序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军．这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务．人才的培养，基础在教育．然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期的需要．所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件．为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》．

《大学~~学~~基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写．包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用．

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接．为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其[illegible]取和编排不同于[illegible]

本．文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透．为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析．习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示．每册之首都有编者的话，指导读者自学全书．总之，想尽可能减少自学中的困难．

自学，时间总比在学校学习紧得多．要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"．

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础．选读顺序可根据编者的话的指导进行．有志者，事竟成．希望广大读者循序渐近、持之以恒、锲而不舍地学习．愿大家努力学好．

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢．

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

复变函数论这门古老的学科与其他所有的学科一样，也是由于客观实际的需要而产生和发展起来的．如果说，数学在十八世纪是微积分占统治地位的话，那么在十九世纪，复变函数已经取代微积分而占了统治地位，目前它已经发展成为一个强大的数学分支．

在中学里，我们知道，在实数域中代数方程 $x^2+1=0$ 是没有解的，更不要说一般的 n 次代数方程了．但是在很多实际问题中，仍然需要研究它的解．为此引进了一个符号“i”．它具有性质 $i^2=-1$，记作 $i=\sqrt{-1}$．称 i 为虚数单位．这样一来，任意一个 n 次代数方程就有形如 $a+ib$ 的解了，其中 a 与 b 为实数，这种形式的数就称为复数．复数不仅能够用来表示代数方程的根及研究微分方程解的结构问题，而且还能够表示向量．由于大量实际问题中所出现的量都是向量，如速度、加速度、电场强度、磁场强度等．因此就可以用复数来表示这些向量而进行研究．所以，从十九世纪以来，复变函数理论得到了蓬勃的发展，目前，它已与自然科学中的很多学科，如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、地质学、自动控制等发生了密切联系．

从历史上看，高斯 (Gauss) 于 1811 年正式引入了复变函数的概念．复变函数积分的理论是柯西 (Cauchy) 在 1814 年开始建立的．而复变[illegible]理论是由魏尔斯特拉斯

九世纪对复变函数的几何理论作出了很大的贡献. 还有欧拉(Euler)、阿贝尔(Abel)、雅可比(Jacobi)、波阿松 (Poisson)、施瓦兹(Schwarz)等也都在不同方面作出了贡献. 近代,复变函数论的分支很多,有复变函数逼近论、整函数与亚纯函数的值分布理论、黎曼曲面、单叶函数论、广义解析函数、拟保角变换、多复变函数等等.

复变函数论与数学的其他分支有密切的联系, 它作为一个强有力的工具可用来解决如解析数论、微分方程、概率统计、计算数学、拓扑学、微分几何等数学分支中所提出的有关理论及实际问题. 我国数学家陈景润在研究"哥德巴赫猜想"问题中,就广泛地运用了复变函数的理论.

本书的目的是阐明复变函数论中一些最基本的概念、方法和理论, 为今后进一步从事各种实际问题及深入研究的读者打下一个扎实的基础. 书中包括了教育部于 1977 年 11 月制订的《复变函数论大纲》所要求的全部内容. 全书共分九章:第一章,复数的基本概念、序列的极限及复数项级数;第二章,解析函数、柯西-黎曼方程及调和函数;第三章,解析函数的积分理论,并对柯西定理作了严格的证明;第四章,解析函数的级数展开理论并用来研究孤立奇点的分类;第五章,留数理论及用来计算定积分及计算区域内多项式根的个数问题;第六章,解析开拓的概念与方法;第七章,保形变换的一些基本概念及如何实现保形变换的各种方法. 由于保形变换无论在理论上或实际中都有重要的作用,因此,这一章讲述的篇幅也较大. 第八章,拉普拉斯变换、反变换及其在微分方程中的应用;第九章,只是非常简单地介绍一下解析函数在流体力学上的应用. 关于它进一步的研[illegible]参考有关的专门书籍

(中译本，高等教育出版社出版).

本书论证严密，可供广大科技人员作自学参考之用，也可作为理工科大学、师范院校或电视、业余大学的复变函数论课的教科书、教学参考书. 对于非理科大学的学生或自学读者，初读时可略去第六章中的第二节，第七章中的第五节及第六节等. 此外，在证明有些结论时，用到实数理论中的一些知识，若读者不习惯，可暂且忽略证明细节而仅注意结论即可.

本书力求做到直观易懂，有启发性，适合于自学. 凡学过本丛书中一元与多元微积分学的读者，都能够看懂本书.

为了使读者熟练地掌握本书的基本内容，书中配有较多的例题、习题和复习讨论题. 个别较难的习题都标以记号"*"，读者可以选做，但其他习题及讨论题都应逐一演算，这是学习本书不可缺的重要环节. 全书末附有习题答案，供读者参考核对.

我们希望读者阅读本书时，既要注意复变函数与微积分学的紧密联系，能从复变函数更清楚地看到微积分学中一些内容的实质；也要注意它们之间的差异，力求能体会到解析函数理论是解决多种问题的一个强有力的工具，从而在分析和解决实际问题的能力方面得到提高.

沈燮昌

于北京大学数学系

1980 年 12 月

目 录

第四章　解析函数的级数展开

第五章　留数理论及其应用

第六章 解析开拓

第七章 解析函数的几何理论

第八章 拉普拉斯变换初步

第九章 解析函数在流体力学上的应用

习 题 答 案

第一章

复数

复变函数就是自变量为复数的函数. 在这一章中, 我们首先引入复数的概念、性质及其运算, 然后再引入平面上的点集、复数的极限以及由复数所构成的级数的收敛性概念. 本章中的很多概念在形式上与微积分学中的一些基本概念有很多类似之处, 可把它们看作是微积分学中相应概念及定理在复数域中的推广.

第一节 复数的概念

1.1 复数及其表示法

在解代数方程时, 我们已经接触到符号"i", 它是方程

$$x^2+1=0$$

的一个根, 即 $i^2=-1$, 记作 $i=\sqrt{-1}$, 称 i 为虚数单位.

设 x 与 y 都是实数, 我们称形如 $x+iy$ 的数为复数, 并记作 z, 即 $z=x+iy$; x 与 y 分别称为复数 z 的实部与虚部, 记作

$$x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z.$$

符号"Re"是表示实数的拉丁字 realis 的前两个字母; 符号"Im"是表示虚数的拉丁字 imaginarius 的前两个字母. 当虚部 $y=0$ 时, 我们就认为 $z=x+i0=x$, 即 z 就是一个实数 x 因此, 全部实数就是复数的一部分, 复数可以看作是实数的推广. 这种推广等到引进复数的运算后, 就会看得更清楚. 当

实部 $x=0$ 时，我们就认为 $z=0+iy=iy$，此时 z 就是一个纯虚数 iy.

现在设有两个复数

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2,^{*)}$$

且仅当其实部与虚部都相等时，即

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2$$

时，才认为这两个复数是相等的，即 $z_1=z_2$.

从复数相等的规定可以看出：一个复数 z 对应且只对应着一对有序的实数 x 与 y，记作 $z=(x, y)$. 因此

$$z=(x, 0)=x,\quad z=(0, y)=iy.$$

既然一个复数可以表示为 $z=(x, y)$，所以可给复数以几何解释：在平面上取笛卡儿直角坐标系，其原点在 O，坐标轴为 Ox 与 Oy. 每一个复数 $z=(x, y)$，在此直角坐标系中对应着一个点 P，其横坐标为 x，纵坐标为 y；反之，任给平面直角坐标系中的一个点 $P(x, y)$，就有一个复数 $z=x+iy$ 与它相对应. 这样一来，复数就与平面直角坐标系中的点建立了一一对应的关系，这就是复数的几何表示. 特别地，实数与 Ox 轴上的点一一相对应，所以 Ox 轴又称为**实轴**；纯虚数与 Oy 轴上的点一一相对应，所以 Oy 轴又称为**虚轴**. 当然，在虚轴上只有一个点即原点对应着实轴上的数零，故可以认为原点对应着复数 $z=0+i0$，记作 $z=0$. 由于复数与平面上直角坐标系中的点建立了一一对应的关系，因此，以后就称复数 z 为点 z，并称平面为**复数平面**或简称**复平面**.

此外，也可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z=x+iy$，这个向量的起点在原点 $(0, 0)$，终点在点 $P(x, y)$，即向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 Ox

---

*) 今后，如果不作声明，总是用 $x_1, x_2, \cdots$ 或 $y_1, y_2, \cdots$ 表示实数，而用 $z_1, z_2, \cdots$ 表示复数.

轴上的分量为 x，在 Oy 轴上的分量为 y. 向量 $\overrightarrow{OP}$ 还可以看作为自由向量，即对于任何向量，不管其起点与终点的位置如何，只要其长度与方向同 $\overrightarrow{OP}$ 一样，就可以看作是同一个向量. 反过来，对于任一向量，在保持其长度与方向不变的情况下，可以将它平移到起点为原点，终点的横坐标为 x、纵坐标为 y 的向量的位置上，这个终点就对应着一个复数 $z=(x, y)$. 这样，复数与平面上的向量就建立了一一对应的关系，这就是复数的向量表示(见图 1-1).

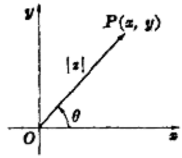

图 1-1

很多实际问题中所研究的量往往都是向量，例如速度、加速度、电场强度、磁场强度等. 由于向量能用复数来表示，因此用复数来表示上述这些量，再加以研究是很方便的.

我们称向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度为复数 $z=x+iy$ 的模，以符号 $|z|$ 或 r 表示，从而有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1}$$

显然有

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|. \tag{2}$$

这几个不等式今后会经常用到. 当点 P 不与原点重合时，即 $z\neq0$ 时，向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 Ox 轴的夹角 θ 称为复数 z 的幅角，记作

$$\theta=\operatorname{Arg} z. \tag{3}$$

显然它可以取无穷多个值，而值与值之间相差 2π 的一个倍数. 因此，任何一个复数 z 都有无穷多个幅角. 设 θ_0 是其中的一个，则公式

$$\theta=\theta_0+2k\pi \quad (k\ 为任意整数)$$

就给出全部的幅角. 在 z 的幅角中，可以取 θ_0 满足

$$0\leqslant\theta_0<2\pi, \tag{4}$$

则 θ_0 称为 z 的主幅角，记作 $\theta_0=\arg z$. 可以用复数 z 的实部 x 与虚部 y 来表示主幅角 $\theta_0=\arg z$. 显然，当 $z=(x, y)$ 在第一象限时，$\arg z=\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$，其中反正切函数的主值规定在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上；当 z 在第二象限时，由于 $\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ 取负值，即 $\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}=-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{|x|}$，容易看出

$$\arg z=\pi-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{|x|}=\pi+\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

(见图 1-2a)；当 z 在第三象限时，$\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ 取正值，即取值在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 之间，因此得到 $\arg z=\pi+\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ (见图 1-2b)；最后，当 z 在第四象限时，$\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ 取负值 $-\operatorname{tg}^{-1}\frac{|y|}{x}$，容易看出

$$\arg z=2\pi-\operatorname{tg}^{-1}\frac{|y|}{x}=2\pi+\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

(见图 1-2c). 总结上述，于是得到

$$\theta_0=\arg z=\begin{cases}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第一象限；}\\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+\pi, & \text{当 } z \text{ 在第二象限；}\\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+\pi, & \text{当 } z \text{ 在第三象限；}\\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+2\pi, & \text{当 } z \text{ 在第四象限.}\end{cases} \tag{5}$$

我们也可以用模 $r=|z|$ 及幅角 $\theta=\operatorname{Arg} z$ 来表示复数 z 的实部 x 及虚部 y:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta. \tag{6}$$

这就是复数的**极坐标表示式**，其中 $r=|z|$ 由

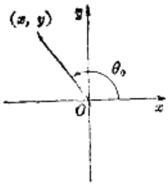

图 1-2a

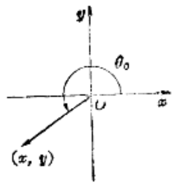

图 1-2b

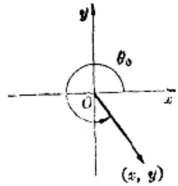

图 1-2c

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

所确定；而 $\theta=\operatorname{Arg} z=\theta_0+2k\pi$ 由公式 (5) 所确定．这样，任何一个复数 $z=x+iy$ 都可以表示为

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=|z|[\cos(\operatorname{Arg} z)+i\sin(\operatorname{Arg} z)], \qquad (7)$$

这就是复数的三角表示式．

由两个复数 z_1 及 z_2 相等的规定，从公式(1)及(5)容易看出：若 $z_1\neq0$，$z_2\neq0$，两个复数 z_1 及 z_2 相等的充要条件是：$|z_1|=|z_2|$，且 $\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2$．其中后一个式子应该理解为 $\operatorname{Arg} z_1$ 与 $\operatorname{Arg} z_2$ 两个量中任何一个取定一个值以后，另一个所取的无穷多个值中可以找到一个值与之相等．今后，一些类似这样的等式都按上述的意义理解．

设

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}, \qquad (8)$$

我们说这个写法是合理的，因为复数 $\cos\theta+i\sin\theta$ 具有指数函数的一些特性，如按普通乘法用分配律相乘，只要注意到 $i^2=-1$，可以证明：

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)=e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \qquad (9)$$

且 $e^{i\theta}\neq 0$（留给读者证明）. 这都是实指数函数所固有的性质. 这样，就可以把复数 z 写成

$$z=re^{i\theta}, \tag{10}$$

其中 $r=|z|$，$\theta=\operatorname{Arg} z$.

容易看出：

$$|e^{i\theta}|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1.$$

(10)称为复数的指数表示式. 这种表示式在今后的理论研究或应用中是很方便的.

【例 1】 求证 $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$，$e^{i\pi}=-1$，$e^{i\frac{3}{2}\pi}=-i$，$e^{i2\pi}=1$.

解：由公式(8)，容易得到

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i=i,$$

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1,$$

$$e^{i\frac{3}{2}\pi}=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=0-i=-i,$$

$$e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1+i\cdot 0=1.$$

【例 2】 求复数 $z=1+i$ 的三角表示式与指数表示式.

解：由公式(1)与(5)得到

$$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \theta_0=\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4},$$

因此 $$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

1.2 复数的运算及几何意义

复数的运算

1) 复数的加法　两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 的加法定义如下：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

这样，复数的加法运算与实数的加法运算在形式上没有什么不同. 并且复数的相加与两个向量的平行四边形法则也是一样的. 事实上，从图1-3可看出：两个向量按平行四边形法则相加后得到的向量，如果其起点在原点时，则其终点的坐标正是 x_1+x_2 与 y_1+y_2.

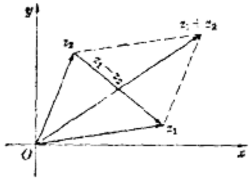

图 1-3

2) 复数的减法　复数相减是作为复数相加的逆运算来定义的. 设有两个复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. 若存在 z, 使得

$$z_2+z=z_1, \tag{11}$$

则称 z 是由复数 z_1 及 z_2 相减后得到的复数，记作

$$z=z_1-z_2.$$

设 $z=x+iy$, 则由复数相加的定义，由(11)可以得到

$$(x_2+x)+i(y_2+y)=x_1+iy_1.$$

再由复数相等的规定得到

$$x_2+x=x_1, \quad y_2+y=y_1,$$

由此得 $$x=x_1-x_2, \quad y=y_1-y_2,$$

即 $$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

从上述讨论可看出：两个复数相减后得到的复数是唯一的.

这样，复数的减法运算与实数的减法运算在形式上也没有什么不同.

由于复数相减是作为复数相加的逆运算来定义的，而复数相加符合向量按平行四边形相加的法则，因此两复数相减 z_1-z_2 就得到起点在向量 z_2 的终点，终点在向量 z_1 终点的向量(见图 1-3).

3) 复数的乘法　设复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, 定义两个复数 z_1 及 z_2 的乘法为:

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{12}$$

它可以看作对两个复数表示式用分配律进行运算, 并注意到 $i^2=-1$ 而得到的.

【例 3】　设　$z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{3}+i$, 求 z_1z_2.

解:

$$\begin{aligned} z_1z_2&=(1+i)(\sqrt{3}+i)\\ &=\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1\\ &=(\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

若将复数 z_1 及 z_2 写成三角表示式及指数表示式时:

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1},$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}.$$

则由公式(8)得到

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\\ &=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned} \tag{13}$$

由此推出

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2. \tag{14}$$

因此,两个复数乘积的模等于它们的模相乘,两个复数乘积的幅角等于它们的幅角相加.

从公式 (13) 可以看出, 复数相乘的几何意义是将复数 z_1 放大 $|z_2|$ 倍, 然后将其幅角按逆时针方向旋转一个角度 $\operatorname{Arg} z_2$. 即作一个相似变换,然后再作一个旋转变换即得.

【例 4】　求复数 $z=re^{i\theta}$ 的正整数次幂 z^n.

解:

$$\begin{aligned} z^n&=\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n\text{ 个}}=\underbrace{re^{i\theta}\cdot re^{i\theta}\cdots re^{i\theta}}_{n\text{ 个}}=r^ne^{in\theta}\\ &=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta). \end{aligned}$$