经济数学（2）　线性代数

目　次

线　性　代　数

第一章　行　列　式

在社会生产和经济现象中，有很多变量之间的关系可以直接地或近似地表述为线性函数。因此在经济数学中研究线性函数是一个非常重要的问题。线性代数主要是研究线性函数。在线性代数中，线性方程组求解问题是一个基础部分。求解线性方程组需要运用行列式这一工具。所以在第一章中，就要来研究行列式。学习这一章主要懂得以下三个问题：

1.行列式概念的形成

2.行列式的基本性质与计算方法

3.运用行列式求解线性方程组。

下面分节来讲。

一、行列式的概念

在中学代数里，我们早就学过用 2 阶行列式解两个未知数的线性方程组以及用 3 阶行列式解三个未知数的线性方程组等

等。由此推广到用n阶行列式求解n个未知量的线性方程组的问题。行列式的概念就由此而形成。下面我们从复习开始。

先求解两个未知量x_1，x_2的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

其中b_1，b_2是常数项。a_{ij}为x_i的系数，它有两个附标第1个附标i表示它在第i个方程第2个附标j表示它是第j个未知数的系数例如a_{12}就是第一个方程中x_2的系数然后用消元法消去x_2。即

$$\begin{array}{ll} a_{22}\times(1) & a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22} \\ a_{12}\times(2)\ -) & a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{12}b_2 \\ \hline & (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 \quad =b_1a_{22}-a_{12}b_2 \end{array}$$

同理消去x_1得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

因此当$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，我们有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}; \quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}; \quad \cdots(3)$$

为了便于记忆这个表达式，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

这就叫做2阶行列式。它包含有两行两列。横写的叫做行。竖写的叫做列。行列式中的数又叫做行列式的元a_{12}就是在第1行，第2列上的元。从上式得知：2阶行列式是这样两个项的代数和：一个是从左上角到右下角的对角线（又叫做行列式的主对角线）上两元的乘积，取正号；另一个是在从右上角到左下角的对角线（又叫做行列式的次对角线）上两元的乘积取负号。例如

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\times 7-(-5)\times 3=14+15=29$$

依据定义我们容易得知：(3)式两个分子可以分别写为：

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

如果我们说 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

那么(1)与(2)方程组的解可以写为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-3y=-2 \end{cases}$$

解：因 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-1\times 1=-7$

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-1\times 7=-11$$

故 $x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-19}{-7}$； $y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-11}{-7}=\dfrac{11}{7}$

再求解三个未知量的线性方程组。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongboc

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\cdots\cdots\cdots\cdots(4)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\cdots\cdots\cdots\cdots(6)\end{cases}$$

同上面一样，先从前两式消去 x_3，后两式消去x_3，得到只含x_1，x_2的两个新线方程；再从这两个新线性方程消去x_2。

$$\begin{array}{ll} a_{23}\times(4) & a_{11}a_{23}x_1+a_{12}a_{23}x_2+a_{13}a_{23}x_3=b_1a_{23}\\ a_{13}\times(5) & -)a_{13}a_{21}x_1+a_{13}a_{22}x_2+a_{13}a_{23}x_3=a_{13}b_2\\ \hline & (a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x_2=b_1a_{23}\\ & =a_{13}b_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)\end{array}$$

又

$$\begin{array}{ll} a_{33}\times(5) & a_{21}a_{33}x_1+a_{22}a_{33}x_2+a_{23}a_{33}x_3=b_2a_{33}\\ a_{23}\times(6) & -)a_{23}a_{31}x_1+b_{23}a_{32}x_2+a_{23}a_{33}x_3=a_{23}b_3\\ \hline & (a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})x_1+(a_{22}a_{23}-b_{23}a_{32})x_2\\ & =b_2a_{33}-a_{23}b_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)\cdots\cdots\end{array}$$

再从(7)与(8)式中消去x_2，即

$(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})\times(7)$

$$a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$$
$$(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})x_2=(b_1a_{23}-a_{13}b_2)(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

$(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\times(8)$

$$\begin{array}{ll} & (a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})x_1+\\ & +(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})x_2\\ -) & =(b_2a_{33}-a_{23}b_3)(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\\ \hline & [(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})(v_{22}a_{33}-v_{23}a_{32})\\ & -(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})]x_1\\ & =(b_1a_{23}-a_{13}b_2)(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-\\ & -(b_2a_{33}-a_{23}b_3)(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{\cdot 2})\end{array}$$

将上式左右两边展开整理即得：

$$a_{23}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1=a_{23}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33})$$

两边消去a_{23}得:

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

当x_1的系数

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq0.$$时，得出:

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}q_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).$$

同样可以求得:

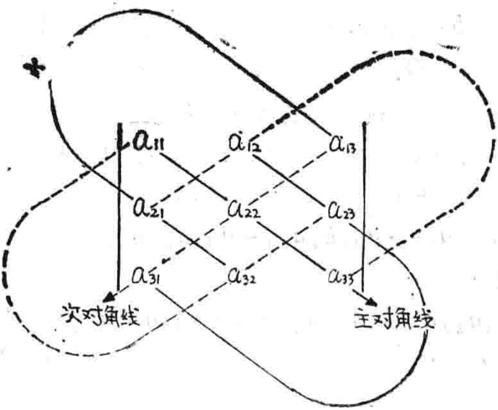
$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{22}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).$$

所以，当$D\neq0$时，如果(4)(5)(6)方程组有解，就一定是上述唯一形式。同前面一样为便于书写，我们引进3阶行列.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \quad\cdots\cdots(9)$$

它有三行、三列、是6个项的代数和。这6个项我们可以这样记忆；实线上三个元的乘积取正号有三项，虚线上三个元的乘积取负号也有三项。



譬如 3 阶行列式为

$$A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$=2\times3\times5+1\times1\times2+(-4)\times3\times2$$

$$-2\times3\times2-1\times3\times2-(-4)\times1\times5$$

$$=30+2-24-12-6+20=10。$$

上面x_1, x_2, x_3的表达式分母都是行列式。

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

而分子是把行列式D中第 1，2，3 列分别换成常数项b_1，b_2，b_3得到的行列式D_1，D_2，D_3。即

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & c_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ e_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$
\therefore \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_1 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}
$$

于是上(4)(5)(6)方程组的解，可以简单书写为

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}; \qquad x_3 = \frac{D_3}{D};
$$

这与前面两个未知量类似。

例2 解线性方程组

$$
\begin{cases} 2x - \ \ y + \ \ z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ \ \ x + 3y - 2z = 4 \end{cases}
$$

解；这里

$$
D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 9 + 5 - 2 + 30 - 6 = 28
$$

$$
D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 20 + 3 - 8 - 2 = 13
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 12 - 1 + 40 = 47
$$

$$
D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 + 12 - 6 = 21
$$

$$
\therefore \quad x = \frac{13}{28}; \qquad y = \frac{47}{28}; \qquad z = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}。
$$

从上面二例我们已经看到：包含有 2 个未知量的方程组与

3个未知量的方程组，可以分别运用2阶、3阶行列式来求解。自然会使我们想到如何推广到运用n阶行列式来解n个未知量的方程组的问题。这样问题就复杂了。首先，碰到的问题是如何定义n阶行列式。即行列式表达什么样的式子。如前，我们从两个未知量中消去一个非常容易，但从三个未知量方程组中消去两个未知量就很麻烦了。至于一般象上面那样从n个未知量中消去$n-1$个简直是不可能了。因此，我们就不能用上面类似的方法来定义n阶行列式。但是怎么办呢？

先从研究3阶行列式(9)的结构讲起。

1.首先我们看到(9)中每项都是三个元的乘积。这三个元在不同的行，不同的列。于是(9)的任意项可以写成$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里$p_1p_2p_3$是1,2,3的一个排列。

2.(9)中每项都带有符号，不是正号便是负号，这是根据什么规律确定呢？我们知道在主对角线上三个元乘积的项$a_{11}a_{22}a_{33}$是带正号，其他五项中三个元都不完全在主对角线上或者都不在主对角线上。带负号的三项$a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$都只要互换行列式的两行或两列就可以把项中三个元移到新行列式的主对角线上。见下列

如$a_{11}a_{23}a_{32}$项

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & a_{23} \\ \text{〃} & a_{32} & \text{〃} \end{vmatrix} \quad \text{变　为} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & a_{32} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & a_{23} \end{vmatrix}$$

如$a_{12}a_{21}a_{33}$项

$$\begin{vmatrix} \text{〃} & a_{12} & \text{〃} \\ a_{21} & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{变　为} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & a_{21} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & a_{33} \end{vmatrix}$$

如 $a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$项

$$\begin{vmatrix} \text{〃} & \text{〃} & a_{13} \\ \text{〃} & a_{22} & \text{〃} \\ a_{31} & \text{〃} & \text{〃} \end{vmatrix} \text{变 为} \begin{vmatrix} a_{13} & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & a_{22} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & a_{31} \end{vmatrix}$$

但对带正号的其他两项$a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$及$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$却需要两个互换。

譬如$a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$先互换第1，第2两行，再互换第1第3两列才行。

$$\begin{vmatrix} \text{〃} & a_{12} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & a_{23} \\ a_{31} & \text{〃} & \text{〃} \end{vmatrix} \text{变为} \begin{vmatrix} \text{〃} & \text{〃} & a_{23} \\ \text{〃} & a_{12} & \text{〃} \\ a_{31} & \text{〃} & \text{〃} \end{vmatrix} \text{变为} \begin{vmatrix} a_{23} & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & a_{12} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & a_{31} \end{vmatrix}$$

又譬如$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$ 先互换第 1，第 2 两行再互换第 2 第 3 列才行

$$\begin{vmatrix} \text{〃} & \text{〃} & a_{13} \\ a_{21} & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & a_{32} & \text{〃} \end{vmatrix} \text{变为} \begin{vmatrix} a_{21} & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & a_{13} \\ \text{〃} & a_{32} & \text{〃} \end{vmatrix} \text{变为} \begin{vmatrix} a_{21} & \text{〃} & \text{〃} \\ \text{〃} & a_{13} & \text{〃} \\ \text{〃} & \text{〃} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这样我们就得到（9）中各项带符号的规律；用互换两行或两列的方法把乘积$a_{1p_1}\ a_{2p_2}\ a_{3p_3}$中三元都移到新行列式的主对角线上；当互换的个数是偶数时，则$a_{1p_1}\ a_{2p_2}\ a_{3p_3}$带正号；当互换的个数是奇数时，则带负号。

3.因为1.2.3.共有3！＝6个不同的排列，所以（9）是6个项的代数和。

于是 3 阶行列式（9）可以写成：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongboo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1P_1} a_{2P_2} a_{3P_3}$$

上面这些规律对 2 阶行列式显然也成立。假如把这些规律作为定义，那么 2 阶，3 阶行列式的定义就统一了。

共性寓于个性之中，我们就可以依据这些规律定义n 阶行列式如下：

假定n^2个数或元a_{ij}；$i,j=1,2\cdots n$，把它们排列成一个有n行，n列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ // & // & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做n阶行列式；a_{ij}叫做第i行，第 j 列上的 数或元。n 阶行列式是所有这些项的代数和。

1.每项是n 个元的乘积每行一个，每列一个因此它可以写成下面的一般形式

$a_{1P_1}\ a_{2P_2}\cdots\cdots a_{nP_n}$

其中第 1 个附标是1，2，…，n 的顺序排列，第 2 个附标p_1，p_2，…，p_v是1，2，…，n的一个排列。

2.每项带的符号是这样来确定：逐次互换两行或两列把其中 n个元都移到新行列式的主对角线时，其所需要的互换的个数如果是偶数 .就带正号；如果是奇数就带负号。

3.因为 n个数字的所排列共有 $n!$ 个，所以这样的项共有$n!$ 个，用式子表示就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ // & // & \cdots & // \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & // \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1P_1}\ a_{2P_2}\cdots\ a_{nP_n}$$

这里$\sum$是对$1,2,\cdots,n$的所有排列
$p_1p_2\cdots p_n$取和。而±号就是按上面规定确定。
可以推断：其中取十号和一号的项各占半数即取十号的项数和取一号的项数相等。

其次我们还要补充定义由一个数或元a构成的1阶行列式即为a自身。

下面依据定义，计算两个最基本也是最简单的行列式。

例3 证明对角形的行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n; \qquad \begin{vmatrix} & & & & a_1 \\ & & & a_2 & \\ & & \iddots & & \\ a_n & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_1a_2\cdots a_n。$$

（行列式内未写出的元都是零）

证明：依定义第1式是显然的；下面只证明第2式。

在第2个行列式中不为零的项只有一项$a_1a_2\cdots a_n$它的符号也不难确定；我们把第1列与第n列互换，第2列与第$n-1$列互换。这样继续下去就可以把$a_1a_2\cdots a_n$都移到新行列式的主对角线上；当n是偶数时，需要$\frac{n}{2}$个互换；当n为奇数时，需要$\frac{n-1}{2}$个互换。因此，这项的符号当n是偶数时，是$(-1)^{\frac{n}{2}}$，当n是奇数时，是$(-1)^{\frac{n-1}{2}}$。现在要把二这者统一起来。我们知道$+1$的奇次方仍为$+1$，-1的奇次方仍为-1，也就是说，不论是$+1$或-1，它的奇次方仍然是自身；因此当

n为偶然时，则$n-1$为奇数：有

$$(-1)^{\frac{n}{2}}=\left[(-1)^{\frac{n}{2}}\right]^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

并且当n为奇数时，则

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}=\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{n}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

因此不论n是偶是奇，这项的符号总是$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
于是第2式成立。

第2式还可以用另外方法去证明它。先将行列式中第n列顺次与它前面相邻列互换，经过$n-1$次相邻互换后，第n列式移到新行列式的第1列；再将新行列式的第n列（即原行列就的第$n-1$列）顺次与它前面相邻列互换，经过$n-2$个互换就移到新行列式的第2列，这样继续下去共经过

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

个互换后a_1，a_2，…，a_n都移到新行列式的主对角线上，所以第2式成立。
请注意把一列（或行）顺次与它相邻的列（或行）互换，这样互换的特点是不会改变其他各列（或行）的顺序，这一点以后要用到它。

下面是比对角线行列式更为广泛的三角形行列式。

例4 证明三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \cdot & \cdots & // & // \\ & & \cdot\ \cdots & // & // \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22},\cdots a_{n-1,n-1},a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2,n-1} & \\ // & // & \cdots\cdots . & & \\ // & // & \cdots . & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} . & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n,1} a_{n-1,2} \cdots a_{2,n-1} a_{1,n}$$

证明：先证第1式，依据行列式定义在

$\sum \pm a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$中，不包含零元的乘积的项只有$a_{11}$ $a_{22} \cdots a_{nn}$一项故第1式成立。

再证第2式，依据行列式定义在$\sum \pm a_{1p1}$ $a_{2p2} \cdots p_{npn}$中，不包含零之的乘积的项，也只有$a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n-1,2}$，$a_{n-1}$一项，依据例3符号应取$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$故第2式成立。

要理解上述定义的正确性，还需知道其中二条性质。

1.如果把行列式中任意两行（或列）互换，那么行列式只改变符号。这就是下面将要介绍行列式基本性质中的性质3。待后说明。明白了这一性质，就容易理解定义中的第2点。所需要互换的个数，如果是偶数，就带正号；如果是奇数，就带负号。

2.在n阶行列式中某项的n个元，如果用不同的方法互换两行或两列，把这n个元都移到新行列式的主对角线上，那么所用互换个数的奇偶数性是不变的；也就是说：用一种方法把这n个元都移到主对角线上，如果要用偶数个互换，那么用其他另一种方法也一定要用偶数个互换；如果需要奇数个互换，则其他方法也一定要奇数个互换。

这条性质，我们通过上述例3的证明的第2种方法，不难理解。证明就不在此讲了。

习　　题

1.行列式中任一项的各元是否都可以用互换两行或两列把它移到新行列式的的主对角线上。

2.假如把行列式中每项的 n个元移到次对角线上，是否也能得出它的符号规律？

3.在一个n 阶行列式中等于零的元如果比n^2-n 还多，那么此行列式等于零，为什么？

4.用行列式定义计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

二、行列式的基本性质

弄清了行列式的定义以后，紧接着就要了解行列的基本性质，关于行列式的基本性质，可以概括以下5点。

性质1.如果行列式的某行（或某列）中所有各元同用数K去乘，其结果就等于用K乘这行列式。或者说：如果行列式的某行（或某列）中所有各元有公因数K，我们可以把K提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ // & // & & // \\ Ka_{i1} & Ka_{i2} & \cdots\cdots & Ka_{in} \\ // & // & \cdots\cdots & // \\ a_{n1}, & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ // & // & \cdots\cdots & // \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ // & // & \cdots\cdots & // \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如用2乘上节3阶行列式A的第一行得

$$\begin{vmatrix} 2\times2 & 2\times1 & 2\times2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 = 2A$$

这条性质我们只要依据行列式的定义即可看清，因为行列式等于

$$\sum \pm a_{1p_1}\cdots\cdots(Ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}$$

$$= K\sum \pm a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

特例当 $K=0$时，行列式等于零。即行列式中如果有一行（或列）完全为零时，那么这行列式为零。

性质 2。如果行列式的第i行（或列）中各元都可以写成两项的和

$a_{ij}=b_j+c_j$ （$j=1, 2, \cdots n$），

那么这行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的第i行（或列），一个是b_1，b_2，$\cdots b_n$，另一个是c_1，c_2，$\cdots c_n$，其它各行（或列）都同原行列式一样，

即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ // & // & \cdots\cdots & // \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_n+c_n & \\ // & // & \cdots\cdots & // \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongboo