高等代数

线性代数

中

[redacted]

福州师专数学科

中 册 目 录

第六章 线性空间

1．设$M\subset N$，证明$M\cap N=M$，$M\cup N=N$

证 因为$M\cap N\supseteq M$・又如果$\alpha\in M$，而$M\subset N$，所以$\alpha\in N$则$\alpha\in M\cap N$，从而$M\subseteq M\cap N$故得$M\cap N=M$

又因$M\cup N\supseteq N$ 如果$\alpha\in M\cup N$，而$M\subset N$，所以$\alpha\in N$，从而$N\supseteq M\cup N$ 故得$M\cup N=N$.

2．证明 $M\cap(N\cup L)=(M\cap N)\cup(M\cap L)$

$M\cup(N\cap L)=(M\cup N)\cap(M\cup L)$

证 设 $\alpha\in M\cap(N\cup L)$则$\alpha\in M$且$\alpha\in N\cup L$ 也就是$\alpha\in M$且$\alpha\in N$或L，所以$\alpha\in(M\cap N)$ 或者 $\alpha\in(M\cap L)$ 因此 $\alpha\in(M\cap N)\cup(M\cap L)$从而有

$$M\cap(N\cup L)\subseteq(M\cap N)\cup(M\cap L) \qquad (6.01)$$

反之，如果$\alpha\in(M\cap N)\cup(M\cap L)$则$\alpha\in M\cap N$或者$\alpha\in M\cap L$，也就是$\alpha\in M$且$\alpha\in N$ 或$\alpha\in L$. 因此 $\alpha\in M\cap(N\cup L)$从而有

$$M\cap(N\cup L)\supseteq(M\cap N)\cup(M\cap L) \qquad (6.02)$$

由 (6.01)、(6.02) 得

$$M\cap(N\cup L)=(M\cap N)\cup(M\cap L) \qquad (6.03)$$

其次，由 (6.03) 以及$(M\cup N)\cap M=M$，$M\cup(N\cup L)=M\cup[(M\cup N)\cap L]$ 得

$$(M\cup N)\cap(M\cup L)=[(M\cup N)M]\cup[(M\cup N)\cap L]$$

$$=M\cup[(M\cup N)\cap L]=M\cup(N\cap L)$$

3．检验以下集合对于所指的线性运动算是否构成实数

域上的线性空间

1）次数等于 $n(n\geqslant 1)$ 的实系数多项式的全体，对于多项式的加法和数量乘法

检验：因为两个次数等于n的实系数多项式之和可能是次数小于n的多项式，所以它不能构成线性空间。

2）设 A 是一个 $n\times n$ 实数矩阵，A 的实系数多项式 $f(A)$ 的全体，对于矩阵的加法和数量乘法。

检验：设

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

$$g(A)=b_kA^k+b_{k-1}A^{k-1}+\cdots+b_1A_1+ba_0E$$

且 $m\geqslant K$。$a_i,b_j\in R$ $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,K)$ 则

$$f(A)+g(A)=(a_m+b_m)A^m+\cdots+(a_i+b_i)A^i+\cdots$$
$+(a_0+b_0)E$（其中当 $j>K$ 时 $b_j=0$）还是A的实系数多项式

又对任一实数 ξ

$$\xi f(A)=\xi a_mA^m+\xi a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+\xi a_1A+\xi a_0E$$

也是A的实系数多项式。此外，由于矩阵对加法和数量乘法满足线性空间定义的诸条件，所以A的实系数多项式全体对于矩阵的加法和数乘构成线性空间。

3）全体实对称（反对称、上三角）矩阵，对于矩阵的加法和数量乘法。

检验：因为 $m\times n$ 矩阵和 $m_1\times n_1$ 矩阵，当且仅当 $m=m_1$，$n=n_1$ 时才可能施行加法，所以全体实对称（反对称、上三角）矩阵不构成一个线性空间。

但是可以验证全体 $m\times m$ 实对称（反对称、上三角）矩阵对于矩阵的加法和数乘是一个线性空间。这是因为矩阵的加法和数乘满足线性空间定义的诸条件。并且 $m\times m$ 实对称（反对称、上三角）矩阵对这些运算是封闭的。

4）平面上不平行于某一向量的全部向量所成的集合对于向量的加法和数乘法。

检验：同为不平行于某一向量的两个向量之和可能平行于这个向量。所以对于加法这个向量集向不是自封闭的。当然更不成线性空间。

5）全体实数的二元数例，对于下面定义的运算

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$$

$$K\circ(a_1,b_1)=\left(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right)$$

检验：显然由上面定义的运算对全体实数的二元数列是自封闭的。此外：

1° $(a_1,\ b_1)\oplus(a_2,\ b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)$
$=(a_2+a_1,\ b_2+b_1+a_2a_1)=(a_2,\ b_2)\oplus(a_1,\ b_1)$

2° $((a_1,\ b_1)\oplus(a_2,\ b_2))\oplus(a_3,\ b_3)$
$=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)\oplus(a_3,\ b_3)$
$=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)$
$=(a_1,b_1)\oplus(a_2+a_3,b_2+b_3+a_2a_3)$
$=(a_1,b_1)\oplus((a_2,b_2)\oplus(a_3,b_3))$

3° 取(0,0)作为零元素．$(a,b)\oplus(0,0)=(a,b)$

4° (a,b)的负元素取作$(-a,a^2-b)$ 则
$(a,b)\oplus(-a,\ a^2-b)=(a-a,b+a^2-b-a^2)$
$=(0,\ 0)$

5° $1\circ(a,b)=(a,b)$

6° $l\circ(k\circ(a,b))=l\circ\left(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)$

$$=\left(lka,l\left(kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)+\frac{l(l-1)}{2}k^2a^2\right)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

$$=\left(lka, lkb+\left(\frac{lk(k-1)}{2}+\frac{l(l-1)}{2}k^2\right)a^2\right)$$

$$=\left(lka, lkb+\frac{lk(lk-1)}{2}a^2\right)=(lk)\circ(a,b)$$

7° $$(k+l)\circ(a,b)=\left((k+l)a,(k+l)b+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2\right)$$

$$=\left(ka+la, kb+lb+\frac{k(k-1)}{2}a^2+\frac{l(l-1)}{2}a^2+lka^2\right)$$

$$=\left(ka, kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)\oplus\left(la, lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right)$$

$$=k\circ(a,b)\oplus l\circ(a,b)$$

8° $$k\circ((a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2))=k\circ(a_1+a_2, b_1+b_2+a_1a_2)$$

$$=\left(k(a_1+a_2), k(b_1+b_2+a_1a_2)+\frac{k(k-1)}{2}\right.$$

$$\left.(a_1^2+a_2^2+2a_1a_2)\right)$$

$$=\left(ka_1+ka_2, kb_1+kb_2+ka_1a_2+\frac{k(k-1)}{2}\right.$$

$$\left.(a_1^2+a_2^2+2a_1a_2)\right)$$

$$=\left(ka_1+ka_2, kb_1+kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2+\frac{k(k-1)}{2}\right.$$

$$\left.a_2^2+k^2a_1a_2\right)$$

$$=\left(ka_1, kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right)\oplus\left(ka_2, kb_2\right.$$

$$\left.+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2\right)$$

$$=k\circ(a_1,b_1)\oplus k\circ(a_2,b_2)$$

因此全体实数的二元数列，对于定义的加法和数乘构成一个实数域上的线性空间。

6）平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量乘法：$k\cdot\alpha=0$。

检验：因为 $1\cdot\alpha\neq\alpha$，所以不构成一个线性空间。

7）集合与加法同6），数量乘法定义为：$k\cdot\alpha=\alpha$

检验：因为 $(k+l)\alpha=\alpha$；而 $k\cdot\alpha+l\cdot\alpha=\alpha+\alpha=2\cdot\alpha$

则
$$(k+l)\ \alpha\neq k\cdot\alpha+l\cdot\alpha$$

因此，平面上全体向量对于所定义的加法和数乘不构成线性空间。

8）全体正实数 R^+，加法和数乘定义为：

$$a\oplus b=ab$$
$$k\circ b=b^k$$

检验：显然全体正实数 R^+ 对于定义的加法，数乘运算是自封闭的。此外，

1° $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$

2° $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=abc=a(bc)=a\oplus(bc)$
$$=a\oplus(b\oplus c)$$

3° 取1作为零元素 $a\oplus 1=a$

4° a的负元素取作 $\frac{1}{a}$（a是正实数） 则

$$a\oplus\frac{1}{a}=1\quad(1\text{是零元素})$$

5° $k\circ(l\circ a)=k\circ a^l=a^{kl}=(kl)\circ a$

6° $1\circ a=a$

7° $k\circ(a\oplus b)=k\circ(ab)=(ab)^k=a^kb^k=a^k\oplus b^k$
$=(k\circ a)\oplus(k\circ b)$

8° $(k+l)\circ a=a^{k+l}=a^ka^l=a^k\oplus a^l$
$=(k\circ a)\oplus(l\circ a)$

因为全体正实数 R^+，对于以上定义的加法、数乘构成一个实数域上的线性空间。

4. 在线性空间中，证明 1）$k0=0$。2）$k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$。

证　1）设 α 是线性空间中的任意一个元素，则

$$\alpha+0=0 \quad 且 \quad k(\alpha+0)=k\alpha+k0$$

所以

$$k\alpha=k\alpha+k0$$

又线性空间中零元素是唯一的，则 $k0=0$

2）从 1）得 $k(\beta+(-\beta))=k\beta+k(-\beta)=0$ 所以

$$k\beta+(-k)\beta=(k+(-k))\beta=0=k\beta+k(-\beta)$$

又线性空间中任一元素的负元素是唯一的，则 $k(-\beta)=(-k)\beta$

因此 $k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta)=k\alpha-k\beta$。

5. 证明　在实函数空间中 1，$\cos^2 t$ $\cos^2 t$ 是线性相关。

证　因为 $\cos 2t=2\cos^2 t-i$ 则有

$$1-2\cos^2 t+\cos 2t=0$$

所以 1，$\cos^2 t$，$\cos 2t$ 线性相关的。

6. 如果 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ 是线性空间 $p[x]$ 中三个互素的多项式，但其中任意两个都不互素，那么它们线性无关。

证　如果 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ 线性相关，可设

$$k_1 f_{i_1}+k_2 f_{i_2}=f_{i_3} \qquad (6.04)$$

其中 j_1，i_2，i_3 分别表1，2，3中的一个数。

因为 f_{i_1} 与 f_{i_2} 不互素，设 $(f_{i_1},f_{i_2})=d(x)$ $(\partial(d(x))$

$\geqslant 1$) 由 (6.04)得$d(x)|f_{i_3}$，因此与$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$互素矛盾了，从而$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$必线性无关。

7. 在P^4中求向量ξ在基ε_1，ε_2，ε_3，ε_4下的坐标

设 1) $\varepsilon_1=(1,1,1,1)$，$\varepsilon_2=(1,1,-1,-1)$，

$\varepsilon_3=(1,-1,1,-1)$，$\varepsilon_4=(1,-1,-1,1)$，$\xi=(1,2,1,1)$

解 设 $\xi=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3+k_4\varepsilon_4$ 即有

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\tag{6.05}$$

其中

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

代入(6.05)得$k_1=\frac{5}{4}$，$k_2=\frac{1}{4}$，$k_3=-\frac{1}{4}$，$k_4=-\frac{1}{4}$。因此ξ在基ε_1，ε_2，ε_3，ε_4下的坐标是（$\frac{5}{4}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{4}$）

2) $\varepsilon_1=(1,1,0,1)$，$\varepsilon_2=(2,1,3,1)$，

$\varepsilon_3=(1,1,0,0)$，$\varepsilon_4=(0,1,-1,-1)$，$\xi=0,0,0,1)$

〔答案：ξ在基ε_1，ε_2，ε_3，ε_4下的坐标是$(1,0,-1,0)$〕

8. 求下列线性空间的维数与一组基。

1) 数域P上的空间$P^{n\times n}$。

解 数域P上的空间$P^{n\times n}$是$n\times n$维的。

设

$$E_{ij}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

其中 $a_{ij}=1$ 而其余的元素都等于0，我们来证明E_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是$P^{n\times n}$空间的一组基。

如果有

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}E_{ij}=0 \qquad (\text{0是零矩阵})$$

因为 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} k_{ij}E_{ij}=(k_{ij})_{n\times n}$ 则有 $(k_{ij})_{n\times n}=0$ 即 $k_{ij}=0$ $(i,j=1,\cdots,n)$ 因此$E_{11},E_{12},E_{21},\cdots,E_{nn}$线性无关。

又设任一$n\times n$矩阵$B=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$ 则有

$$B=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}E_{ij}$$

所以 $E_{11},E_{12},E_{21},\cdots,E_{nn}$是$P^{n\times n}$空间的一组基。

2）$P^{n\times n}$中全体对称矩阵（反对称、上三角）作成的数域P上的空间。

解 $P^{n\times n}$中全体对称矩阵作成的数域P上的空间是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维的。 设

$$A_{ij}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}=1$，而其余的元素都等于零，$(i\leqslant j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 显然A_{ij}皆是对称矩阵。我们来证明 A_{ij} $(i\leqslant j,i,j=1,2,\cdots,n)$这$\frac{n(n+1)}{2}$个对称矩阵是$P^{n\times n}$中全体对称矩

阵作成的数域P上空间的一组基。

如果有 $$\sum_{\substack{i,j=1\\(i\leqslant j)}}^{n} K_{ij}A_{ij}=0$$ （0是零矩阵）

因为 $\sum_{\substack{i,j=1\\(i\leqslant j)}}^{n} k_{ij}A_{ij}=(\xi_{ij})_{n\times n}$，$(\xi_{ij})_{n\times n}$矩阵第i行第j列元素等于第i列第j行的元素，且都等于$k_{ij}(i\leqslant j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 则有$(\xi_{ij})_{n\times n}=0$即$k_{ij}=0(i\leqslant j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 因此A_{11}，$A_{12},\cdots,A_{1n},A_{22},A_{23},\cdots,A_{2n},\cdots,A_{nn}$是线性无关的。

又设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 其中$b_{ij}=b_{ji}$，是任一$n\times n$对称矩阵。则有：

$$B=\sum_{\substack{i,j=1\\(i\leqslant j)}}^{n} b_{ij}A_{ij}$$

所以 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n},A_{22},A_{23},\cdots,A_{2n},\cdots,A_{nn}$是这个空间的一组基。

（同样可以证明：$P^{n\times n}$中全体反对称矩阵作成的数域P上的空间是$\frac{(n-1)n}{2}$维的。 取

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}=-a_{ji}=1$，而其余元素都等于零$(i<j,i,j=1,2,\cdots,n)$作为空间的一组基。

$P^{n\times n}$中全体上三角矩阵作成的数域P上的空间是$\frac{(n+1)n}{2}$维的。 取

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}=1$，其余元素都等于零（$i\leqslant j, i,j=1,2,\cdots,n$）作为空间的一组基。

3）第三题8）中的空间。

解　这空间是一维的。可取任一不等于1的正实数例如e，作为这空间的基。因为 $e\neq 1$，是这空间的非零元素，自然是线性无关的。其次，取 $k=\ln a$ $(a\neq 1)$ 则 $a=k_0 e=e^{\ln a}$ 所以e是这空间的一组基.

4）实数域上由矩阵A的全体实系数多项式组成的空间，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \qquad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

解　因为 $A^3=E$。因此任一关于A的实系数多项式 $a_nA^n+\cdots+a_0E$ 都可以整理为 $b_2A^2+b_1A+b_0E$ 形式，即都可以由 E、A、A^2 线性表出，并且如果有

$$k_0E+k_1A+k_2A^2=0 \qquad (0\text{ 表零矩阵})$$

则

$$\begin{cases} k_0+k_1+k_2=0 \\ k_0+k_1\omega+k_2\omega^2=0 \\ k_0+k_1\omega^2+k_2\omega=0 \end{cases} \qquad (6.06)$$

由系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}\neq 0$ 应用克莱姆法则可知(6.06)仅有唯一零解，即 $k_1=k_2=k_0=0$，因此这空间是三维的，E,A,A^2 是它的一组基。

9. 在P^4中求由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的过渡矩阵，并求向量$\xi$在所指基下的坐标，设

1) $\begin{cases}\varepsilon_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0)\\ \varepsilon_2=(0,\ 1,\ 0,\ 0)\\ \varepsilon_3=(0,\ 0,\ 1,\ 0)\\ \varepsilon_4=(0,\ 0,\ 0,\ 1)\end{cases}$ $\begin{cases}\eta_1=(2,\ 1,\ -1,\ 1)\\ \eta_2=(0,\ 3,\ 1,\ 0)\\ \eta_3=(5,\ 3,\ 2,\ 1)\\ \eta_4=(6,\ 6,\ 1,\ 3)\end{cases}$

$\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4,)$在$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的坐标。

解 设过渡矩阵为A。则

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3\eta_4)=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)A$$

即
$$\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}A$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$$

又设ξ在$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的坐标是$(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')$

则
$$(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4)A\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{6.07}$$

而

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{11}{9} \\ \frac{1}{27} & \frac{4}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-23}{27} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{27} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{26}{27} \end{pmatrix}$$

代入(6.07)得

$$\begin{aligned} x_1' &= \tfrac{4}{9}x_1+\tfrac{1}{3}x_2-x_3-\frac{11}{9}x_4 \\ x_2' &= \frac{1}{27}x_1+\tfrac{4}{9}x_2-\tfrac{1}{3}x_3-\frac{23}{27}x_4 \\ x_3' &= \tfrac{1}{3}x_1 \qquad\qquad\qquad\quad -\tfrac{2}{3}x_4 \\ x_4' &= -\frac{7}{27}x_1-\tfrac{1}{9}x_2+\tfrac{1}{3}x_3+\frac{26}{27}x_4. \end{aligned} \tag{6.08}$$

2) $\begin{cases} \varepsilon_1=(1,2,-1,0) \\ \varepsilon_2=(1,-1,1,1) \\ \varepsilon_3=(-1,2,1,1) \\ \varepsilon_4=(-1,-1,0,1) \end{cases}$ $\begin{cases} \eta_1=(2,1,0,1) \\ \eta_2=(0,1,2,2) \\ \eta_3=(-2,1,1,2) \\ \eta_4=(1,3,1,2) \end{cases}$

$\xi=(1,0,0,0)$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的坐标

〔答案：过渡矩阵是$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ξ在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$。

下的坐标为（$\frac{3}{13}$，$\frac{5}{13}$，$-\frac{2}{13}$，$-\frac{3}{13}$）〕

3) $\begin{cases} \varepsilon_1=(1,1,1,1) \\ \varepsilon_2=(1,1,-1,-1) \\ \varepsilon_3=(1,-1,1,-1) \\ \varepsilon_4=(1,-1,-1,1) \end{cases}$ $\begin{matrix} \eta_1=(1,1,0,1) \\ \eta_2=(2,1,3,1) \\ \eta_3=(1,1,0,0) \\ \eta_4=(0,1,-1,-1) \end{matrix}$

$\xi=(1,0,0-1)$在$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的坐标。

〔答案：过渡矩阵是$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ξ在η_1,η_2,η_3，

η_4下的坐标为（-2，$-\frac{1}{2}$，4，$-\frac{3}{2}$）〕

10. 继（第9题1）求一非零向量ξ，它在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2$，$\varepsilon_3,\varepsilon_4$与$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下有相同的坐标。

解 设$x_1'=x_1$，$x_2'=x_2$，$x_3'=x_3$，$x_4'=x_4$代入(6.08)

得
$$\begin{cases}-\frac{5}{9}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3-\frac{11}{9}x_4=0\\ \frac{1}{27}x_1-\frac{5}{9}x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{23}{27}x_4=0\\ \frac{1}{3}x_1\qquad\qquad-x_3-\frac{2}{3}x_4=0\\ -\frac{7}{27}x_1-\frac{1}{9}x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{27}x_4=0\end{cases}$$

解方程组得 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(k,k,k,-k)$，因此 $\xi=(k,k,k,-k)$（k是任意非零常数）在基 ε_1，ε_2，ε_3，ε_4 与 η_1，η_2，η_3，η_4 下有相同的坐标。

11．证明　实数域作为它身上的线性空间与第3题8）中的空间同构。

证法1．取 R^+ 中的元素 α 对应于R中的元素 $\ln\alpha$，显然它是 R^+ 到R上的1－1映上的映射，此外

$$1°\quad \ln(\alpha\oplus\beta)=\ln(\alpha\beta)=\ln\alpha+\ln\beta$$

$$2°\quad \ln(k\circ\alpha)=\ln\alpha^k=k\ln\alpha$$

因此 R^+ 与R空间同构。

证法2．因为它们都是实数域上的一维线性空间，所以同构。

12．设 V_1，V_2 都是线性空间V的子空间，且 $V_1\subseteq V_2$

证明　如果 V_1 的维数和 V_2 的维数相等，那么 $V_1=V_2$。

证　设 V_1 和 V_2 空间的维数是S．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 V_1 的一组基。因为 $V_1\subseteq V_2$，所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V_2$，由 V_2 也是S维的．则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 也是 V_2 的一组基。从而得 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=V_2$。

13．设 $A\in P^{n\times n}$

1）证明　全体与A可交换的矩阵组成 $P^{n\times n}$ 的一子空间记作C(A)

证　设$\alpha,\beta\in C(A)$　则

$1°$　$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A=A\alpha+A\beta=A(\alpha+\beta)$

即$\alpha+\beta\in C(A)$

$2°$　$(k\alpha)A=k(\alpha A)=k(A\alpha)=(A\alpha)k=A(\alpha k)$
$=A(k\alpha)$　即$k\alpha\in C(A)$。因此$C(A)$是$P^{n\times n}$的一子空间。

2）当$A=E$时求$C(A)$

解　当$A=E$时，对于任一$n\times n$矩阵α都有$\alpha E=E\alpha$
故$C(A)=P^{n\times n}$

3）　当$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n\end{pmatrix}$时，求$C(A)$的维数和一组基。

解　由第四章的习题5知与A可交换的矩阵只能是对角矩阵。因此$C(A)$是$P^{n\times n}$中全体对角矩阵的集合。它是n维的，易证$E_{11},E_{22},\cdots,E_{nn}$是$C(A)$空间的一组基。

14.　设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$$

求$P^{3\times3}$中全体与A可交换的矩阵所成子空间的维数和一组基。

解　设$B=(b_{ij})_{3\times3}\in C(A)$。　即　$AB=BA$
由矩阵乘法法则得：

$$\begin{pmatrix}b_{11}+3b_{13}&b_{12}+b_{13}&2b_{13}\\b_{21}+3b_{23}&b_{22}+b_{23}&2b_{23}\\b_{31}+3b_{33}&b_{32}+b_{33}&2b_{33}\end{pmatrix}$$

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook