个良好設計的、水平角經仔細測定的三角网来确定所有的长度和位置。如果把三角网中三个三角点用大圓弧連接起来，則各大圓弧就构成一个球面三角形。三角形的边长就是最短的水平距离。三角形的各角就是由有关圓弧的豎直面所构成的二面角。这些角可以利用一架安置在地面上的、其旋轉軸位于鉛垂

① 參閱 F. R. Helmert: 《大地測量的数学与物理理論》，第一卷，第5/6頁和69—71頁。

② F. R. 黑耳默特: 《大地測量的数学与物理理論》，第一卷第69頁。

线方向上的經緯仪来直接量測。这样測得的角度，在进一步使用之前还要經過一次平差。从单独一条或几条基线出发，在統一定向的情况下，可以构成一个由許多連續三角形所組成的整个网。在一等三角測量中，首先从一个三角形到另一个三角形連續地推出所有各边的长度。

利用已平差的三角形角度也可以从一个三角形到另一个三角形連續地确定三角形各边的方向。有了边长和方位角或球面方向角就可以最后确定各点在統一坐标系內的坐标。边长和坐标的計算都是按球面三角公式来完成的^①。

为了应用这些公式，必須将三角形的边长轉換为度数。于是角度 $s\rho''/r$ 相应于三角形边 s ，其中 r 表示地球半径，或一般称为曲率半径。

取地球半径約为6378公里，当三角形边长为64公里时，比值 s/r 才不过1:100或約 $1/2^\circ$ 。

但是从另一方面来看，地球表面上約31米的长度已經相当于一个 $1''$ 的中心角。因此如果要使三角形的边长精确到厘米的話，那么角度 $(s/r)\rho''$ 必須算到 $0.''0001$ 。由于三角对数表和相应的自然函数表的內插的不可靠，这是不可能的。长度換算为角度是不方便的，因为这些距离經常要反复用到，且由于所有可量測的三角形边长只相当于很小的中心角，因此可以用一种具有足够精度的近似計算来代替这种不可靠的严密的球面計算，这时是把小角度的三角函数展为級数。

在級数展开中，一再出現 s/r ， s^2/r^2 ， s^3/r^3 等等形式的式子，我們把它們叫做1, 2, 3, ……次微小量或簡称为1, 2, 3, ……級微量。为此，我們应用簡略符号“ Gl_1/r ， Gl_1/r^2 ， Gl_1/r^3 ……”或簡写为“ Gl_1 、 Gl_2 、 Gl_3 ”^②。

§ 77. 球面角超

在球面三角形的計算中，一般采用的球半径为

$$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

(符号的意义見本书第四卷第一分册 § 8)

用这个数值首先算出三角形的球面角超。

一个球面三角形的三个角度之和总是大于 180° ，角度之和超过 180° 的剩余值叫做球面角超。它与三角形的大小有关。

如果用 α ， β ， γ 表示已平差的角度，并用 ϵ 表示球面角超，則有下列公式

$$\epsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ. \quad (2)$$

如果 α' ， β' ， γ' 是測得的三个角度，則据此也可求得球面角超 ϵ ，只是包含着

① 見附录第[86]—[88]頁的表格。

② Gl 是項的意思。——譯者注

α' , β' , γ' 的观测误差。因此我们希望, 独立而精确地确定 ϵ , 它不受这些角度的微小观测误差的影响, 而且相反地应该用以检核 α' , β' , γ' 各角度的和数, 并在某些情况下对它们进行平差。

这种球面角超 ϵ 的独立确定是利用下列的定理: 球面角超是与球面三角形面积 F 成正比, 即:

$$\epsilon'' = \frac{F'}{r^2} \rho'' \quad (2a)$$

我们可以利用球面二角形来证明这一定理。

二角形是指两个大圆之间的面积, 例如图 1 中:

$$\text{二角形 } A C A' B A = (\alpha, \alpha);$$

因为圆球的整个面积 = $4\pi r^2$, 故

$$\text{二角形面积 } (\alpha, \alpha) = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} (4\pi r^2).$$

同样, 我们也可算得其他相交于三角形 $A B C$ 的两个三角形, 则有:

$$\text{二角形面积 } (\beta, \beta) = \frac{\beta^\circ}{360^\circ} (4\pi r^2),$$

$$\text{二角形面积 } (\gamma, \gamma) = \frac{\gamma^\circ}{360^\circ} (4\pi r^2);$$

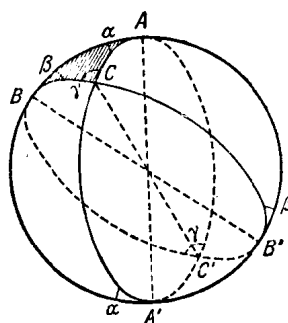


图 1

$$\text{所以总和: } (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = \frac{\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ}{360^\circ} 4\pi r^2. \quad (a)$$

现在属于球面三角形 $A B C$ 的面积 F , 根据图 1 (在一个圆球模型上作图, 更加醒目一些) 有:

$$(\alpha, \alpha) = F + A' B C$$

$$(\beta, \beta) = F + B' A C$$

$$(\gamma, \gamma) = F + C' A B$$

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 3F + A' B C + B' A C + C' A B.$$

但是位于图 1 中另一面的三角形 $C' A B$ 的面积, 与其位于这一面的三角形 $C A B'$ 的面积相等, 同时把 $3F$ 写成 $3F = 2F + F$, 于是得

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2F + F + A' B C + B' A C + C A B'.$$

这个公式的最后四项的总和即得球的半个面积 = $2\pi r^2$, 故

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2F + 2\pi r^2. \quad (b)$$

现在由 (a) 和 (b) 两式得出:

$$F = (\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ - 180^\circ) \frac{\pi}{180^\circ} r^2. \quad (c)$$

如果用式 (2) 的符号 ϵ , 同时设 $180^\circ/\pi = \rho$, 则由式 (c) 得到与式 (2a) 相同的公式, 即

$$\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ - 180^\circ = \varepsilon = \frac{F}{r^2} \rho. \quad (d)$$

这就是我們所要证明的。

严格的說， F 是指三角形的曲面(球面的)面积，但是也可以足够近似地用一个平面三角形的面积 Δ 来代替，它是由球面三角形的边长算得的，即

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta}{r^2} \rho. \quad (3)$$

算 例

我們要利用汉諾威的三角形作为一个算例，这个三角形在高斯的經典著作中多次引以为例，就是图 2 中所示的三角形 IHB 。

已知：

$$I-B \text{ 的边长 } b = 105\,972.85 \text{ 米}. \quad (4)$$

此外，已知三角形的近似角度和三角形顶点的近似地理緯度：

点名	三角形的角度	地理緯度
I	$\alpha = 40^\circ 39' 30'' (25'')$	$50^\circ 51' 09''$
H	$\beta = 86 \ 13 \ 59 (54'')$	$51 \ 28 \ 31$
B	$\gamma = 53 \ 06 \ 46 (41'')$	$51 \ 48 \ 02$

总和 $180^\circ 00' 15'' (00'')$ $\varphi = 51^\circ 22' 34''$ 平均数

这些列到 $1''$ 的三角形的角度总和为 $180^\circ 00' 15''$ ，即超过 180° 的多余值为 $15''$ 。无需知道，是否这是球面角超或是观测誤差，我們把这 $15''$ 平均分配到三个角度上，以便至少暂时获得在其本身符合的平面三角形的计算，因而得到式(5)中三个角度的括号内所写的秒值(25''), (54''), (41'')。

根据这些角度和在式(4)中所給的基线 b ，按平面三角形的正弦定理，进行一次近似的暂时的三角形计算：

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \sin \alpha, \quad c = \frac{b}{\sin \beta} \sin \gamma.$$

这里只用五位或六位对数来进行计算：

$\lg b$	5.025 195	$\lg b$	5.025 195
$\text{co } \lg \sin \beta$	0.000 940	$\text{co } \lg \sin \beta$	0.000 940
$\lg \sin \alpha$	9.813 934	$\lg \sin \gamma$	9.902 984
$\lg a$	4.840 069	$\lg c$	4.929 119

于是得：

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha = 40^{\circ} 39' 25'' & \lg a = 4.840\ 069 \\ \beta = 86\ 13\ 54 & \lg b = 5.025\ 195 \\ \gamma = 53\ 06\ 41 & \lg c = 4.929\ 119 \end{array} \right\} \quad (6)$$

用上列数值可以计算平面三角形的面积，并加检核，因为三角形面积为

$$\Delta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

lg a	4.840 069	lg a	4.840 069
lg b	5.025 195	lg c	4.929 119
lg sin γ	9.902 984—10	lg sin β	9.999 060—10
lg 0.5	9.698 970—10	lg 0.5	9.698 970—10
lg Δ	9.467 218	lg Δ	9.467 218

(7)

此外，我們需知三角形的平均緯度的平均曲率半径。在式(5)中已给出这个平均緯度 $\varphi = 51^{\circ} 22' 34''$ ，用这个緯度由附录[24]頁中的表借內插求得 $\lg r$ 值，即可求得 ϵ 值：

lg $1/r^2$	6.390 076—20	
lg ρ	5.314 425	
由(7) lg Δ	9.467 218	
lg ε	1.171 719	$\epsilon = 14.850''$

(8)

由此就証实了上述式(5)中所給的各角在其总和內是正确的，只要将它们准确設定到1''。更精确的角度和三角形边长的更精确的计算，我們将在下面討論。

对于上例所举的简单的球面角超计算，尚須加一些說明。一个具有边长 a 、 b 和夹角 γ 的三角形，球面角超为：

$$\epsilon = \frac{\rho}{2r^2} ab \sin \gamma, \quad (9)$$

为此，我們把比較常用到 $\rho/2r^2$ 的对数表列在下面。为了比較起見，在表 I 中，一并列出白塞尔椭圆体和海福特椭圆体的一些数值^①：

为了进一步了解起見，我們还汇列具有整数边长的等边三角形的球面角超（表 I）和整数面积的三角形的球面角超（表 II），这里的 $\rho''/2r^2$ 是以平均緯度 $\varphi = 50^{\circ}$ 为淮的。

对于边长约在10公里以内的小三角形，球面角超是在观测精度之內的。但是对

① 对于这个问题請參閱本书第四卷第一分册 § 65中3之(b)的論証和表格。

表 I

地理緯度 φ	橢圓體	
	白塞爾	海福特
40°	$\lg \frac{\rho''}{2r^2} = 1.404\ 618 - 10$	$\lg \frac{\rho''}{6r^2} = 1.404\ 487 - 10$ (10)
45°	1.404 113 - 10	1.403 978 - 10
50°	1.403 608 - 10	1.403 469 - 10
55°	1.403 118 - 10	1.402 976 - 10
60°	1.403 658 - 10	1.402 512 - 10

表 I

橢圓體	球面角超	等边三角形的边长					
		s=1公里	s=10公里	s=50公里	s=100公里	s=150公里	s=200公里
白塞爾	$e'' =$	0.00219''	0.219''	5.484''	21.935''	49.354''	87.740''
海福特	$e'' =$	0.00219''	0.219''	5.482''	21.928''	49.338''	87.712''

表 II

橢圓體	球面角超	三角形的面积			
		1(公里) ²	10(公里) ²	100(公里) ²	200(公里) ²
白塞爾	$e'' =$	0.005066''	0.051''	0.507''	1.013''
海福特	$e'' =$	0.005064''	0.051''	0.506''	1.013''

于較大的三角形就会产生很可观的数值。在欧洲所测的最大的三角形，是跨过地中海介于西班牙和阿尔及利亚之間的連結三角形，見第四卷第一分册 § 21 图 5，具有大地角超約 54''，71''，44'' 和 60''。

对于这样大的三角形，需要一个較严密的角超計算。

§ 78. 勒让德尔定理

我們来看一个如图 1 所示的具有边长 a, b, c 和角度 α, β, γ 的大地三角形。

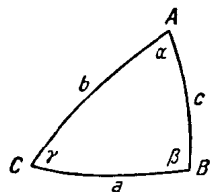


图 1 球面三角形

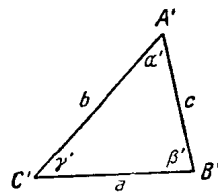


图 2 平面三角形

如果这个球面三角形位于一个半径为 r 的圆球上，则边长 a, b, c 相应的都有一定的球心角，如下所列：

$$\left. \begin{array}{l} \text{以米表示的边长} \cdots \cdots \cdots a, \quad b, \quad c \\ \text{以弧度表示的球心角} \cdots \cdots \cdots \frac{a}{r}, \quad \frac{b}{r}, \quad \frac{c}{r} \\ \text{以度数表示的球心角} \cdots \cdots \cdots \frac{a}{r}\rho, \quad \frac{b}{r}\rho, \quad \frac{c}{r}\rho \end{array} \right\} \quad (1)$$

我们现在可以用这些球心角和球面上 a, b, c 各弧所夹的角度 α, β, γ ，根据熟知而严密的球面三角公式来解算这个球面三角形。由于这些球心角都很小，所以把它们展为级数并接近似公式来处理，比较方便得多。

这类方法的最早的一个是1787年由勒让德尔在巴黎提出的，后人把它叫做勒让德尔定理：

“如果把各减去 $1/3$ 球面角超的球面三角形的各角作为平面三角形的角度，则一个小的球面三角形就可近似地看成是一个边长相等的平面三角形而计算它的边长和角度。”

图 2 所绘的平面三角形就相应于这个定理，它具有与图 1 的球面三角形相等的边 a, b, c ，而其角度 α', β', γ' 预先还是未知的。

为了导出勒让德尔定理，我们对球面三角形应用余弦定理并写出：

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \alpha$$

或
$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}}{\sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}}.$$

现在将所有小角度的正弦和余弦展成幂级数，并使其包含至四次项：

$$\cos \alpha = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)}.$$

如果把括号的内容乘出，同时略去高于四次的项，则得：

$$\cos \alpha = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2} \left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)}.$$

分母中的因子 $\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)$ 可以根据二项式的定理足够近似地这样来考虑，就是

把上式的分子乘以 $\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)$ ，同时消去各个 r^2 ，則得：

$$\cos \alpha = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24r^2bc} \right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2} \right).$$

略去分母中含有 r^4 因子的項，則得比較簡單的表示式

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24r^2bc}. \quad (2)$$

对于平面三角形，根据余弦定理有：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha' \quad \text{或} \quad \cos \alpha' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (3)$$

由式(3)与式(2)則得：

$$\cos \alpha = \cos \alpha' + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24r^2bc}. \quad (4)$$

我們先不顧这个公式而来研究一下分数的分子；这个分子与平面三角形的面积 Δ 有較密切的关系。众所周知：

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

式中 $s = \frac{a+b+c}{2}$, $s-a = \frac{-a+b+c}{2}$ 等等，所以

$$\Delta^2 = \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \left(\frac{-a+b+c}{2} \right) \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \left(\frac{a+b-c}{2} \right).$$

此处 $(a+b+c)(-a+b+c) = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$

和 $(a-b+c)(+a+b-c) = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$,

所以 $16\Delta^2 = (-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$

再将这两个括弧乘出，整理并簡化，則得：

$$16\Delta^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2. \quad (5)$$

所以由式(4)和(5)得：

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = -\frac{16\Delta^2}{24r^2bc}. \quad (6)$$

但是初步近似有下列关系：

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = -(\alpha - \alpha') \sin \alpha' + \dots, \quad (7)$$

上式可直接視作微分公式，或者也可按三角学的方法写出：

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = -2 \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2},$$

这就是說，当 α 和 α' 极近相同时，則：

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = -(\alpha - \alpha') \sin \alpha'. \quad (7a)$$

将式 (7) 或 (7a) 代入式 (6), 则得

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3} \frac{\Delta^2}{r^2 bc \sin \alpha'}. \quad (8)$$

但是, 在平面三角形中又有:

$$bc \sin \alpha' = 2\Delta, \quad (9)$$

于是式 (8) 变成:

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{3} \frac{\Delta}{r^2} \quad \text{或} \quad \alpha - \alpha' = \frac{1}{3} \frac{\Delta}{r^2} \rho. \quad (10)$$

在式 (10) 中的第一式是适用于弧度单位, 第二式则适用于度数单位。

当引入球面角超 ϵ 时, 则有:

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{3} \epsilon \quad (11a)$$

相应地

$$\beta - \beta' = \frac{1}{3} \epsilon \quad (11b)$$

$$r - r' = \frac{1}{3} \epsilon \quad (11c)$$

$$\text{总和: } \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \epsilon. \quad (12)$$

由此证明了上述的定理。

同样, 也可根据下列的球面三角的正弦定理

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin \frac{b}{r}}$$

并用 $\sin \left(\frac{a}{r} \right)$ 与 $\sin \left(\frac{b}{r} \right)$ 的级数展开来推证。

由 $\sin \alpha \sin(b/r) = \sin \beta \sin(a/r)$ 得

$$\sin \alpha \left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3} + Gl_5 \right) \textcircled{1} = \sin \beta \left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} + Gl_5 \right); \quad (13)$$

两边乘以 r 并略去 Gl_5 或 Gl_4 及更小的项, 得

① 这里 Gl_5 表示 5 次项。——译者注

$$b \left(\sin \alpha - \frac{b^2}{6r^2} \sin \alpha \right) = a \left(\sin \beta - \frac{a^2}{6r^2} \sin \beta \right).$$

因为 $\frac{1}{r^2} = \frac{\epsilon}{F}$ (ϵ 以弧度表示)

于是上式变为:

$$b \left(\sin \alpha - \frac{b^2 \sin \alpha}{2F} - \frac{\epsilon}{3} \right) = a \left(\sin \beta - \frac{a^2 \sin \beta}{2F} - \frac{\epsilon}{3} \right). \quad (14)$$

在含有 $\frac{1}{F}$ 的一项中, 出现有微小的因子 ϵ , 因此可用平面三角形的面积代替 F 。

取 $2F = bc \sin \alpha = ac \sin \beta$, 则式 (14) 变成

$$b \left(\sin \alpha - \frac{b^2 \sin \alpha}{bc \sin \alpha} - \frac{\epsilon}{3} \right) = a \left(\sin \beta - \frac{a^2 \sin \beta}{ac \sin \beta} - \frac{\epsilon}{3} \right)$$

$$\text{或 } b \left(\sin \alpha - \frac{b}{c} - \frac{\epsilon}{3} \right) = a \left(\sin \beta - \frac{a}{c} - \frac{\epsilon}{3} \right). \quad (15)$$

根据图 3, 在含有 $\frac{\epsilon}{3}$ 的改正项中, 近似地设

$$b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$$

$$\text{和 } a = c \cos \beta + b \cos \gamma,$$

则得

$$b \left[\sin \alpha - \left(\cos \alpha + \frac{a}{c} \cos \gamma \right) - \frac{\epsilon}{3} \right]$$

$$= a \left[\sin \beta - \left(\cos \beta + \frac{b}{c} \cos \gamma \right) - \frac{\epsilon}{3} \right]$$

$$\text{或 } b \left(\sin \alpha - \frac{\epsilon}{3} \cos \alpha \right) = a \left(\sin \beta - \frac{\epsilon}{3} \cos \beta \right). \quad (16)$$

$$\text{由于 } \sin \left(\alpha - \frac{\epsilon}{3} \right) = \sin \alpha \cos \frac{\epsilon}{3} - \cos \alpha \sin \frac{\epsilon}{3},$$

这里可以令 $\cos(\epsilon/3) \approx 1$ 和 $\sin(\epsilon/3) \approx \frac{\epsilon}{3}$ 。于是由式 (16) 直接得出勒让德定理

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \left(\beta - \frac{\epsilon}{3} \right)}{\sin \left(\alpha - \frac{\epsilon}{3} \right)}. \quad (17)$$

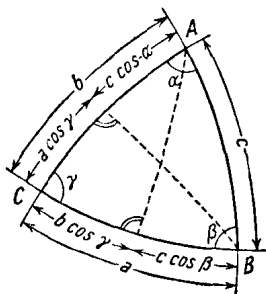


图 3

只要把所测的球面角减去 $1/3$ 的球面角超化为平面角，一个球面三角形就可以按平面几何的公式来计算。虽然这种计算手续是如此的简单，但是对于大规模的三角测量计算还不是最方便的，因为计算时总要区别两种角度（即球面角和平面角），这很容易混淆，特别是在有对角线的时候。

我们利用以上曾用过的经典三角形作为一个算例，只是现在采用精确的角度值：

点名	观测的球面角	按勒让德尔定理得出的平面角
I	$\alpha = 40^\circ 39' 30.380''$	$\alpha' = 40^\circ 39' 25.430''$
H	$\beta = 86\ 13\ 58.840$	$\beta' = 86\ 13\ 53.890$
B	$r = 53\ 06\ 45.630$	$r' = 53\ 06\ 40.680$
	$[] = 180^\circ 00' 14.850''$	$[] = 180^\circ 00' 00.000''$
	$\epsilon = 14.850''$	
	$\frac{\epsilon}{3} = 4.950''$	

从 $b = 105\ 972.850$ 米出发，利用平面角得

$\lg c$	4.929 11 768	$c = 84\ 941.061$ 米
$\lg \sin r'$	9.902 98 306	
$\lg b$	5.025 19 462	
$\operatorname{co} \lg \sin \beta'$	0.000 94 000	
$\lg \sin \alpha'$	9.813 93 448	
$\lg a$	4.840 06 910	$a = 69\ 194.105$ 米

参 考 文 献

- Hammer, E.: Noch ein Beweis des Legendreschen Satzes, mit verschiedenen Literaturhinweisen. In: ZfV 1911, S. 33—36.
- Kowalewski, G.: Einfacher Beweis der Legendreschen Formel, mit einer Bemerkung von O. Eggert. In: ZfV 1915, S. 291—293.
- Hauer, F.: Zur Geschichte des Satzes von Legendre. In: ZfV 1938, S. 577—595 u. S. 641—653.
- Rosén, K. D. P.: Zwei Sehnendreiecksformeln. Legendres Theorien. Tätigkeitsberichte der Balt. Geod. Kommission 1938—1941, Helsinki 1942, S. 56—70.

§ 79. 附 加 数 法

球面三角形（其边长较之球面半径是很小的）的第二种近似计算方法是在十九世纪初期首先由 J.G. 佐耳德内尔（Soldner）在拜恩引用的。此后，在德国南部的其余大地测量中也广泛被采用。这个方法叫做附加数法，因为在对数上常常要加上（或

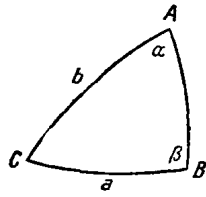


图 1 球面三角形

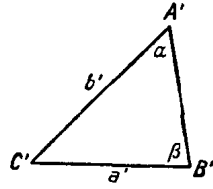


图 2 平面三角形

减去)微小的改正量。

在勒让德尔定理中,我们利用了一个平面辅助三角形,其边长等于球面三角形的边长,而其角度则必须取球面三角形的角度。与此相反,现在我们来寻求一个平面辅助三角形,它的两个角与球面三角形的两个角相同,而边长则不同。借图 1 和图 2 的关系,设想一个球面三角形,已知边长 a 和 b , 其对角为 α 和 β , 于是由此作出一个平面辅助三角形,其具有与球面三角形相同的角度 α 和 β , 但必须具有与球面三角形不同的边长 a' 和 b' 。

根据球面三角形和平面三角形的正弦定理,我们有下列两个公式:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin \frac{b}{r}} \quad \text{和} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a'}{b'}. \quad (1)$$

由此得

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} + \dots}{\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3} + \dots} \quad (2)$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a - \frac{a^3}{6r^2} + \dots}{b - \frac{b^3}{6r^2} + \dots} \quad (3)$$

令:

$$a' = a - \frac{a^3}{6r^2} \quad \text{和} \quad b' = b - \frac{b^3}{6r^2},$$

则式 (3) 得到满足。对于任意三角形边 s , 则有:

$$s' = s - \frac{s^3}{6r^2}. \quad (4)$$

这样确定的数值 $\frac{s^3}{6r^2}$ 是边长 s 的线附加数, 当我们知道半径 r 时, 就能计算一