

机器人机构的精度优化设计

徐卫良 张启先

(北京航空学院机器人研究室)

摘要 本文应用最优化技术, 确定能满足机器人绝对精度要求的, 并使制造成本最低的连杆参数的最优公差值。建立了机器人机构精度优化设计的数模, 并针对一个带闭链的五自由度机器人, 在不同精度指标、不同概率水平以及不同原始误差分布下, 进行了连杆参数公差优化计算。

关键词: 机器人机构, 误差, 精度, 概率, 优化设计。

1 引言

运动精度是衡量工业机器人的主要性能指标之一, 一般, 它包括绝对精度和重复性精度两种。绝对运动精度误差是机器人实际运动与期望运动之偏差, 由确定性原始误差(如连杆参数偏差, 运动副间隙等)所产生; 重复性精度误差是机器人重复执行同一期望运动时, 机器人的实际运动之间的相互离散程度, 由随机性质原始误差(如关节伺服定位误差等)所产生。近年来, 对上述两种误差已进行了较多的研究, 主要集中于如下两个方面: 位姿误差分析和位姿误差的识别与补偿。误差分析主要是建立误差数模, 传统的方法是对坐标变换矩阵微分或直接对手部位姿公式微分, 然后建立机器人手部位姿误差公式^[1-4]。最近, 作者提出了一种无须求微分的误差建模方法——微小位移合成法, 该法简单实用^[5]。考虑到原始误差的随机性, 文[1-4]对机器人位姿误差作了概率分析, 文[6]则相应提出了误差概率分析的一种数值模拟方法——蒙特卡罗法。对于一个特定的机器人机构, 连杆参数误差是确定的, 其产生的手部位姿误差也是确定的。因此, 根据对机器人系统的测量所获取的数据信息, 用最小二乘技术就可识别这些确定的原始误差, 并通过重新调整关节变量补偿和

校准绝对位姿误差^[7]。

尽管机器人的绝对位姿误差能用前述方法来补偿和校准, 但测量工作量较大, 并且使得关节变量的反向解较为复杂。因此, 提高机器人的绝对位姿精度的较好办法, 是在机器人机构的设计阶段, 就将这种确定性原始误差控制在一定的公差范围内, 使其产生的绝对位姿误差满足精度要求。为此, 本文试图用最优化技术, 确定能满足机器人绝对精度要求的, 并使制造成本最低的连杆参数的最优公差值, 这是一个精度优化设计或误差优化综合问题。目前, 作者尚未发现有文献论述机器人机构的精度设计。当然, 对于闭链机构, 误差优化综合的研究已比较完善。

本文在误差概率分析的基础上, 建立了以连杆参数公差为设计变量、公差制造成本为目标函数、绝对位姿误差满足设计精度为约束条件的机器人机构精度优化设计的数学模型。最后, 针对一个五自由度机器人机构, 在不同原始误差分布(均匀分布和正态分布)、不同概率水平及不同精度指标下, 进行了连杆参数公差的优化计算。

2 误差概率分析

按文[5]的微小位移合成法, 可建立由连杆参数误差所产生的机器人手部位姿误差的公式。在参考坐标系 X_0, Y_0, Z_0 下, 其一般形式为:

收到本文的时间是1987年6月9日。

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n+m} a_{xi} \delta_i, \quad \Delta y = \sum a_{yi} \delta_i,$$

$$\Delta z = \sum a_{zi} \delta_i,$$

$$\Delta \varphi_x = \sum_{i=1}^m \beta_{xi} \delta_i, \quad \Delta \varphi_y = \sum \beta_{yi} \delta_i,$$

$$\Delta \varphi_z = \sum \beta_{zi} \delta_i, \quad (1)$$

式中, Δx , Δy , Δz 和 $\Delta \varphi_x$, $\Delta \varphi_y$, $\Delta \varphi_z$ 分别为位置误差和姿态误差在 X_0 , Y_0 , Z_0 轴的分量; a_{xi} , a_{yi} , a_{zi} 和 β_{xi} , β_{yi} , β_{zi} 则为相应的误差灵敏度系数, 是机构位形的函数; δ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为连杆机构的线性原始误差 (如 D-H 标记中的 Δs_i 和 Δh_i); δ_i ($i=n+1, n+2, \dots, n+m$) 为连杆机构的角度原始误差 (如 D-H 标记中的 $\Delta \alpha_i$ 和 $\Delta \theta_i$)。

在机器人机构的设计阶段, 已知的是连杆参数公差, 这样, 连杆参数误差在其公差带内是一个随机量。根据机械制造工艺知, 当单件生产时, 零件尺寸误差在其公差带内呈均匀分布。而当批量生产时, 零件尺寸误差则在其公差带内呈正态分布。因此, 连杆参数误差 δ_i 可认为是均值为零且在对公差带 $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ 内呈均匀分布或正态分布的随机量。

由于原始误差的随机性, 手部位置误差的方差和协方差

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \sum_{i=1}^{n+m} a_{xi}^2 V(\delta_i) \\ V_y &= \sum a_{yi}^2 V(\delta_i) \\ V_z &= \sum a_{zi}^2 V(\delta_i) \\ V_{xy} &= \sum_{i=1}^{n+m} a_{xi} a_{yi} V(\delta_i) \\ V_{yz} &= \sum a_{yi} a_{zi} V(\delta_i) \\ V_{xz} &= \sum a_{xi} a_{zi} V(\delta_i) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $V(\delta_i)$ 为连杆参数误差的方差。

对于单件生产

$$V(\delta_i) = \varepsilon_i^2/3$$

对于批量生产

$$V(\delta_i) = \varepsilon_i^2/9$$

至于主方差及其方向, 可通过解如下特征方程获得。

$$V \vec{u} = \lambda \vec{u} \quad (3)$$

其中, V 为协方差矩阵, 其元素由式 (2) 给出。

由于 V 是实对称矩阵, 式 (3) 的特征值为实数, 特征向量线性无关且正交^[11], 其中特征值的解法见附录。当将参考坐标系 $X_0 Y_0 Z_0$ 旋转至主方差方向, 可得三个独立的均值为零、标准差 σ_i 为特征值的平方根的随机变量 w_i ($i=1, 2, 3$), 它们的联合密度函数

$$f(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{w_3^2}{\sigma_3^2}\right)\right] \quad (4)$$

其中, σ_i ($i=1, 2, 3$) 是机构位形和原始误差方差的函数。

那么, 手部位置误差 Δr 小于给定值 R 的概率

$$P(\Delta r \leq R) = \int_V f(w_1, w_2, w_3) dV \quad (5)$$

其中, $\Delta r = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$, V 为中心在参考点理想位置, 半径为 R 的球体。

有时感兴趣的是某一方向上的手部位置误差。设 w_i 是这一误差, 则其密度函数

$$f(w_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} \exp(-w_i^2/2\sigma_i^2) \quad (6)$$

那么, $|w_i| \leq R_i$ 的概率

$$P(|w_i| \leq R_i) = \int_{-R_i}^{R_i} f(w_i) dw_i \quad (7)$$

至于姿态误差, 作类似上面的分析可得, 手部姿态落在以理想姿态为轴线、锥角为 Φ 的锥体内的概率

$$P(\Delta\varphi \geq \Phi) = \int_V f(w_4, w_5, w_6) dV \quad (8)$$

其中, 手部姿态误差 $\Delta\varphi = \sqrt{w_4^2 + w_5^2 + w_6^2}$; $w_i (i=4, 5, 6)$ 为姿态误差的三个独立的均值为零、方差为其特征根的随机分量; $f(w_4, w_5, w_6)$ 与式(4)具有相同的形式, V 为中心在手部参考点理想位置, 半径为 Φ 的球体。

另外, 姿态误差分量 $w_i (i=4, 5, 6)$ 小于给定值 Φ_i 的概率

$$P(|w_i| \leq \Phi_i) = \int_{-\Phi_i}^{\Phi_i} f(w_i) dw_i \quad (9)$$

其中, $f(w_i)$ 与式(6)具有相同的形式。

3 精度优化设计的数模

机器人机构的精度设计或误差综合, 就是选择合理的连杆参数公差, 使连杆参数误差所产生的机器人的绝对位姿误差小于设计期望值。本文以公差制造成本最小为目标, 确定最优连杆参数公差。

3.1 目标函数

尺寸公差的成本主要取决于公差的值及获取该公差的制造工艺。通常, 公差值越大, 其制造成本越低。而对于相同的公差, 采用不同的制造工艺, 其公差的制造成本亦不一样。因此, 机构的连杆参数公差的制造成本是公差带宽度和制造工艺的函数。根据机械制造工艺理论并综合参考文献[8—10], 可以给出单个连杆参数公差的相对制造成本。

$$C_i = K_i (\varepsilon_i)^{-\alpha_i} \quad (10)$$

其中, $\alpha_i (\leq 1)$ 为公差特征指数; $k_i (\geq 1)$ 为工艺性系数, 对于同种生产工艺, k_i 相等。

为了获取特征指数 α_i , 针对同种生产工艺, 根据经验数据, 可绘出相对成本和 α_i 的对数图。利用对数图就可确定特征指数, 如图1所示^[9]。很明显, α_i 不是唯一的, 它没有精确值, 通常较为合适的值为 $\alpha_i = 0.7^{[1]}$ 。至于工艺性系数 k_i , 若选择生产工艺成本较低的 $k_i = 1$, 则其他生产工艺的 k_i 是相对生产成本较低的工艺而言的。例如连杆角度参数(如D-H标记中的 α_i, θ_i) 和连杆长度参数(如D-H标记中的 k_i, s_i) 的制造工艺是不一样的, 与角度

参数相比, 连杆长度参数的制造精度较高。亦即要获取相同的制造精度, 连杆角度公差的成本就较高, 则 k_i 相应就取较大值。

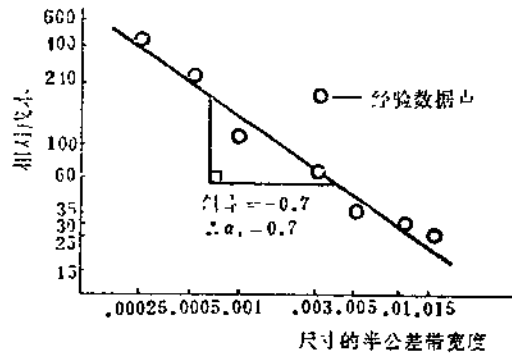


图1 公差特征指数的确定

对于机器人机构, 其连杆参数公差的总相对成本

$$C_T = \sum_{i=1}^{n+m} k_i (\varepsilon_i)^{-\alpha_i} \quad (11)$$

因此, 连杆参数公差优化的目标函数

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n+m} k_i (x_i)^{-\alpha_i} \quad (12)$$

其中, $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})^T$; 设计变量 x_i 为连杆参数的半公差带宽度 ε_i 。

3.2 约束条件

连杆参数公差优化的主要约束是, 在整个机器人工作空间内, 随机性的连杆参数误差所产生的绝对位姿误差小于设计期望值。对设计精度的要求不同, 上述这种约束也具有不同的形式。

当要求机器人的手部位置误差小于或等于给定值 R 的概率大于或等于 p 时, 其约束形式为:

$$P(\Delta r \leq R) = \int_V f(w_1, w_2, w_3) dV \geq p \quad (13)$$

当要求位置误差分量 $w_i (i=1, 2, 3)$ 落在 $\pm R_i$ 范围内的概率大于或等于 p_i 时, 其约束形式为

1) 闭链连杆机构的误差优化综合, 目标函数常取为公差的倒数, 这实质上就是 $\alpha_i = 1$ 。

$$P(|w_i| \leq R_i) = \int_{-R_i}^{R_i} f(w_i) dw_i \geq p_i \quad (14)$$

同样, 对于姿态误差的精度要求, 仿上亦可给出如下相应的约束条件:

$$P(\Delta\varphi \leq \Phi) = \int_V f(w_i, w_z, w_a) dV \geq p \quad (15)$$

$$P(|w_i| \leq \Phi_i) = \int_{-\Phi_i}^{\Phi_i} f(w_i) dw_i \geq p_i \quad (16)$$

显而易见, 当按机器人手部位置误差的三个分量 $|w_i| \leq R_i = R (i=1, 2, 3)$ 优化时, 则 $\Delta r = R$ 肯定成立。因此, 作者建议采用式 (14) 和式 (16) 的约束形式。这样, 优化设计的连杆参数公差, 更能满足机器人的精度条件。

为了便于优化计算, 可应用概率理论, 将式 (14) 和式 (16) 推导为确定性的约束。

令 $\tau = (w_i - E_i)/\sigma_i$, $R_1 = R_2 = R_3 = R$ 其中, E_i 和 σ_i 分别为误差 w_i 的均值和标准差。

则式 (14) 可重写为:

$$\begin{aligned} P(|w_i| \leq R) &= \int_{-R}^R f(w_i) dw_i \\ &= \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{w_i^2}{2\sigma_i^2}\right) dw_i \\ &= \int_{-R/\sigma_i}^{R/\sigma_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau \geq p_i \end{aligned} \quad (17)$$

由概率论知, 对于标准正态分布, 有

$$p_i = \int_{-e(p_i)}^{e(p_i)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (18)$$

其中, $e(p_i)$ 为置信限, 取决于 p_i 。对于给定概率水平 p_i , 可通过正态分布表, 查得相应的置信限 $e(p_i)^{[11]}$ 。

比较式 (17) 和式 (18) 可得

$$\begin{aligned} R/\sigma_i &\geq e(p_i) \\ \text{即} \quad \sigma_i e(p_i)/R - 1 &\leq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

这样, 随机性的约束式 (14) 就转化为规格化确定性约束函数

$$g_i(X) = \sigma_i e(p_i)/R - 1 \leq 0 \quad (j=i=1, 2, 3) \quad (20)$$

同样, 对于式 (16) 亦可转化为规格化确定性约束函数

$$g_j(X) = \sigma_j e(p_j)/\Phi - 1 \leq 0 \quad (j=i=4, 5, 6) \quad (21)$$

在式 (20) 和式 (21) 中, σ_i 是连杆参数公差和机器人机构位形的函数。因此, 机器人精度优化时, 式 (20) 和式 (21) 应在机器人的任何可达位姿状态下都成立, 这样, 使得优化设计非常困难。然而, 对于一个特定的机器人机构, 通过误差分析可知, 连杆参数误差所产生的绝对位置误差, 只是在某一位置和姿态上取得较大值。因此, 只要能保证在最大误差的位姿上满足式 (20) 和式 (21), 就能保证其他位姿上的精度要求。为此上两式可认为是在最大误差的手部位姿上进行计算的。

另外, 根据实际需要和工艺水平, 对连杆参数公差有一定的限制, 即

$$t_i^l \leq e_i \leq t_i^h \quad i=1, 2, \dots, n+m$$

其中, t_i^l 和 t_i^h 分别为半公差带宽度 e_i 的上限和下限。

进而可得规格化约束方程

$$\begin{aligned} g_i(X) &= x_i/t_i^h - 1 \leq 0 \\ (i=1, 2, \dots, n+m; j=7, 8, \dots, n+m+6) \\ g_j(X) &= t_i^l/x_i - 1 \leq 0 \\ (i=1, 2, \dots, n+m; j=n+m+7, \dots, 2(n+m)+6) \end{aligned} \quad (22)$$

综上所述, 机器人机构的精度优化的数学模型为

$$\begin{aligned} \min f(X) &= \sum_{i=1}^{n+m} k_i(x_i)\sigma_i \\ \text{s.t.} \quad g_j(X) &\leq 0 \\ j &= 1, 2, \dots, 2(n+m)+6 \end{aligned} \quad (23)$$

4 一个带闭链的五自由度机器人机构的精度优化设计

表 1 几种精度指标下的最优连杆参数公差¹⁾

最优公差	$R_1 = R_2 = R_3 = 1$		$R_1 = R_2 = R_3 = 0.5$		$R_1 = R_2 = R_3 = 0.1$	
	均 匀	正 态 ²⁾	均 匀	正 态	均 匀	正 态
$x_1(\Delta h_2, \Delta h'_1)$	0.109	0.182	0.057	0.081	0.013	0.019
$x_2(\Delta h_3)$	0.474	0.839	0.125	0.392	0.017	0.083
$x_3(\Delta h_4)$	0.273	0.446	0.133	0.240	0.030	0.014
$x_4(\Delta h'_2)$	0.103	0.190	0.052	0.095	0.011	0.018
$x_5(\Delta h'_3)$	0.067	0.122	0.033	0.065	0.006	0.012
$x_6(\Delta h'_4)$	0.087	0.160	0.044	0.088	0.008	0.016
$x_7(\Delta s_1)$	0.337	0.596	0.174	0.326	0.036	0.056
$x_8(\Delta a)$	0.268	0.419	0.178	0.282	0.023	0.017
$x_9(\Delta a_1)$	0.035	0.065	0.017	0.028	0.003	0.006
$x_{10}(\Delta a_3)$	0.132	0.169	0.067	0.097	0.012	0.024
$x_{11}(\Delta a_4)$	0.124	0.195	0.055	0.109	0.012	0.025

1) 概率水平 $p_1 = p_2 = p_3 = 0.99$, $\alpha_i = 0.7$, 单位为 mm 和 10^{-2}rad (下同);

2) 均匀和正态分别指原始误差均匀分布和正态分布 (下同)。

表 2 几种概率水平下的最优连杆参数公差¹⁾

最优公差	$p_1 = p_2 = p_3 = 0.90$		$p_1 = p_2 = p_3 = 0.80$		$p_1 = p_2 = p_3 = 0.70$	
	均 匀	正 态	均 匀	正 态	均 匀	正 态
$x_1(\Delta h_2, \Delta h'_1)$	0.0765	0.154	0.121	0.189	0.135	0.230
$x_2(\Delta h_3)$	0.326	0.638	0.462	0.816	0.579	1.072
$x_3(\Delta h_4)$	0.219	0.357	0.266	0.469	0.373	0.585
$x_4(\Delta h'_2)$	0.0827	0.132	0.0944	0.175	0.143	0.218
$x_5(\Delta h'_3)$	0.0573	0.0918	0.0626	0.122	0.085	0.141
$x_6(\Delta h'_4)$	0.0774	0.119	0.0856	0.161	0.113	0.195
$x_7(\Delta s_1)$	0.296	0.484	0.325	0.718	0.438	0.714
$x_8(\Delta a)$	0.245	0.333	0.253	0.511	0.304	0.585
$x_9(\Delta a_1)$	0.0261	0.0440	0.0346	0.055	0.044	0.078
$x_{10}(\Delta a_3)$	0.0976	0.190	0.151	0.208	0.143	0.307
$x_{11}(\Delta a_4)$	0.122	0.152	0.109	0.245	0.113	0.226

1) 精度指标 $R_1 = R_2 = R_3 = 0.5$, $\alpha_i = 0.7$, $p_1 = p_2 = p_3 = 0.99$ 的计算值见表 1。表 3 几种公差特征指数下的最优连杆参数公差¹⁾

最优公差	$\alpha_i = 1.0$		$\alpha_i = 0.8$		$\alpha_i = 0.6^{2)}$	
	均 匀	正 态	均 匀	正 态	均 匀	正 态
$x_1(\Delta h_2, \Delta h'_1)$	0.057	0.104	0.059	0.090	0.045	0.096
$x_2(\Delta h_3)$	0.209	0.391	0.216	0.443	0.272	0.399
$x_3(\Delta h_4)$	0.138	0.214	0.130	0.194	0.132	0.256
$x_4(\Delta h'_2)$	0.053	0.085	0.050	0.090	0.050	0.088
$x_5(\Delta h'_3)$	0.035	0.057	0.034	0.062	0.036	0.057
$x_6(\Delta h'_4)$	0.044	0.076	0.043	0.083	0.049	0.073
$x_7(\Delta s_1)$	0.158	0.295	0.172	0.330	0.177	0.274
$x_8(\Delta a)$	0.111	0.201	0.116	0.247	0.151	0.222
$x_9(\Delta a_1)$	0.018	0.028	0.016	0.031	0.018	0.031
$x_{10}(\Delta a_3)$	0.041	0.103	0.057	0.083	0.082	0.103
$x_{11}(\Delta a_4)$	0.050	0.077	0.057	0.081	0.072	0.103

1) 精度指标 $R_1 = R_2 = R_3 = 0.5$; 概率水平 $p_1 = p_2 = p_3 = 0.99$; 2) $\alpha_i = 0.7$ 的计算值见表 1。

法)。其中在构造惩罚函数时,为了突出精度优化设计的主要约束,对式(20)的约束进行了加大惩罚的技巧。

计算结果表明:对于机器人机构的不同设计精度要求,如误差的给定 R 值和实际位置误差小于给定误差的概率 p , 连杆参数的最优公差也有较大的变化。因此,机构精度设计时,可根据具体情况选择一组公差。公差特征指数对最优公差值影响较小,总的趋势是随着 a_i 的增大,最优公差值稍许变小。

5 结束语

用最优技术,综合机器人机构的公差,可以最低成本将机器人的绝对位姿误差控制在一定的精度范围内,并或许可能免除对机器人绝对误差的校正和补偿。

关节间隙也将产生机器人的绝对位姿误差,如何用优化的方法,确定合理的关节间隙值,有待进一步研究。

附录: 3×3 实对称矩阵的特征值

设 A 为 3×3 实对称矩阵

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

其中, $a_{ij} = a_{ji}$ 。

则, A 的特征方程为

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0 \quad (A1)$$

按文[11],

$$b_1 = -\sum_{i=1}^3 a_{ii}, \quad b_2 = \sum_{i=1}^3 A_{ii}, \quad b_3 = -\det|A|$$

其中, A_{ii} 为矩阵 A 的 a_{ii} 的余子式

令 $\lambda = x - b_1/3$, 则式 (A1) 变为

$$x^3 + px + q = 0 \quad (A2)$$

其中, $p = rb_1^2/3 + b_2$, $q = 2/27 \cdot b_1^3 - b_1 b_2/3 + b_3$

由文[11]知,实对称矩阵的特征值都是实数,且各不相等,那么方程 (A2) 的根也一定是实数且互不相等。因此,方程 (A3) 的判别式

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3 < 0 \quad (p < 0)$$

这样,可得方程 (A2) 的三个根为

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt[3]{r} \cos \theta \\ x_2 &= 2\sqrt[3]{r} \cos(\theta + 120^\circ) \\ x_3 &= 2\sqrt[3]{r} \cos(\theta + 240^\circ) \end{aligned} \quad (A3)$$

其中, $r = \sqrt{-(p/3)^3}$, $\theta = 1/3 \arccos(-q/2r)$

进而可得方程 (A1) 的特征根为

$$\lambda_i = x_i - b_1/3, \quad i=1, 2, 3 \quad (A4)$$

参考文献

- 1 Waldron K J, Kumar A. Development of a theory of errors for manipulators. In: Proc of the 5th World Congress on Theory of Machine and Mechanism, Canada, 1979, 821—826
- 2 Kumar A, Waldron K J. Numerical plotting of surface of positional accuracy of manipulators. Mechanism and Machine Theory, 1981; 16(4): 361—368
- 3 Kumar A, Prakash S. Analysis of mechanical errors in manipulators. In: Proc of the 6th World Congress on Theory of Machine and Mechanism, India, 1983; 960—964
- 4 Wu C H. A kinematic CAD tool for the design and control of a robot manipulator. Robotics Research, 1984; 3(1): 58—61
- 5 徐卫良, 张启先. 机器人机构误差分析的微小位移合成法. 南京工学院学报, 1987; 17(6)
- 6 XU Weiliang, ZHANG Qixian. Monte Carlo technique for error analysis of industrial robots. In: Proc of the 2th International Conf on Robotics and Factories of the Future, San Diego, USA, 1987
- 7 Sugimoto K, Okude T. Compensation of positioning errors caused by geometric deviations in robot system. In: Proc of the 2th ISIR, 1984; 231—236
- 8 徐卫良, 邓家贤. 平面连杆机构的最优尺寸公差和运动副配合公差的确定. 南京工学院学报, 1986; 16(6), 58—63
- 9 Kulkarni S V, Gary T K. Optimal allocation of tolerances in engineering designs governed by systems of simultaneous tolerance equations using selective assembly. J of the Institution of Engineers (India), Mech Eng Division, 1985; 65(3), 160—168
- 10 Azadivar F. Optimization of the combined cost of precision in manufacturing and the cost of error due to link length tolerances in mechanism. In: ASME Mechanism Conf, 1984-DET-129
- 11 “数学手册”. 北京, 高等教育出版社, 1979; 88—89, 143—145, 1356—1359

(下转第21页)