1978、1979 年部分高校研究生招生

高等數學試題

解答滙集

上海市普陀区业余大学
岑咏霆 季进如 编

上海电视大学印

1978、1979 年部分高校研究生招生

高等數學試題

解答滙集

上海市普陀区业余大学
岑咏霆 季进如 编

上海电视大学印

近两年，我们陆续收集到　　　　　　校招考研究生的解析几何、线性代数、数学分析、高等数学试题．一般说来，这些试题检查的知识面比较广，要求考生正确掌握基本概念，有较熟练的运算能力，并能进行严密的逻辑论证，其中一部份试题综合了多方面的知识，具有一定的难度及灵活性．

作为练习，我们给收集到的试题作了解答．现编印成书，也许能作为广大学员和教师的一份教学参考资料．

这些试题大部分是传抄件，一部分是考生回忆笔录，虽经校订，但可能和原件还有出入．这一点应予说明．

由于水平有限，加上时间仓促，大部分试题仅作一种解法，并且肯定存在不少不妥之处，错误也在所难免，请同志们批评指正．

本书插图由肖国荣同志绘制，封面图案由陈荣同志设计，在此一并表示深切的谢意．

编　者

1979.8.

目　录

上海工业大学

一九七九年高等数学试题解答

一、求极限:(每题5分,共20分)

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)=m$

$\lim\limits_{x\to0-}\left(\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)=n$

显然,当且仅当 $m=n$ 时, $x\to0$, 函数有极限 m。

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sin x(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\operatorname{tg}x})}=1$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

解: $a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}=\frac{n^n}{(n!)^2}\,\frac{(n!)^2}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$

$$=a_n\cdot\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (*)$$

显然,存在 N, 当 $n>N$ 时 $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1$

$\therefore\quad a_{n+1}<a_n$ 又 $a_n>0$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在记为 A。

对(*)式两边取极限得 $A=A\cdot 0$ $\therefore$ $A=0$

4. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & (x<0)\\ 5 & (x=0)\\ \dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} & (x>0)\end{cases}$

求: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

解: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos x^2}{1}=1$$

$\because$ $f(0-0)\neq f(0+0)$ $\therefore$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

二、求导数:(每小题5分,共10分)

1. 若 $x=x(y,z)$, $y=y(z,x)$, $z=z(x,y)$ 都是由 $F(x,y,z)=0$ 定义的函数

求: $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$

解: 对 $F(x,y,z)=0$ 两边对 y 求导:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}$$

同理 $\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$

$$\therefore \quad \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

2. 设 $r=a\varphi$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ [其中 (r, φ) 为点 (x, y) 之极坐标, a 为常数]

解一: $x=r\cos\varphi=a\varphi\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi=a\varphi\sin\varphi$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\varphi}}{\dfrac{dx}{d\varphi}}=\frac{a\sin\varphi+a\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi-a\varphi\sin\varphi}=\frac{\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}$$

解二: 由 $r=a\varphi$ 得

$$\sqrt{x^2+y^2}=a\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=a\cdot\frac{y'x-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay+x\sqrt{x^2+y^2}}{ax-y\sqrt{x^2+y^2}}$$

三、求积分(每小题 5 分, 共 20 分)

1. $$\int\frac{e^{k\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx\overset{t=\operatorname{arc\,tg}x}{=\!=\!=}\int\frac{e^{kt}}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,dt$$

$$=\int e^{kt}\cos t\,dt=\sin t\cdot e^{kt}-k\int e^{kt}\sin t\,dt$$

$$=\sin t\cdot e^{kt}+k\int e^{kt}d(\cos t)$$

$$=\sin t\cdot e^{kt}+k\cos t\cdot e^{kt}-k^2\int e^{kt}\cos t\,dt$$

$$\therefore\quad\int\frac{e^{k\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int e^{kt}\cos t\,dt$$

$$=\frac{e^{kt}}{1+k^2}(\sin t+k\cdot\cos t)+C$$

$$=\frac{e^{k\operatorname{arctg}x}}{1+k^2}\left(\frac{x+k}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

现分两种情况讨论

1) $a>0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left[\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left[\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{ax^2+bx+c}\right]+C_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c})+C_2$$

2) $a<0$（此时 $4ac-b^2\leqslant 0$）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}\right)^2-\left[\sqrt{-a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{\sqrt{-a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C$$

3. $\int_1^3 \frac{x}{2-x^2}\,dx$

解: $\int_1^3 \frac{x}{2-x^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{2-x^2}\,dx + \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{x}{2-x^2}\,dx$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_1^{\sqrt{2}-\varepsilon} \frac{x}{2-x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[-\frac{1}{2}\ln(2-x^2)\right]_1^{\sqrt{2}-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} -\frac{1}{2}\ln(2\sqrt{2}\,\varepsilon-\varepsilon^2) \quad \text{不存在}$$

故原无界函数的广义积分发散。

4. $\int_{-2}^{2}\max(1,\ x^2)dx=2\int_{0}^{2}\max(1,\ x^2)dx$

$$=2\int_0^1 dx+2\int_1^2 x^2dx=2+2\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=6\frac{2}{3}.$$

四、在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求出一点，这点到 n 个已知点 $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 距离的平方和为最小(10 分)

解：设点 $(x,\ y,\ z)$ 到 n 个已知点的距离平方和为

$$S=\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2$$

现在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 的条件限制下求其最小值

记 $$L=\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2$$
$$+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n}2(x-x_i)+2\lambda x$$

令其为 0, 得：$x=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n+\lambda}$

同理： $y=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n+\lambda}\quad z=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}z_i}{n+\lambda}$

代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 解得

$$n+\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}} \qquad (*)$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sum x_i}{\pm\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}}$$

$$y=\frac{\sum y_i}{\pm\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}}$$

$$z=\frac{\sum z_i}{\pm\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}}$$

又 $S=\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2$

$$=n\cdot(x^2+y^2+z^2)-2(x\sum x_i+y\sum y_i+z\sum z_i)$$
$$+\sum(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

当 x、y、z 取"+"号时

$$S=n-2\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}+\sum(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

当 x、y、z 取"−"号时

$$S=n+2\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}+\sum(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

由题意知最小值必存在

则当 $x=\dfrac{\sum x_i}{\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}}$ 时

$$y=\frac{\sum y_i}{\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}}$$

$$z=\frac{\sum z_i}{\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}}$$

距离有最小值:

$$S=n-2\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}+\sum(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

(严格证明略)

注:当 $\sqrt{(\sum x_i)^2+(\sum y_i)^2+(\sum z_i)^2}=0$ 时

$$\sum x_i=\sum y_i=\sum z_i=0$$

$$S=n+\sum(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

即与球面上点无关. 即无最小值点.

五、设 $f(x)$ 是 $|x|<r$ 的幂级数之和, 且

$$g(x)=f(x^2)$$

证明对每个 n

$$g^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}f^{\left(\frac{n}{2}\right)}(0) & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$ (10 分)

证：$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$$

$\cdots$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}a_nn(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$

于是 $f^{(k)}(0)=a_kk!\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}\quad g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n2nx^{2n-1}$$

$$g''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n2n(2n-1)x^{2n-2}\ \cdots$$

$$g^{(2k-1)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n2n(2n-1)\cdots[2n-(2k-1)+1]x^{2n-(2k-1)}$$

$$g^{(2k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n2n(2n-1)\cdots[2n-(2k-1)+1][2n-(2k-1)]x^{2n-2k}$$

于是 $g^{(2k-1)}(0)=0$

$$g^{(2k)}(0)=a_k2k!=a_k\frac{2k!}{k!}k!=\frac{2k!}{k!}f^{(k)}(0)$$

即：$g^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}f^{\left(\frac{n}{2}\right)}(0) & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

六、已知 $f(0)=-\frac{1}{2}$，确定 $f(x)$ 使

$$\int_{P_1}^{P_2}[e^x+f(x)]y\,dx-f(x)\,dy$$

与路径无关并求当 P_1、P_2 分别为(0, 0)，(1, 1)时，此线积分的值 (10 分)

解：
$$\frac{\partial[e^x+f(x)]y}{\partial y}=\frac{\partial[-f(x)]}{\partial x}$$

$$e^x+f(x)=-f'(x)$$

$$f'(x)+f(x)=-e^x$$

通介为 $$f(x)=\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)e^{-x}$$

$\because\ f(0)=-\frac{1}{2},\quad \therefore\ C=0.\quad \therefore\ f(x)=-\frac{1}{2}e^x$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+f(x)]y\,dx-f(x)\,dy$$

$$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\frac{1}{2}e^x y\,dx+\frac{1}{2}e^x dy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}dy+\int_0^1\frac{1}{2}e^x dx=\frac{1}{2}+\frac{e}{2}-\frac{1}{2}=\frac{e}{2}$$

七、问满足方程 $y'''-y''-2y'=0$ 的哪一条积分曲线通过点 (0, −3) 在这点处有倾角为 arc tg 6 的切线且曲率为 0？(10 分)

解：特征方程为

$$r^3-r^2-2r=0$$

$$r_1=0,\ r_2=-1,\ r_3=2$$

$\therefore$ 通介为 $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$

由初始条件得：

$$\begin{cases}C_1+C_2+C_3=-3\\-C_2+2C_3=6\\C_2+4C_3=0\end{cases}\qquad \therefore\ \begin{matrix}C_1=0\\C_2=-4\\C_3=1\end{matrix}$$

$\therefore$ 曲线为 $\qquad y=-4e^{-x}+e^{2x}$

八、计算曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$ 所围成的体积 (10 分)

解：作广义球坐标变换

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\cos\varphi \\ z = cr\sin\varphi \end{cases} \qquad \left|\frac{\partial(x、y、z)}{\partial(r、\varphi、\theta)}\right| = abc\,r^2\cos\varphi$$

$$V = \iiint_{\Omega} abc\,r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\cos\phi} r^2\,dr$$

$$= 8abc\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\varphi}{3}\,d\varphi$$

$$= 4abc\cdot\frac{\pi}{3}\left[\frac{3}{8}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}abc$$

同济大学

一九七九年高等数学试题解答

1. 已知 $z=f(x+\phi(y))$ 求 z_{xx}, z_{yy}

解: 记 $$u=x+\phi(y)$$

$$z_x=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{du},\quad z_{xx}=\frac{d^2f}{du^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d^2f}{du^2}$$

$$z_y=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{df}{du}\cdot\phi'(y)$$

$$z_{yy}=\frac{d^2f}{du^2}\,[\phi'(y)]^2+\frac{df}{du}\,\phi''(y)$$

2. 计算 $$\int_0^\pi\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx$$

解: $$I=\int_0^\pi\sqrt{\sin x(1-\sin^2 x)}\,dx=\int_0^\pi\sqrt{\sin x\cdot\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{3}$$

3. 解微分方程

$$y'''-4y''+4y'+e^{-x}=0$$

解: 对应之齐次方程为

$$y'''-4y''+4y'=0$$

特征方程为 $r^3-4r^2+4r=0$, $r_1=0$, $r_2=r_3=2$

∴ 余函数为

$$y=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$$

设原方程特解为

$$y_1=C_4e^{-x}$$

代入得 $$-C_4e^{-x}-4C_4e^{-x}-4C_4e^{-x}+e^{-x}=0$$

$$C_4=\frac{1}{9}, \quad \therefore \quad y_1=\frac{1}{9}e^{-x}$$

$\therefore$ 原方程通解为:

$$y=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}+\frac{1}{9}e^{-x}$$

4. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz \quad \Omega: \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2\geqslant\pi^2 \\ x^2+y^2+z^2\leqslant 4\pi^2 \end{array}$

解: 利用球坐标变换.

$$I=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{\cos\rho}{\rho}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\int_{\pi}^{2\pi}\rho\cos\rho\,d\rho=2\pi\cdot 2\cdot 2=8\pi$$

5. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}z^3\,dx\,dy \quad \Sigma: \ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上半球下侧

解: $$\iint\limits_{\Sigma}z^3\,dx\,dy=\iint\limits_{D:x^2+y^2\leqslant 1}-(\sqrt{1-x^2-y^2})^3dx\,dy$$

利用极坐标变换

$$I=\iint\limits_{D'}-(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{2}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}d(1-r^2)$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{1}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=-\frac{2\pi}{5}$$

6. 计算广义积分

$$\int_0^{\infty}e^{-px}\sin^2 3x\,dx \quad (p>0)$$

解：$I=\int_0^{\infty}e^{-px}\cdot\sin^2 3x\,dx=\int_0^{\infty}e^{-px}\frac{1-\cos 6x}{2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-px}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-px}\cos 6x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2p}[e^{-px}]_0^{\infty}-\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}I_1$$

$$I_1=\int_0^{\infty}e^{-px}\cos 6x\,dx=-\frac{1}{p}\int_0^{\infty}\cos 6x d(e^{-px})$$

$$=-\frac{1}{p}[e^{-px}\cos 6x]_0^{\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{\infty}e^{-px}(-6\sin 6x)dx$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{6}{p^2}\int_0^{\infty}\sin 6x d(e^{-px})$$

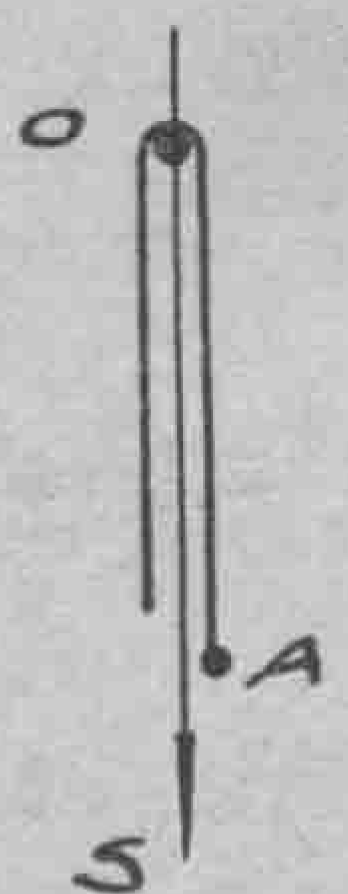
$$=\frac{1}{p}+\frac{6}{p^2}[e^{-px}\sin 6x]_0^{\infty}-\frac{36}{p^2}\int_0^{\infty}e^{-px}\cos 6x\,dx$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{36}{p^2}I_1$$

$\therefore\quad I_1+\frac{36}{p^2}I_1=\frac{1}{p},\qquad I_1=\frac{p}{p^2+36}$

$$I=\frac{1}{2p}-\frac{p}{2(p^2+36)}=\frac{18}{p(p^2+36)}$$

7. 一铁链挂在一光滑铁钉上，右端 10 米，左端 8 米，由静止开始下滑．求：铁链离开钉子所化的时间．



解：设铁链质量为 m，如图建立坐标，则 A 点坐标为 $s=s(t)$．

由力学定律得：

$$\frac{m}{18}(2s-18)g=ms''$$

$$s''-\frac{g}{9}s=-g$$

$$r^2-\frac{g}{9}=0\qquad r_1=-\frac{\sqrt{g}}{3},\qquad r_2=\frac{\sqrt{g}}{3}$$

余函数为

$$s=C_1e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}+C_2e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}$$

设特解为

$$s_1=A$$

得
$$-\frac{g}{9}A=-g \quad A=9$$

∴ 通解为:

$$s=C_1e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}+C_2e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+9$$

又
$$t=0, \quad s=10, \quad s'=0$$

$$\begin{cases} C_1+C_2+9=10 \\ -C_1+C_2=0 \end{cases} \qquad C_1=C_2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad s=\frac{1}{2}(e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}+e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t})+9=\mathrm{ch}\frac{\sqrt{g}}{3}t+9$$

当 $s=18$ 时

$$t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+4\sqrt{5})$$

答: 需 $\dfrac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+4\sqrt{5})$ 秒

8. 展开 $f(x)=\begin{cases} 0 & -2<x\leqslant 0 \\ x & 0<x\leqslant 2 \end{cases}$ 为富里埃级数

解: $f(x)$满足收敛定理的条件, 它在$(-2, 2)$内连续, 作为延续的周期函数, 它在端点不连续, 所以对应的富里埃级数在$(-2, 2)$收敛于$f(x)$, 在两端收敛于

$$\frac{f(-2+0)+f(-2-0)}{2}=\frac{0+2}{2}=1$$

计算富里埃系数如下:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx=1$$