测 量 全 书

第四卷 数学大地测量学

第二分册 球面上和椭圆体面上的大地計算

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本787×1092 1/16·印张34·插頁3·附附录一册·字数728,000

1966年5月北京第一版·1966年5月北京第一次印刷

印数0001—1,580·定价(科五)**5.60**元

*

統一书号：15165·4145(測绘-152)

目　录

第三部份　球面上的大地計算

第四部份　椭圓体面上的大地測量計算

附录

第三部份　球面上的大地計算

第七章　球面三角形的計算

§ 76. 球面上的水平距离和水平角

为了說明測得的水平距离和水平角与算得的或导出的各元素之間的密切关系，我們在这章里先提供 F. R.黑耳默特关于应用圓球作为投影面的經典理論❶。

在大規模的測图中，我們把地球表面上某一任意部分內的各点都投影到一个水准面上，亦即投影到一个各处都和投影线成正交的表面上。在此把鉛垂线作为投影线，这些鉛垂线都是輕度弯曲的空間曲线，而各水准面則皆是曲面。現在我們第一次近似地把水准面看作是同心球面，而鉛垂线則是經过各球共同中心的直线，所以这些投影即是彼此相似的图形。如果用 r 表示內球的半径，而 h 表示相邻球面間的距离，于是相邻球面上的这些图形的相应边长成下列的比例，$r:(r+h)$ 或 $1:(1+h/r)$。P_1 和 P_2 两点的鉛垂线具有一个共同的豎直面。这个豎直面在地球自然表面上截出一个地形断面，在投影圓球上則截出一个大圓，介于 P_1 和 P_2 之間的大圓的长度就是两点之間的水平距离。水平距离与水准面的高程位置有关，在同心圓球的情况下，則与所选的投影圓球的半径有关。

这里不予証明，而逕指出❷：水平距离也就是两点投影的最短距离。

因为所有的半径都是球面的法线，而每个大圓平面都通过球心，所以連接两点的大圓的平面不仅是两个端点的，而且也是所有中間点的共同豎直面。因此通过每三个无限接近的点所作的平面，即密切面，总是一个豎直面。在一个大圓弧的每一个点上，法面与密切面相重合，换句話說，曲线的主法线与曲面的法线相重合。因此，大圓就是球面上的大地线。

水平距离的直接丈量只有在断面比較有利的情况下才能进行和值得进行。在所有其他情况下，就要应用三角測量方法，这时直接丈量的基线要布設得使其能便于量測。此外，要根据一个良好設計的、水平角經仔細測定的三角网来确定所有的长度和位置。如果把三角网中三个三角点用大圓弧連接起来，則各大圓弧就构成一个球面三角形。三角形的边长就是最短的水平距离。三角形的各角就是由有关圓弧的豎直面所构成的二面角。这些角可以利用一架安置在地面上的、其旋轉軸位于鉛垂

❶ 参閱F. R. Helmert：《大地測量的数学与物理理論》，第一卷，第5/6頁和69—71頁。

❷ F.R.黑耳默特：《大地測量的数学与物理理論》，第一卷第69頁。

线方向上的經緯仪来直接量测。这样测得的角度，在进一步使用之前还要經过一次平差。从单独一条或几条基线出发，在統一定向的情况下，可以构成一个由許多連续三角形所組成的整个网。在一等三角测量中，首先从一个三角形到另一个三角形連续地推出所有各边的长度。

利用已平差的三角形角度也可以从一个三角形到另一个三角形連续地确定三角形各边的方向。有了边长和方位角或球面方向角就可以最后确定各点在統一坐标系內的坐标。边长和坐标的計算都是按球面三角公式来完成的❶。

为了应用这些公式，必須将三角形的边长轉换为度数。于是角度 $s\rho''/r$ 相应于三角形边 s，其中 r 表示地球半径，或一般称为曲率半径。

取地球半径約为6378公里，当三角形边长为64公里时，比值 s/r 才不过1:100或約$^1/_2{}^\circ$。

但是从另一方面来看，地球表面上約 31 米的长度已經相当于一个1″的中心角。因此如果要使三角形的边长精确到厘米的話，那么角度 $(s/r)\rho''$ 必須算到 0.″0001。由于三角对数表和相应的自然函数表的內插的不可靠，这是不可能的。长度换算为角度是不方便的，因为这些距离經常要反复用到，且由于所有可量测的三角形边长只相当于很小的中心角，因此可以用一种具有足够精度的近似計算来代替这种不可靠的严密的球面計算，这时是把小角度的三角函数展为級数。

在級数展开中，一再出現 s/r，s^2/r^2，s^3/r^3 等等形式的式子，我們把它們叫做1,2,3,……次微小量或簡称为1,2,3,……級微量。为此，我們应用簡略符号“$Gl\,1/r$，$Gl\,1/r^2$，$Gl\,1/r^3$……”或簡写为“Gl_1、Gl_2、Gl_3”❷。

§ 77. 球面角超

在球面三角形的計算中，一般采用的球半径为

$$r=\sqrt{MN}=\frac{c}{V^2} \tag{1}$$

(符号的意义見本书第四卷第一分册 § 8)

用这个数值首先算出三角形的球面角超。

一个球面三角形的三个角度之和总是大于180°，角度之和超过180°的剩余值叫做球面角超。它与三角形的大小有关。

如果用α，β，γ 表示已平差的角度，并用 ε 表示球面角超，则有下列公式

$$\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma-180^\circ. \tag{2}$$

如果 α'，β'，γ' 是测得的三个角度，则据此也可求得球面角超 ε，只是包含着

❶ 見附录第〔86〕—〔88〕頁的表格，

❷ Gl是項的意思。——譯者注

α'，β'，γ'的观測誤差。因此我們希望，独立而精确地确定ε，它不受这些角度的微小观測誤差的影响，而且相反地应該用以检核α'，β'，γ'各角度的和数，并在某些情况下对它們进行平差。

这种球面角超ε的独立确定是利用下列的定理：球面角超是与球面三角形面积F成正比，即：

$$\varepsilon''=\frac{F}{r^2}\rho''. \tag{2a}$$

我們可以利用球面二角形来証明这一定理。

二角形是指两个大圓之間的面积，例如图1中：

二角形$A\ C\ A'\ B\ A=(\alpha,\ \alpha)$；

因为圓球的整个面积$=4\pi r^2$，故

$$二角形面积\ (\alpha,\ \alpha)=\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}(4\pi r^2).$$

同样，我們也可算得其他相交于三角形$A\ B\ C$的两个三角形，則有：

$$二角形面积\ (\beta,\ \beta)=\frac{\beta^\circ}{360^\circ}(4\pi r^2),$$

$$二角形面积\ (\gamma,\ \gamma)=\frac{\gamma^\circ}{360^\circ}(4\pi r^2);$$

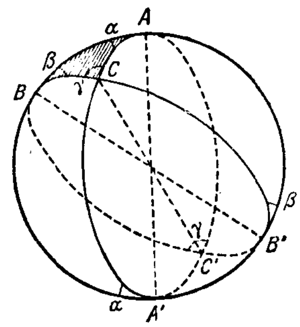

图 1

所以总和：$(\alpha,\ \alpha)+(\beta,\ \beta)+(\gamma,\ \gamma)=\dfrac{\alpha^\circ+\beta^\circ+\gamma^\circ}{360^\circ}4\pi r^2.$　　(a)

現在属于球面三角形$A\ B\ C$的面积F，根据图1(在一个圓球模型上作图，更加醒目一些)有：

$$(\alpha,\alpha)=F+A'\ B\ C$$
$$(\beta,\beta)=F+B'\ A\ C$$
$$(\gamma,\gamma)=F+C'\ A\ B$$

$$(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+(\gamma,\gamma)=3F+A'BC+B'AC+C'AB.$$

但是位于图1中另一面的三角形$C'AB$的面积，与其位于这一面的三角形$CA'B'$的面积相等，同时把$3F$写成$3F=2F+F$，于是得

$$(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+(\gamma,\gamma)=2F+F+A'BC+B'AC+CA'B'.$$

这个公式的最后四項的总和即得球的半个面积$=2\pi r^2$，故

$$(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+(\gamma,\gamma)=2F+2\pi r^2. \tag{b}$$

現在由(a)和(b)两式得出：

$$F=(\alpha^\circ+\beta^\circ+\gamma^\circ-180^\circ)\frac{\pi}{180^\circ}r^2. \tag{c}$$

如果用式(2)的符号ε，同时設$180^\circ/\pi=\rho$，則由式(c)得到与式(2a)相同的公式，即

$$\alpha^\circ+\beta^\circ+\gamma^\circ-180^\circ=\varepsilon=\frac{F}{r^2}\rho. \qquad \text{(d)}$$

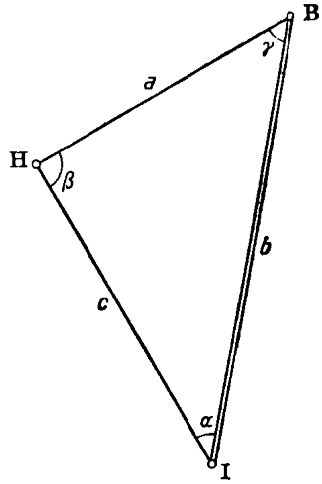

图 2

这就是我們所要証明的。

严格的說，F是指三角形的曲面(球面的)面积，但是也可以足够近似地用一个平面三角形的面积△来代替，它是由球面三角形的边长算得的，即

$$\varepsilon\approx\frac{\triangle}{r^2}\rho. \qquad (3)$$

算 例

我們要利用汉諾威的三角形作为一个算例，这个三角形在高斯的經典著作中多次引以为例，就是图 2 中所示的三角形IHB。

已知：

$I-B$ 的边长 $b=105\,972.85$米. (4)

此外，已知三角形的近似角度和三角形項点的近似地理緯度φ：

点名	三角形的角度	地理緯度	
I	$\alpha=40°39'30''(25'')$	$50°51'09''$	
H	$\beta=86\ 13\ 59\ (54'')$	$51\ 28\ 31$	(5)
B	$\gamma=53\ 06\ 46\ (41'')$	$51\ 48\ 02$	
总和	$180°00'15''(00'')$	$\varphi=51°22'34''$ 平均数	

这些列到1″的三角形的角度总和为 180°00′15″，即超过 180°的多余値为 15′。无需知道，是否这是球面角超或是观測誤差，我們把这15″平均分配到三个角度上，以便至少暂时获得在其本身符合的平面三角形的計算，因而得到式(5)中三个角度的括号內所写的秒值(25″)，(54″)，(41″)。

根据这些角度和在式(4)中所給的基线b，按平面三角形的正弦定理，进行一次近似的暂时的三角形計算：

$$a=\frac{b}{\sin\beta}\sin\alpha,\qquad c=\frac{b}{\sin\beta}\sin\gamma.$$

这里只用五位或六位对数来进行計算：

$\lg b$	5.025 195	$\lg b$	5.025 195
$\mathrm{co}\lg\sin\beta$	0.000 940	$\mathrm{co}\lg\sin\beta$	0.000 940
$\lg\sin\alpha$	9.813 934	$\lg\sin\gamma$	9.902 984
$\lg a$	4.840 069	$\lg c$	4.929 119

于是得：

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha=40°39'25'' & \lg a=4.840\,069\\ \beta=86\ \ 13\ \ 54 & \lg b=5.025\,195\\ \gamma=53\ \ 06\ \ 41 & \lg c=4.929\,119\end{array}\right\}\qquad(6)$$

用上列数值可以計算平面三角形的面积，幷加检核，因为三角形面积为

$$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$\lg a$	4.840 069	$\lg a$	4.840 069
$\lg b$	5.025 195	$\lg c$	4.929 119
$\lg\sin\gamma$	9.902 984—10	$\lg\sin\beta$	9.999 060—10
$\lg 0.5$	9.698 970—10	$\lg 0.5$	9.698 970—10
$\lg\triangle$	9.467 218	$\lg\triangle$	9.467 218

（7）

此外，我們需知三角形的平均緯度的平均曲率半径。在式（5）中已給出这个平均緯度$\varphi=51°22'34''$，用这个緯度由附录〔24〕頁中的表借內插求得$\lg r$值，即可求得ε值：

$\lg 1/r^2$	6.390 076—20	
$\lg\rho$	5.314 425	
由（7）$\lg\triangle$	9.467 218	
$\lg\varepsilon$	1.171 719	$\varepsilon=14.850''$　　（8）

由此就証实了上述式（5）中所給的各角在其总和內是正确的，只要将它們准确設定到1″。更精确的角度和三角形边长的更精确的計算，我們将在下面討論。

对于上例所举的簡单的球面角超計算，尙須加一些說明。一个具有边长a、b和夹角γ的三角形，球面角超为：

$$\varepsilon=\frac{\rho}{2r^2}ab\sin\gamma,\qquad(9)$$

为此，我們把比較常用到$\rho/2r^2$的对数表列在下面。为了比較起見，在表Ⅰ中，一幷列出白塞尔橢圓体和海福特橢圓体的一些数值❶：

为了进一步了解起見，我們还汇列具有整数边长的等边三角形的球面角超（表Ⅱ）和整数面积的三角形的球面角超（表Ⅲ），这里的$\rho''/2r^2$是以平均緯度$\varphi=50°$为准的。

对于边长約在10公里以內的小三角形，球面角超是在观測精度之內的。但是对

❶ 对于这个問題請参閱本书第四卷第一分册§65中3之(b)的論証和表格。

表 Ⅰ

地理緯度 φ	椭圓体 白塞尔	椭圓体 海福特
40°	$\lg\frac{\rho''}{2r^2}=1.404\ 618-10$	$\lg\frac{\rho''}{6r^2}=1.404\ 487-10$　(10)
45°	1.404 113—10	1.403 978—10
50°	1.403 608—10	1.403 469—10
55°	1.403 118—10	1.402 976—10
60°	1.403 658—10	1.402 512—10

表 Ⅱ

椭圓体	球面角超	等边三角形的边长 $s=1$公里	$s=10$公里	$s=50$公里	$s=100$公里	$s=150$公里	$s=200$公里
白塞尔	$\varepsilon''=$	0.00219″	0.219″	5.484″	21.935″	49.354″	87.740″
海福特	$\varepsilon''=$	0.00219″	0.219″	5.482″	21.928″	49.338″	87.712″

表 Ⅲ

椭圓体	球面角超	三角形的面积 1(公里)²	10(公里)²	100(公里)²	200(公里)²
白塞尔	$\varepsilon''=$	0.005066″	0.051″	0.507″	1.013″
海福特	$\varepsilon''=$	0.005064″	0.051″	0.506″	1.013″

于較大的三角形就会产生很可观的数值。在欧洲所测的最大的三角形，是跨过地中海介于西班牙和阿尔及利亚之間的連結三角形，見第四卷第一分册 § 21图 5，具有大地角超約54″，71″，44″ 和 60″。

对于这样大的三角形，需要一个較严密的角超計算。

§ 78. 勒让德尔定理

我們来看一个如图 1 所示的具有边长 a，b，c 和角度 α，β，γ 的大地三角形。

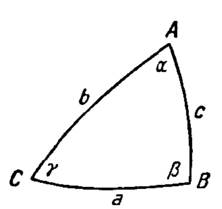

图 1　球面三角形

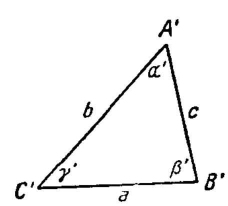

图 2　平面三角形

如果这个球面三角形位于一个半径为 r 的圆球上，则边长 a，b，c 相应的都有一定的球心角，如下所列：

$$\left.\begin{array}{llll}\text{以米表示的边长}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a, & b, & c\\ \text{以弧度表示的球心角}\cdots\cdots\cdots & \dfrac{a}{r}, & \dfrac{b}{r}, & \dfrac{c}{r}\\ \text{以度数表示的球心角}\cdots\cdots\cdots & \dfrac{a}{r}\rho, & \dfrac{b}{r}\rho, & \dfrac{c}{r}\rho\end{array}\right\} \tag{1}$$

我們現在可以用这些球心角和球面上 a，b，c 各弧所夹的角度 α，β，γ，根据熟知而严密的球面三角公式来解算这个球面三角形。由于这些球心角都很小，所以把它們展为級数幷按近似公式来处理，比較方便得多。

这类方法的最早的一个是1787年由勒讓德尔在巴黎提出的，后人把它叫做勒讓德尔定理：

> "如果把各减去 1/3 球面角超的球面三角形的各角作为平面三角形的角度，则一个小的球面三角形就可近似地看成是一个边长相等的平面三角形而計算它的边长和角度。"

图 2 所绘的平面三角形就相应于这个定理，它具有与图 1 的球面三角形相等的边 a，b，c，而其角度 α'，β'，γ'預先还是未知的。

为了导出勒讓德尔定理，我們对球面三角形应用余弦定理幷写出：

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha$$

或
$$\cos\alpha=\frac{\cos\dfrac{a}{r}-\cos\dfrac{b}{r}\cos\dfrac{c}{r}}{\sin\dfrac{b}{r}\sin\dfrac{c}{r}}.$$

現在将所有小角度的正弦和余弦展成冪級数，幷使其包含至四次項：

$$\cos\alpha=\frac{\left(1-\dfrac{a^2}{2r^2}+\dfrac{a^4}{24r^4}\right)-\left(1-\dfrac{b^2}{2r^2}+\dfrac{b^4}{24r^4}\right)\left(1-\dfrac{c^2}{2r^2}+\dfrac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\dfrac{b}{r}-\dfrac{b^3}{6r^3}\right)\left(\dfrac{c}{r}-\dfrac{c^3}{6r^3}\right)}.$$

如果把括号的內容乘出，同时略去高于四次的項，则得：

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,r^2}+\dfrac{a^4-b^4-c^4}{24\,r^4}-\dfrac{b^2c^2}{4r^4}}{\dfrac{bc}{r^2}\left(1-\dfrac{b^2+c^2}{6\,r^2}\right)}.$$

分母中的因子$\left(1-\dfrac{b^2+c^2}{6\,r^2}\right)$可以根据二項式的定理足够近似地这样来考虑，就是

把上式的分子乘以$\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$，同时消去各个$r^2$，则得：

$$\cos\alpha=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right).$$

略去分母中含有r^4因子的項，則得比較簡单的表示式

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24r^2bc}. \qquad (2)$$

对于平面三角形，根据余弦定理有：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha' \quad 或 \cos\alpha'=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \qquad (3)$$

由式（3）与式（2）則得：

$$\cos\alpha=\cos\alpha'+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24r^2bc}. \qquad (4)$$

我們先不顧这个公式而来研究一下分数的分子；这个分子与平面三角形的面积△有較密切的关系。众所周知：

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

式中　$s=\frac{a+b+c}{2}$，　$s-a=\frac{-a+b+c}{2}$ 等等，所以

$$\triangle^2=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right).$$

此处　$(a+b+c)(-a+b+c)=-a^2+b^2+c^2+2bc$

和　$(a-b+c)(+a+b-c)=a^2-b^2-c^2+2bc,$

所以　$16\triangle^2=(-a^2+b^2+c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc)$

再将这两个括弧乘出，整理并簡化，則得：

$$16\triangle^2=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2. \qquad (5)$$

所以由式（4）和（5）得：

$$\cos\alpha-\cos\alpha'=-\frac{16\triangle^2}{24r^2bc}. \qquad (6)$$

但是初步近似有下列关系：

$$\cos\alpha-\cos\alpha'=-(\alpha-\alpha')\sin\alpha'+\cdots, \qquad (7)$$

上式可直接視作微分公式，或者也可按三角学的方法写出：

$$\cos\alpha-\cos\alpha'=-2\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2},$$

这就是說，当α和α'极近相同时，則：

$$\cos\alpha-\cos\alpha'=-(\alpha-\alpha')\sin\alpha'. \tag{7a}$$

将式（7）或（7a）代入式(6)，则得

$$\alpha-\alpha'=\frac{2}{3}\frac{\triangle^2}{r^2bc\sin\alpha'}. \tag{8}$$

但是，在平面三角形中又有：

$$bc\sin\alpha'=2\triangle, \tag{9}$$

于是式（8）变成：

$$\alpha-\alpha'=\frac{1}{3}\frac{\triangle}{r^2}\quad\text{或}\quad\alpha-\alpha'=\frac{1}{3}\frac{\triangle}{r^2}\rho. \tag{10}$$

在式（10）中的第一式是适用于弧度单位，第二式则适用于度数单位。

当引入球面角超 ε 时，则有：

$$\alpha-\alpha'=\frac{1}{3}\varepsilon \tag{11a}$$

相应地

$$\beta-\beta'=\frac{1}{3}\varepsilon \tag{11b}$$

$$\gamma-\gamma'=\frac{1}{3}\varepsilon \tag{11c}$$

$$\text{总和：}\ \alpha+\beta+\gamma-180^\circ=\varepsilon. \tag{12}$$

由此証明了上述的定理。

同样，也可根据下列的球面三角的正弦定理

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}}$$

并用 $\sin\left(\frac{a}{r}\right)$ 与 $\sin\left(\frac{b}{r}\right)$ 的級数展开来推証。

由 $\sin\alpha\sin(b/r)=\sin\beta\sin(a/r)$ 得

$$\sin\alpha\left(\frac{b}{r}-\frac{b^3}{6r^3}+Gl_5\right)^{❶}=\sin\beta\left(\frac{a}{r}-\frac{a^3}{6r^3}+Gl_5\right); \tag{13}$$

两边乘以 r 并略去 Gl_5 或 Gl_4 及更小的項，得

❶ 这里 Gl_5 表示5次項。——譯者注

$$b\left(\sin\alpha-\frac{b^2}{6r^2}\sin\alpha\right)=a\left(\sin\beta-\frac{a^2}{6r^2}\sin\beta\right).$$

因为 $$\frac{1}{r^2}=\frac{\varepsilon}{F}$$ （ε 以弧度表示）

于是上式变为：

$$b\left(\sin\alpha-\frac{b^2\sin\alpha}{2F}\frac{\varepsilon}{3}\right)=a\left(\sin\beta-\frac{a^2\sin\beta}{2F}\frac{\varepsilon}{3}\right).\qquad(14)$$

在含有$\frac{1}{F}$的一項中，出現有微小的因子ε，因此可用平面三角形的面积代替F。

取$2F=bc\sin\alpha=ac\sin\beta$，則式（14）变成

$$b\left(\sin\alpha-\frac{b^2\sin\alpha}{bc\sin\alpha}\frac{\varepsilon}{3}\right)=a\left(\sin\beta-\frac{a^2\sin\beta}{ac\sin\beta}\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

或 $$b\left(\sin\alpha-\frac{b}{c}\frac{\varepsilon}{3}\right)=a\left(\sin\beta-\frac{a}{c}\frac{\varepsilon}{3}\right).\qquad(15)$$

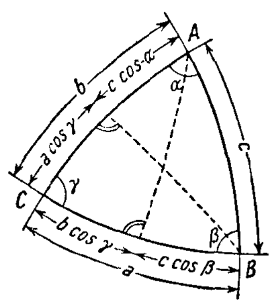

图 3

根据图3，在含有$\frac{\varepsilon}{3}$的改正項中，近似地設

$$b=c\cos\alpha+a\cos\gamma$$

和 $$a=c\cos\beta+b\cos\gamma,$$

則得

$$b\left[\sin\alpha-\left(\cos\alpha+\frac{a}{c}\cos\gamma\right)\frac{\varepsilon}{3}\right]$$

$$=a\left[\sin\beta-\left(\cos\beta+\frac{b}{c}\cos\gamma\right)\frac{\varepsilon}{3}\right]$$

或 $$b\left(\sin\alpha-\frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha\right)=a\left(\sin\beta-\frac{\varepsilon}{3}\cos\beta\right).\qquad(16)$$

由于 $$\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\varepsilon}{3}-\cos\alpha\sin\frac{\varepsilon}{3},$$

这里可以令$\cos(\varepsilon/3)\approx1$和$\sin(\varepsilon/3)\approx\frac{\varepsilon}{3}$。于是由式（16）直接得出勒讓德尔定理

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\left(\beta-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{3}\right)}.\qquad(17)$$

只要把所测的球面角减去1/3的球面角超化为平面角，一个球面三角形就可以按平面几何的公式来計算。虽然这种計算手续是如此的簡单，但是对于大規模的三角測量計算还不是最方便的，因为計算时总要区别两种角度(即球面角和平面角)，这很容易混淆，特别是在有对角线的时候。

我們利用以上曾用过的經典三角形作为一个算例，只是現在采用精确的角度值：

点名	观测的球面角	按勒让德尔定理得出的平面角
I	$\alpha = 40°39'30.380''$	$\alpha' = 40°39'25.430''$
H	$\beta = 86\ 13\ 58.840$	$\beta' = 86\ 13\ 53.890$
B	$\gamma = 53\ 06\ 45.630$	$\gamma' = 53\ 06\ 40.680$
	$[\ ] = 180°00'14.850''$	$[\ ] = 180°00'00.000''$
	$\varepsilon = 14.850''$	
	$\frac{\varepsilon}{3} = 4.950''$	

从 $b = 105\ 972.850$ 米出发，利用平面角得

$\lg c$	4.929 11 768	$c = 84\ 941.061$米
$\lg\sin\gamma'$	9.902 98 306	
$\lg b$	5.025 19 462	
$co\lg\sin\beta'$	0.000 94 000	
$\lg\sin\alpha'$	9.813 93 448	
$\lg a$	4.840 06 910	$a = 69\ 194.105$米

参 考 文 献

Hammer, E.: Noch ein Beweis des Legendreschen Satzes, mit verschiedenen Literaturhinweisen. In: ZfV 1911, S. 33—36.

Kowalewski, G.: Einfacher Beweis der Legendreschen Formel, mit einer Bemerkung von O. Eggert. In: ZfV 1915, S. 291—293.

Hauer, F.: Zur Geschichte des Satzes von Legendre. In: ZfV 1938, S. 577—595 u. S. 641—653.

Rosén, K. D. P: Zwei Sehnendreiecksformeln. Legendres Theorien. Tätigkeitsberichte der Balt. Geod. Kommission 1938—1941, Helsinki 1942, S. 56—70.

§79. 附 加 数 法

球面三角形（其边长較之球面半径是很小的）的第二种近似計算方法是在十九世紀初期首先由J.G.佐耳德內尔（Soldner）在拜恩引用的。此后，在德国南部的其余大地测量中也广泛被采用。这个方法叫做附加数法，因为在对数上常常要加上(或

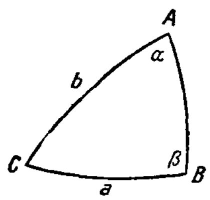

图 1　球面三角形

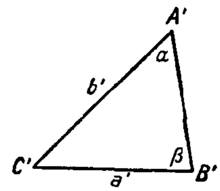

图 2　平面三角形

减去）微小的改正量。

在勒訨德尔定理中，我們利用了一个平面輔助三角形，其边长等于球面三角形的边长，而其角度則必須取球面三角形的角度。与此相反，現在我們来寻求一个平面輔助三角形，它的两个角与球面三角形的两个角相同，而边长則不同。借图 1 和图 2 的关系，設想一个球面三角形，已知边长 a 和 b，其对角为 α 和 β，于是由此作出一个平面輔助三角形，其具有与球面三角形相同的角度 α 和 β，但必須具有与球面三角形不同的边长 a' 和 b'。

根据球面三角形和平面三角形的正弦定理，我們有下列两个公式：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}} \quad 和 \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a'}{b'}. \tag{1}$$

由此得

$$\frac{a'}{b'}=\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}}=\frac{\frac{a}{r}-\frac{a^3}{6r^3}+\cdots}{\frac{b}{r}-\frac{b^3}{6r^3}+\cdots} \tag{2}$$

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a-\frac{a^3}{6r^2}+\cdots}{b-\frac{b^3}{6r^2}+\cdots} \tag{3}$$

令：

$$a'=a-\frac{a^3}{6r^2} \quad 和 \quad b'=b-\frac{b^3}{6r^2},$$

則式（3）得到滿足。对于任意三角形边 s，則有：

$$s'=s-\frac{s^3}{6r^2}. \tag{4}$$

这样确定的数值 $\frac{s^3}{6r^2}$ 是边长 s 的线附加数，当我們知道半径 r 时，就能計算一