广西函授大学试用教材

三角习题解答

广西师院数学系编

目　　录

第一章　习题解答

练　习 1.1

1．用区间表示各象限的角 α．

解：第一象限的角 $\alpha\in\left(2n\pi,\ 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$n\in J$；

第二象限的角 $\alpha\in\left(2n\pi+\frac{\pi}{2},\ 2n\pi+\pi\right)$，$n\in J$；

第三象限的角 $\alpha\in\left(2n\pi+\pi,\ 2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$，$n\in J$；

第四象限的角 $\alpha\in\left(2n\pi+\frac{3\pi}{2},\ 2n\pi+2\pi\right)$，$n\in J$．

2．用不等式表示各象限的角 α．

解：第一象限的角：$2n\pi<\alpha<2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in J$；

第二象限的角：$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2n\pi+\pi$，$n\in J$；

第三象限的角：$2n\pi+\pi<\alpha<2n\pi+\frac{3\pi}{2}$，$n\in J$；

第四象限的角：$2n\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2n\pi+2\pi$，$n\in J$．

3．写出各象限的角的集合 S．

解：第一象限的角的集合 S 是：

$$S=\left\{\alpha:2n\pi<\alpha<2n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in J\right\};$$

第二象限的角的集合S是：

$$S=\left\{\alpha: 2n\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2n\pi+\pi, n\in J\right\};$$

第三象限的角的集合S是：

$$S=\left\{\alpha: 2n\pi+\pi<\alpha<2n\pi+\frac{3\pi}{2}, n\in J\right\};$$

第四象限的角的集合S是：

$$S=\left\{\alpha: 2n\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2n\pi+2\pi, n\in J\right\}.$$

4．写出终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合S.

解：在 0 到 2π 的角中，终边与直线 $y=x$ 在第一象限的部分重合的角 $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$，所以终边与直线 $y=x$ 在第一象限的部分重合的角的集合 S_1 是：

$$S_1=\left\{\alpha: \alpha=2n\pi+\frac{\pi}{4}, n\in J\right\};$$

在 0 到 2π 的角中，终边与直线 $y=x$ 在第三象限的部分重合的角 $\alpha_2=\frac{5\pi}{4}$，所以终边与直线 $y=x$ 在第三象限的部分重合的角的集合 S_2 是：

$$S_2=\left\{\alpha: \alpha=2n\pi+\frac{5\pi}{4}, n\in J\right\}.$$

因此，终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合S是：

$$S=S_1\cup S_2.$$

$$2n\pi+\frac{\pi}{4}=2n\cdot\pi+\frac{\pi}{4}, \qquad (1)$$

$$2n\pi+\frac{5\pi}{4}=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

在（1）、（2）两式中，（1）式的第一项是 π 的所有偶

数倍，（2）式的第一项是π的所有奇数倍．因此可以合并为π的所有整数（用k表示）倍．这样，（1）、（2）可合并写为：

$$k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in J.$$

$$\therefore\quad S=\left\{\alpha:\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in J\right\}.$$

5．写出终边落在直线$x+y=0$上的角的集合S．

解：在0到2π的角中，终边与直线$x+y=0$在第二象限的部分重合的角$\alpha_1=\frac{3\pi}{4}$，所以终边与直线$x+y=0$在第二象限的部分重合的角的集合S_1是：

$$S_1=\left\{\alpha:\alpha=2n\pi+\frac{3\pi}{4},\ n\in J\right\};$$

在0到2π的角中，终边与直线$x+y=0$在第四象限的部分重合的角$\alpha_2=\frac{7\pi}{4}$，所以终边与直线$x+y=0$在第四象限的部分重合的角的集合S_2是：

$$S_2=\left\{\alpha:\alpha=2n\pi+\frac{7\pi}{4},\ n\in J\right\}.$$

因此，终边落在直线$x+y=0$上的角的集合S是：

$$S=S_1\cup S_2.$$

$$2n\pi+\frac{3\pi}{4}=2n\pi+\frac{3\pi}{4},\qquad(1)$$

$$2n\pi+\frac{7\pi}{4}=(2n+1)\pi+\frac{3\pi}{4}.\qquad(2)$$

在（1）、（2）两式中，（1）式的第一项是π的所有偶数倍，（2）式的第一项是π的所有奇数倍．因此可以合并为π的所有整数（用k表示）倍．这样，（1）、（2）可合

并写为：

$$k\pi+\frac{3\pi}{4},\ k\in J\ .$$

$$\therefore\quad S=\left\{\alpha:\alpha=k\pi+\frac{3\pi}{4},\ k\in J\right\}.$$

练　习 1.2

1．已知角α终边上一点P的横坐标是2，P点到原点的距离是3，求角α的各三角函数值。

解：

$\because\quad x=2,\ r=3,$

$\therefore\quad y=\pm\sqrt{r^2-x^2}=\pm\sqrt{5}\ .$

若$x=2$，$y=\sqrt{5}$，$r=3$，则

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{5}}{3};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{3};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{5}}{2};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{3}{2};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\ .$$

若$x=2$，$y=-\sqrt{5}$，$r=3$，则

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{5}}{3};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{3};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{5}}{2};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{3}{2};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}\ .$$

2．根据下列条件，求角α的各三角函数值：

（1）角α的终边与第四象限角的平分线重合；

解：第四象限角的平分线的方程是$y=-x(x>0)$。令$x=1$，则$y=-1$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$.

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-1;\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}==-1;$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\sqrt{2};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}=-\sqrt{2}\quad.$$

（2）角α的终边与射线$y=3x(x>0)$重合；

解：令$x=1$，则$y=3$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}$.

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3\sqrt{10}}{10};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{10}}{10};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=3;\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{1}{3};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\sqrt{10};\qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{10}}{3}\quad.$$

（3）角α的终边落在直线$2x+y=0$上；

解：若角α的终边与直线$2x+y=0$在第二象限内的部分重合。

令$x=-1$，则$y=2$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$.

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{5}}{5};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}==-2;\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{1}{2};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=-\sqrt{5};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{5}}{2}\quad.$$

若角α的终边与直线$2x+y=0$在第四象限内的部分重合.

令$x=1$，则$y=-2$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$.

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{2\sqrt{5}}{5};\ \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-2;\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{1}{2};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\sqrt{5};\qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(4) 角α的终边所在直线与直线$2x+3y-1=0$平行；

解：直线 $2x+3y-1=0$ 的斜率是$-\frac{2}{3}$. 因为角α的终边所在直线与直线$2x+3y-1=0$平行，所以角α的终边所在直线的斜率也是$-\frac{2}{3}$. 因此，角α的终边所在直线的方程是 $y=-\frac{2}{3}x$.

若角α的终边与直线 $y=-\frac{2}{3}x$ 在第二象限内的部分重合.

令$x=-3$，则$y=2$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{13}$.

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{13}}{13};\ \cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{3\sqrt{13}}{13};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{2}{3};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{3}{2};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=-\frac{\sqrt{13}}{3};\ \csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

若角α的终边与直线 $y=-\frac{2}{3}x$ 在第四象限内的部分重合.

令$x=3$，则$y=-2$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{13}$.

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{y}{r} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}; \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{3\sqrt{13}}{13};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{2}{3}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{2};$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{13}}{3}; \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y} = -\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

（5）角 α 的终边所在直线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直；

解：直线 $x+2y+1=0$ 的斜率是 $-\frac{1}{2}$. 因为角 α 的终边所在直线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，所以角 α 的终边所在直线的斜率是 2. 因此，角 α 的终边所在直线的方程是 $y=2x$.

若角 α 的终边与直线 $y=2x$ 在第一象限内的部分重合.

令 $x=1$，则 $y=2$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$.

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = 2; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{2};$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \sqrt{5}; \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

若角 α 的终边与直线 $y=2x$ 在第三象限内的部分重合.

令 $x=-1$，则 $y=-2$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$.

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{y}{r} = -\frac{2\sqrt{5}}{2}; \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = 2; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{2};$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = -\sqrt{5}; \quad \csc\alpha = \frac{r}{y} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(6) 角 α 的终边经过直线 $x-3y+5=0$ 与直线 $2x+5y-1=0$ 的交点；

解：联立解方程 $x-3y+5=0$ 和 $2x+5y-1=0$，得

$x=-2$，$y=1$.

$\therefore\quad r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$.

$\therefore\quad \sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{2}$；$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}=-2$；

$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}=\sqrt{5}$.

(7) 角 α 的终边经过直线 $y=2x+1$ 与抛物线 $y=-2x^2+13$的交点；

解：联立解方程$y=2x+1$与$y=-2x^2+13$，得

$x=2$，$y=5$ 或 $x=-3$，$y=-5$.

所以直线$y=2x+1$与抛物线$y=-2x^2+13$ 的交点是 $A(2,5)$和$B(-3,-5)$.

若角 α 的终边经过点$A(2,5)$，则

$x=2$，$y=5$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{29}$.

$\therefore\quad \sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$；$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$；

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2}$；　　$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{5}$；

$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$；　　$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

若角α 的终边经过点$B(-3,-5)$，则

$x=-3$，$y=-5$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{29}$.

$\therefore\quad \sin\alpha=\dfrac{y}{r}=-\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$；$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{3\sqrt{29}}{29}$；

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{5}{3};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{3}{5};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=-\frac{\sqrt{29}}{3};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{29}}{5}.$$

（8）角α的终边经过二抛物线$x^2+2x-y+1=0$与$2x^2-x-y+3=0$的交点.

解：联立解方程$x^2+2x-y+1=0$和$2x^2-x-y+3=0$，得

$$x=1,\ y=4\ \text{或}\ x=2,\ y=9。$$

所以，二抛物线$x^2+2x-y+1=0$与$2x^2-x-y+3=0$的交点是A(1，4)和B(2，9).

若角α的终边经过点A(1，4)，则

$$x=1,\ y=4,\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{17}.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4\sqrt{17}}{17};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{17}}{17};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=4;\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{1}{4};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\sqrt{17};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{17}}{4}.$$

若角α的终边经过点B(2，9)，则

$$x=2,\ y=9,\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{85}.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{9\sqrt{85}}{85};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2\sqrt{85}}{85};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{9}{2};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{2}{9};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{85}}{2};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{85}}{9}.$$

3．确定下列各式的符号：

解：（1）$\sin 410^\circ\cos 810^\circ(-)$；

(2) $\sin 850^\circ \operatorname{tg} 510^\circ$ (−);

(3) $\sin 930^\circ \operatorname{ctg} 940^\circ$ (−);

(4) $\dfrac{\cos\left(-\dfrac{13\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\dfrac{15\pi}{4}\right)}$ (+);

(5) $\dfrac{\cos(-3)}{\operatorname{ctg}(-2)}$ (−).

4. 确定下列各式的符号:

(1) $\sin\alpha \operatorname{tg}\beta$, $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$;

解: $\sin\alpha \operatorname{tg}\beta$ (−).

(2) $\cos\alpha \operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \in \left(2n\pi + \pi, 2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $n \in J$;

解: $\cos\alpha \operatorname{ctg}\alpha$ (−).

(3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha \in \left(2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}, 2n\pi + 2\pi\right)$, $n \in J$;

解: $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$ (−).

(4) $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\alpha \in \left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}, 2n\pi + \pi\right)$, $n \in J$.

解: $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$ (−).

5. 根据下列条件, 确定角 α 的集合:

(1) $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} > 0$;

解:

$\because \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} > 0$,

$\therefore \sin\alpha > 0$ 且 $\operatorname{tg}\alpha > 0$ 或 $\sin\alpha < 0$ 且 $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

符合条件 $\sin\alpha>0$ 且 $tg\alpha>0$ 的角 α 的集合是

$S_1=\{$第一象限的角$\}$;

符合条件 $\sin\alpha<0$ 且 $tg\alpha<0$ 的角 α 的集合是

$S_2=\{$第四象限的角$\}$.

所以，符合条件 $\frac{\sin\alpha}{tg\alpha}>0$ 的角 α 的集合是

$S=S_1\cup S_2=\{$第一象限的角$\}\cup\{$第四象限的角$\}$.

(2) $\frac{\cos\alpha}{ctg\alpha}<0$;

解:

$\because\ \frac{\cos\alpha}{ctg\alpha}<0$,

$\therefore\ \cos\alpha>0$ 且 $ctg\alpha<0$ 或 $\cos\alpha<0$ 且 $ctg\alpha>0$.

符合条件 $\cos\alpha>0$ 且 $ctg\alpha<0$ 的角 α 的集合是

$S_1=\{$第四象限的角$\}$;

符合条件 $\cos\alpha<0$ 且 $ctg\alpha>0$ 的角 α 的集合是

$S_2=\{$第三象限的角$\}$.

所以，符合条件 $\frac{\cos\alpha}{ctg\alpha}<0$ 的角 α 的集合是

$S=S_1\cup S_2=\{$第三象限的角$\}\cup\{$第四象限的角$\}$.

(3) $\sin\alpha\cos\alpha<0$;

解:

$\because\ \sin\alpha\cos\alpha<0$,

$\therefore\ \sin\alpha>0$ 且 $\cos\alpha<0$ 或 $\sin\alpha<0$ 且 $\cos\alpha>0$.

符合条件 $\sin\alpha>0$ 且 $\cos\alpha<0$ 的角 α 的集合是

$S_1=\{$第二象限的角$\}$;

符合条件 $\sin\alpha<0$ 且 $\cos\alpha>0$ 的角 α 的集合是

$S_2=\{$第四象限的角$\}$.

所以，符合条件 $\sin\alpha\cos\alpha<0$ 的角 α 的集合是

$S=S_1\cup S_2=$ {第二象限的角}$\cup${第四象限的角}.

(4) $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha>0$;

解:

$\because\ \cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha>0$,

$\therefore\ \cos\alpha>0$且$\mathrm{tg}\alpha>0$或$\cos\alpha<0$且$\mathrm{tg}\alpha<0$.

符合条件$\cos\alpha>0$且$\mathrm{tg}\alpha>0$的角α的集合是

$S_1=$ {第一象限的角};

符合条件$\cos\alpha<0$且$\mathrm{tg}\alpha<0$的角α的集合是

$S_2=$ {第二象限的角}.

所以，符合条件$\mathrm{ocs}\alpha\,\mathrm{tg}\alpha>0$的角$\alpha$的集合是

$S=S_1\cup S_2=$ {第一象限的角}$\cup${第二象限的角}.

(5) $\sin\alpha>0$且$\mathrm{tg}\alpha<0$;

解:

符合条件$\sin\alpha>0$的角α的集合是

$S_1=$ {第一象限的角}$\cup${第二象限的角};

符合条件$\mathrm{tg}\alpha<0$的角α的集合是

$S_2=$ {第二象限的角}$\cup${第四象限的角}.

所以，符合条件$\sin\alpha>0$且$\mathrm{tg}\alpha<0$的角α的集合是

$S=S_1\cap S_2=$ {第二象限的角}.

(6) $\cos\alpha<0$且$\mathrm{ctg}\alpha>0$;

解:

符合条件$\cos\alpha<0$的角α的集合是

$S_1=$ {第二象限的角}$\cup${第三象限的角};

符合条件$\mathrm{ctg}\alpha>0$的角α的集合是

$S_2=$ {第一象限的角}$\cup${第三象限的角}.

所以，符合条件$\cos\alpha<0$且$\mathrm{ctg}\alpha>0$的角α的集合是

$S=S_1\cap S_2=$ {第三象限的角}.

(7) $\cos\alpha$与$\mathrm{tg}\alpha$同号;

解:

$\because$ $\cos\alpha$与$\mathrm{tg}\alpha$同号，

$\therefore$ $\cos\alpha>0$且$\mathrm{tg}\alpha>0$或$\cos\alpha<0$且$\mathrm{tg}\alpha<0$.

符合条件$\cos\alpha>0$且$\mathrm{tg}\alpha>0$的角α的集合是

$S_1=\{$第一象限的角$\}$;

符合条件$\cos\alpha<0$且$\mathrm{tg}\alpha<0$的角α的集合是

$S_2=\{$第二象限的角$\}$.

所以，符合条件$\cos\alpha$与$\mathrm{tg}\alpha$同号的角α的集合是

$S=S_1\cup S_2=\{$第一象限的角$\}\cup\{$第二象限的角$\}$.

(8) $\sin\alpha$与$\mathrm{ctg}\alpha$异号.

解:

$\because$ $\sin\alpha$与$\mathrm{ctg}\alpha$异号，

$\therefore$ $\sin\alpha>0$且$\mathrm{ctg}\alpha<0$或$\sin\alpha<0$且$\mathrm{ctg}\alpha>0$.

符合条件$\sin\alpha>0$且$\mathrm{ctg}\alpha<0$的角α的集合是

$S_1=\{$第二象限的角$\}$;

符合条件$\sin\alpha<0$且$\mathrm{ctg}\alpha>0$的角α的集合是

$S_2=\{$第三象限的角$\}$.

所以，符合条件$\sin\alpha$与$\mathrm{ctg}\alpha$异号的角α的集合是

$S=S_1\cup S_2=\{$第二象限的角$\}\cup\{$第三象限的角$\}$.

练　习 1.3

1. 已知 $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{m}{n}$，求$\dfrac{m\sin\alpha-n\cos\alpha}{m\sin\alpha+n\cos\alpha}$的值。

解:

$$\frac{m\sin\alpha-n\cos\alpha}{m\sin\alpha+n\cos\alpha}=\frac{m\,\mathrm{tg}\alpha-n}{m\,\mathrm{tg}\alpha+n}$$

$$= \frac{\dfrac{m^2 - n^2}{n}}{\dfrac{m^2 + n^2}{n}}$$

$$= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}.$$

2. 已知$\sin\alpha - m\cos\alpha = 0$，$m > 0$，求角$\alpha$的各三角函数值.

解：

$\because \quad \sin\alpha - m\cos\alpha = 0,$

$\therefore \quad tg\alpha = m.$

$\because \quad m > 0,$

$\therefore \quad tg\alpha > 0.$

故角α是第一象限的角或第三象限的角。

若角α是第一象限的角，则

$$\sec\alpha = \sqrt{1 + tg^2\alpha} = \sqrt{1 + m^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2};$$

$$\sin\alpha = tg\alpha\cos\alpha = \frac{m\sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2};$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m};$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{m}.$$

若角α是第三象限的角，则同理可得

$$\sec\alpha = -\sqrt{1 + m^2}; \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2};$$

$$\sin\alpha = -\frac{m\sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2}; \quad \csc\alpha = -\frac{\sqrt{1 + m^2}}{m};$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{1}{m}.$$

3．已知$\sin\alpha - \text{tg}\beta = 1$，$3\sin\alpha + 2\text{tg}\beta = 2$，求角α的各三角函数值.

解：关于$\sin\alpha$和$\text{tg}\beta$解方程组

$$\begin{cases} \sin\alpha - \text{tg}\beta = 1, \\ 3\sin\alpha + 2\text{tg}\beta = 2, \end{cases}$$

得 $$\sin\alpha = \frac{4}{5}.$$

因为$\sin\alpha = \frac{4}{5} > 0$，所以角α是第一或第二象限的角.

若角α是第一象限的角，则

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{3}{5};$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3};$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{3}{4};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{3};$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{5}{4}.$$

若角α是第二象限的角，则同理可得

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5}; \qquad \text{tg}\alpha = -\frac{4}{3};$$

$$\text{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}; \qquad \sec\alpha = -\frac{5}{3};$$

$$\csc\alpha = \frac{5}{4}.$$