

轻子复合模型中的反常磁矩

黄朝商 戴元本

(中国科学院 理论物理研究所)

摘 要

我们通过一个简单模型说明只要束缚态的半径足够小,组分粒子的质量足够大,轻子的复合模型自然地给出与实验符合的反常磁矩,没有 Lipkin 所说的困难。

一、引 言

众所周知,在目前实验所能达到的能量下,把轻子(以及层子)看作是无内部结构的点粒子,对各种物理量的理论(QED 以及弱电统一模型)计算和实验值符合得很好。有关轻子电磁形状因子的最新测量^[1]表明,一直到 $R \sim 10^{-16}\text{cm}$ 的范围都没有“看到”轻子的内部结构。但是,近几年来重轻子 τ 的发现和层子(味)数目的增加,启发人们推测,轻子和层子也不是“基本”粒子,而是更“基本”的少数几种粒子的复合态。不少人提出了各种各样的轻子和层子的复合模型^[2]。轻子和层子有内部结构的猜测在 1965 年的层子模型的工作^[3]中已经被提出来。我们认为当能量达到某个标度它们的内部结构便能被探测到。

μ 介子和电子的反常磁矩的实验测量^[4]已分别达到 9 位和 12 位有效数字,在误差范围内与点模型的量子电动力学完全符合。任何正确的轻子复合模型都必须对这个极端精确的实验结果作出合理的解释。在新近文献^[5]中 Lipkin 提出,在轻子复合模型中,轻子的磁矩与其组份的质量 m 有关,而不是决定于轻子的质量 m_l ,因此要得到符合实验的反常磁矩是复合模型的一个重大困难。他们的结论来自非相对论模型,在这类模型中,轻子的磁矩是它的组份的磁矩($\simeq \frac{e}{2m}$)的矢量和。Shaw 等人^[6]利用 Sidewise 色散关系说明对于紧束缚态轻子可以得到符合实验的反常磁矩。但是,在他们的工作中,需要把轻子四动量延拓到 $P^2 = O(m^2)$ 的区域。对于 $m_l/m \lesssim 10^{-8}$ 或 10^{-10} 的情况,如何定义这样远离质壳的束缚态是不清楚的。在他们的文章中,实际上不是用束缚态的计算,而是用点模型的计算来估计有关的矩阵元的量级。直观上一个半径足够小、组份粒子的质量足够大的紧束缚态的行为,应当非常接近于点粒子。在本文中,我们将通过一个简单的模型,来说明这个直观的结论实际上是正确的。为此我们假定轻子是一个费密子和一个标量粒子的束缚态,将相对论协变的场论方法应用于这样的束缚态。在关于波函数的非常一般的假设下证明在束缚态的半径足够小、组份粒子的质量足够大时,可以得到与实验符合的反

常磁矩。本文第二节给出轻子束缚态波函数的一般形式, 计算最低阶复合粒子电流矩阵元, 估计了复合轻子反常磁矩的量级。第三节利用波函数的谱表示计算反常磁矩的 α 阶辐射修正。第四节对结果进行简略的讨论。

二、复合粒子的最低阶电流矩阵元

为了简单, 我们假定轻子是一个费密子和一个标号粒子的束缚态。满足洛伦兹及空间反射不变性的轻子 B-S 波函数的普遍形式是

$$\chi_p(p) = \left(f_1 + \frac{i\hat{p}}{M} f_2 \right) u'(P). \quad (1)$$

其中 $P = p_1 + p_2$ 是轻子的动量, $p = \frac{m_B p_1 - m_F p_2}{m_B + m_F}$ 是组份粒子之间的相对动量。为了简单, 以后令 $m_F = m_B = m$, M 是为了方便而引入的具有质量量纲的常数, $f_i = f_i(P \cdot p, p^2) \equiv f_i(P, p)$ 为实函数(相应于 S 波), $i = 1, 2$; $u'(P)$ 是自旋 Z 分量为 $\frac{1}{2} S$ 的 Dirac 旋量。由时空反演不变性可证

$$\bar{\chi}_p(p) = \bar{u}'(P) \left(f_1 + \frac{i\hat{p}}{M} f_2 \right). \quad (2)$$

复合轻子的电磁作用最低阶图如图 1 所示相应的矩阵元是^[7,11]

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{(0)}(P, q) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \bar{\chi}_{P+\frac{q}{2}} \left(k + \frac{q}{4} \right) \cdot \gamma_\mu \chi_{P-\frac{q}{2}} \left(k - \frac{q}{4} \right) \\ &\quad \times i\Delta_F'^{-1} \left(\left(\frac{P}{2} - k \right)^2 \right) \\ &= -\bar{u} \left(P + \frac{q}{2} \right) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[f_1 + \frac{i}{M} \left(k + \frac{q}{4} \right) f_2 \right] \\ &\quad \times \gamma_\mu \left[f_1 + \frac{i}{M} \left(k - \frac{q}{4} \right) f_2 \right] i\Delta_F'^{-1} \left(\left(\frac{P}{2} - k \right)^2 \right) u \left(P - \frac{q}{2} \right), \quad (3) \end{aligned}$$

其中

$f_i = f_i \left(P - \frac{q}{2}, k - \frac{q}{4} \right)$, $f_i = f_i \left(P + \frac{q}{2}, k + \frac{q}{4} \right)$, $i = 1, 2$ 利用 Dirac 方程通过直接的计算可得

$$\Gamma_\mu^{(0)} = \bar{u} \left(P + \frac{q}{2} \right) \left\{ \gamma_\mu F_1^{(0)}(q^2) - \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \hat{q}] F_2^{(0)}(q^2) \right\} u \left(P - \frac{q}{2} \right), \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1^{(0)}(q^2) &= S_1 + \frac{2T}{M^2} - \frac{2m_i}{M} V_{1P} + \frac{1}{M^2} \left(m_i^2 - \frac{q^2}{4} \right) T_{PP} + \frac{q^2}{M^2} T_{qq} \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{q^2}{M^2} V_{2P} - \frac{1}{16} \frac{q^2}{M^2} S_2, \quad (5) \end{aligned}$$

1) (3)式右方的负号可以由与点模型费曼规则的比较得到。

$$F_2^{(0)}(q^2) = \frac{m_l}{M^2} T_{PP} + \frac{1}{2M} S_3 - \frac{1}{M} V_{1P} + \frac{2}{M} V_{1q} - \frac{m_l}{2M^2} V_{2P}, \quad (6)$$

$$S_1 = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 k f'_1 f_1 \Delta_F'^{-1} \left(\left(\frac{P}{2} - k \right)^2 \right),$$

$$S_2 = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 k f'_2 f_2 \Delta_F'^{-1},$$

$$S_3 = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 k f'_1 f_1 \Delta_F'^{-1},$$

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 k f'_2 f_1 \Delta_F'^{-1} k_\mu = V_{1P} P_\mu + V_{1q} q_\mu,$$

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 k f'_2 f_2 \Delta_F'^{-1} k_\mu = V_{2P} P_\mu,$$

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 k f'_2 f_2 \Delta_F'^{-1} k_\mu k_\nu = T_{PP} P_\mu P_\nu + T_{qq} q_\mu q_\nu + T_{\mu\nu}^d. \quad (7)$$

最后两式的左方为 q 的偶函数, 故右方无 q_μ 的一次项。

选取 M 使 f_2 与 f_1 同一数量级, 则由(5)式知道, 除非其中含 q^2 因子的项恰好相消, 我们有

$$M \gtrsim R^{-1}, \quad (8)$$

其中 R 为轻子的电荷半径。由(6)式知图 1 对轻子的反常磁矩的贡献为

$$F_2^{(0)}(0) = O\left(\frac{1}{M}\right). \quad (9)$$

由(8)、(9)两式可见, 在轻子的电荷半径足够小时, 束缚态的磁矩在 α 的零阶近似等于 Dirac 磁矩。在复合模型中具有质量量纲的物理常数只能是 m_l , R^{-1} 或 m , 因此 $M = O(R^{-1})$ 或 $O(m)$ 。当只考虑图 1 时, 由(5)式得电荷归一化条件为

$$S_1(0) + \frac{2}{M^2} T(0) - \frac{2m_l}{M} V_{1P}(0) + \frac{m_l^2}{M^2} T_{PP}(0) = 1. \quad (10)$$

上式可近似地写为

$$S_1(0) + \frac{2}{M^2} T(0) = 1. \quad (11)$$

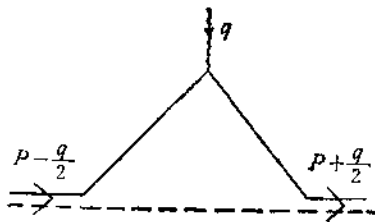


图 1

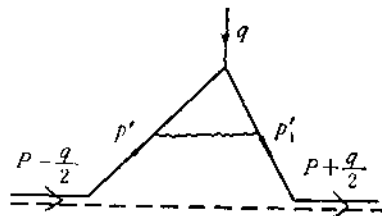


图 2

三、 α 阶辐射修正

本节我们考虑对复合轻子反常磁矩的 α 阶辐射修正。最简单的图形是图 2。相应的

矩阵元是

$$-\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \bar{\chi}_{p+\frac{q}{2}} \left(p + \frac{q}{4} \right) \Lambda_\mu \chi_{p-\frac{q}{2}} \left(p - \frac{q}{4} \right) \cdot \Delta_F'^{-1} \left(\left(\frac{P}{2} - p \right)^2 \right), \quad (12)$$

其中

$$\Lambda_\mu = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{1}{k^2} \gamma_\nu \frac{-i(\not{p}' - \not{k}) + m}{(p'_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{-i(\not{p}_1 - \not{k}) + m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\nu, \quad (13)$$

$$p_1 = \frac{1}{2} P + p - \frac{1}{2} q, \quad p'_1 = \frac{1}{2} P + p + \frac{1}{2} q.$$

先看波函数中 f_1 项的贡献。利用被积函数的对称性质和 Dirac 方程, 可以证明(12)式也可以化成与(4)式相同的形式, 这正是所期待的电流守恒的结果。为计算反常磁矩可忽略 q^2 项及 $O(m_l/m)$ 量级的项, 这时得到(12)式中对 $F_2(0)$ 有贡献的项为

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\pi} m \bar{u} \left(P + \frac{q}{2} \right) u \left(P - \frac{q}{2} \right) \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 p f_1^2(P, p, q=0) \Delta_F'^{-1} \left(\left(\frac{P}{2} - p \right)^2 \right) \\ & \times \int_{x_1+x_2 \leq 1} dx_1 dx_2 \frac{2(1-x_1-x_2) \left(\frac{P}{2} + p \right)_\mu}{(x_1+x_2) \left[(1-x_1-x_2) \left(\frac{P}{2} + p \right)^2 + m^2 \right]}. \end{aligned} \quad (14)$$

当内部费密子动量 $\frac{P}{2} + p$ 在欧氏区域中时, 上式被积函数的分母中方括号内的量大于 m^2 。此外由电荷规一化条件(11)式知道

$$S_1(0) = O(1),$$

因此只要波函数可以如 Wick 所证明的那样延拓到欧氏区^[8], (14)式给出的反常磁矩就是

$$O\left(\alpha \frac{e}{2m}\right) \quad (15)$$

的量级。考虑 f_2 项以后不改变上述结论。

为了讨论更复杂的图形, 我们假设波函数有如下的谱表示的形式^[8],

$$f_i(P, p) = \int_{\mu_{\min}^2}^{\infty} d\mu^2 \left\{ \frac{1}{2} \right\} dy \frac{g_i(y, \mu^2)}{[p^2 - 2yP \cdot p + \mu^2 - i\epsilon]^{a_i}}, \quad (16)$$

其中 $\mu_{\min}^2 = m^2 - \frac{m_l^2}{4} \approx m^2$, 如取近似

$$\Delta_F'^{-1} \simeq \Delta_F^{-1} = \left(\frac{1}{2} P - p \right)^2 + m^2, \quad (17)$$

则可以得到(12)式中 f_1 项对反常磁矩项的贡献为

$$\begin{aligned} & \alpha \int d\mu_1^2 d\mu_2^2 dy_1 dy_2 g_1(y_1, \mu_1^2) g_1(y_2, \mu_2^2) \left\{ \prod_{i=1}^5 dx_i \delta \left(1 - \sum_{i=1}^5 x_i \right) \right. \\ & \times \left\{ \frac{mb_1(y_i, x_i)}{[a(y_i, x_i)q^2 + x_1\mu_1^2 + x_2\mu_2^2 + (x_3+x_4)m^2]^{2n_1-2}} \right. \\ & \left. \left. + \frac{m^2 b_2(y_i, x_i)}{[a(y_i, x_i)q^2 + x_1\mu_1^2 + x_2\mu_2^2 + (x_3+x_4)m^2]^{2n_1-1}} \right\} + O\left(\frac{m_l}{m}\right) \text{项} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$a(y_i, x_i) = \frac{1}{A(x_i)} \left\{ x_3 x_4 (1 - x_3 - x_4) + x_5 \left[x_1 x_4 \left(\frac{1}{2} - y_1 \right) + x_2 x_3 \left(\frac{1}{2} - y_2 \right) \right] + x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2) \left(\frac{1}{2} - y_1 \right) \left(\frac{1}{2} - y_2 \right) \right\}, \quad (19)$$

$$b_1 = \frac{(x_1 x_2)^{n_1-1} x_5 \{ (1 - x_1 - x_2) [2(x_1 + x_2) - x_5 + 6(x_1 y_1 + x_2 y_2)] + x_5^2 \}}{2^5 \pi^3 A^4(x_i)} \frac{\Gamma(2n_1 - 2)}{\Gamma^2(n_1)}, \quad (20)$$

$$b_2 = \frac{2^{-5} \pi^{-3}}{A^3(x_i)} \{ (x_1 x_2)^{n_1-1} x_5 [x_1(1 + 2y_1) + x_2(1 + 2y_2)] 2(n_1 - 1) \} \frac{\Gamma(2n_1 - 2)}{\Gamma^2(n_1)},$$

其中 $A(x_i) = x_5(x_3 + x_4) + (1 - x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$.

利用谱表示(16)式容易算出

$$\begin{aligned} S_1(q^2) &= 2^{-3} \pi^{-2} \frac{(2n_1 - 4)!}{[(n_1 - 1)!]^2} \int d\mu_1^2 d\mu_2^2 dy_1 dy_2 g_1(y_1, \mu_1^2) g_1(y_2, \mu_2^2) \\ &\quad \times \int dx_1 dx_2 (x_1 x_2)^{n_1-1} \delta(1 - x_1 - x_2) \\ &\quad \times \left\{ \frac{2n_1 - 3}{2} \frac{m^2}{\left[x_1 x_2 \left(\frac{1}{2} - y_1 \right) \left(\frac{1}{2} - y_2 \right) q^2 + x_1 \mu_1^2 + x_2 \mu_2^2 \right]} + 1 \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{\left[x_1 x_2 \left(\frac{1}{2} - y_1 \right) \left(\frac{1}{2} - y_2 \right) + x_1 \mu_1^2 + x_2 \mu_2^2 \right]^{2n_1-3}}. \end{aligned} \quad (21)$$

比较(18)和(21)式可以再次得到反常磁矩的量级为(15)式的结论。

在考虑形成轻子束缚态的“极强”作用对组份费密子电磁顶角的修正后将出现更复杂的图形。如果我们假设组份费密子与组份玻色子之间的作用是通过介子传递的,则在最低阶有图 3 中的一些图形。

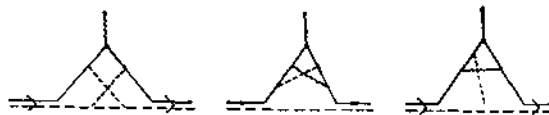


图 3

用费曼参数把相应的电磁顶角的表示式中被积函数的分母结合起来,并对内部动量积分

后,在 $m^2 \gg m_l^2$, q^2 的近似下在分母上总是出现一个因子 $\left(x_1 \mu_1^2 + x_2 \mu_2^2 + \sum_{i=3}^N x_i m^2 \right)^L$ 而没有 m_l 的因子。由量纲的考虑知道所有这些图形给出的反常磁矩都是(15)式的量级(如果交换的介子是标量粒子,我们假设三标量粒子作用顶点的耦合常数 λ 是 $O(m)$ 的量级)。

将无穷多个图相加可以得到束缚态极点项的贡献(见图 4)。图 4 内部的四点格林函数可以写为

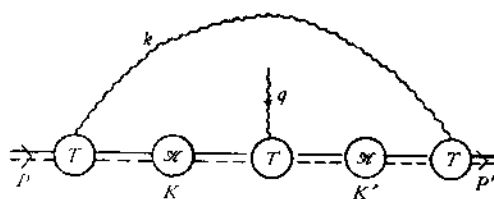


图 4

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(K; p', p) &= \frac{\chi_K(p)\bar{\chi}_K(p')}{K^2 + m_l^2} + \dots \\ &= \left(f_1(K, p) + \frac{if_2(K, p)\hat{p}}{M} \right) \frac{(-i\hat{K} + m_l)}{K^2 + m_l^2} \left(f_1(K, p') \right. \\ &\quad \left. + \frac{if_2(K, p')\hat{p}'}{M} \right) + \dots\end{aligned}\quad (22)$$

当 $K^2 \ll m^2$ 时, 上式中没有写出的项可以忽略(如果轻子有可以通过电磁跃迁达到的高激发态, 也要求 K 远小于激发态的质量)。注意到在 $q^2 \ll m^2$ 时(4)式中 $F_1^{(0)} \approx 1$, $F_2^{(0)}$ 项可以忽略, 我们得到相应于图 4 的 α 阶电磁顶角^[7]为

$$\Gamma_\mu^{(1)} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \bar{u}(P') \gamma_\mu \frac{-i(\hat{P}' + \hat{k}) + m_l}{(P' + k)^2 + m_l^2} \gamma_\mu \frac{-i(\hat{P} + \hat{k}) + m_l}{(P + k)^2 + m_l^2} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2} u(P). \quad (23)$$

(23)式与点粒子 QED 顶角的 α 阶辐射修正一样。顺便指出, 如果 $K^2 = O(m^2)$ 则(22)式中没有写出的项都不能忽略, 因此无法定义这样远离质壳的束缚态。所以我们在引言中指出[6]中所用的方法是不清楚的。

四、讨 论

以上计算表明, 到 e^3 阶复合轻子的反常磁矩是

$$\mu = \frac{e}{2m_l} \left[\frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) + O\left(\frac{m_l}{m}\right) \right]. \quad (24)$$

在费密子与玻色子的质量不相等的模型中, 如果 $m_B \gg m_F \gg m_l$ 而波函数满足谱表示, 则图 2 对反常磁矩的贡献为 $O\left(\alpha \frac{m_l m_F}{m_B^2}\right)$ 的量级。在这种情况下一般不能确定 M 的量级是 m_F , m_B 或 m_B^2/m_F 。在后一情况下我们得到

$$\mu = \frac{e}{2m_l} \left[\frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) + O\left(\frac{m_l m_F}{m_B^2}\right) \right]. \quad (25)$$

对于标量粒子也带电的模型结论也是相似的。因此, 与非相对论松束缚态模型的结果相反, 在相对论紧束缚态模型中束缚态的磁矩不是它的组份粒子的磁矩的矢量和, 在束缚态的半径足够小, 组份粒子的质量足够大时它在电磁场中是作为一个整体作出反应的, 行为就象一点粒子一样。应当指出, 虽然以上讨论是在一个最简单的复合模型里进行的, 但是所得的结论基本上只依赖于量纲分析及波函数的解析性质, 可以期待它们在更复杂