

工业机器人误差分析

陈明哲 张启先

【摘要】

本文讨论了工业机器人的静态误差和动态误差问题。导出了计算由杆件公差引起的手部静态误差的公式。用动态静力学方法分析了由杆件变形引起的手部动态误差，并以例子说明了计算过程。

前 言

工业机器人的误差分析对于机器人机构与控制系统的的设计有一定意义。通过对执行典型工作任务时手部误差分析，可以确定各机械部分的刚度和控制系统的补偿量。机器人的误差可分为静态误差和动态误差。关于静态误差，曾有文[1, 2]发表。但只涉及少数几个参数的偏差，并且所研究的机构也比较简单，叙述得不够全面。关于动态误差，发表的文章比较多，例如[3-7]，但是这些文章总的特点是考虑杆件的弹性变形，建立微幅振动的微分方程，然后求解。因为计算很繁琐，并且推导过程作了过多的简化（如杆件质量均略去不计等等），使这种方法的实际应用受到限制。因此本文准备比较系统地讨论静态误差的计算问题；并运用文[8]的方法对机器人进行力的分析；在力分析的基础上用简单易行的动态静力学方法作动态误差分析。所述的方法不用建立微分方程，并且和机器人的动力分析平行进行，便于电子计算机进行在线计算与补偿。

坐标系与一些关系式的说明

机器人的坐标系沿用一般取法[9]（图1）。依图1我们可写出如下相对位置矩阵

本文1984年1月收到。

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} C\theta_j & -Ca_j S\theta_j & Sa_j S\theta_j & h_j C\theta_j \\ S\theta_j & Ca_j C\theta_j & -Sa_j C\theta_j & h_j S\theta_j \\ 0 & Sa_j & Ca_j & s_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)

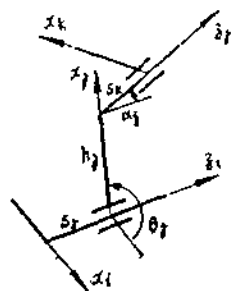


图 1

$M_{i,j}$ 下面简称为 M_j 。另外，引进刚体位姿矩阵

$$T_i = \begin{bmatrix} C_i & r_i \\ 000 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

表示第 i 个构件对于绝对坐标系 $Oxyz$ 的位置和姿态。其中 $r_i = [r_{21}, r_{22}, r_{23}]^T$ 为坐标系原点矢径；

$$C_i = \begin{pmatrix} l_{1i} & l_{2i} & l_{3i} \\ m_{1i} & m_{2i} & m_{3i} \\ n_{1i} & n_{2i} & n_{3i} \end{pmatrix} \quad (3)$$

其各元素分别表示各坐标轴对 $Oxyz$ 的方向余弦。显然， $M_{i,j}$ 表示第 j 个刚体在第 i 坐标系中的位姿。由此可得递推式如下：

$$T_i = T_{i-1} M_i \quad (4)$$

$$T_n = T_0 M_1 M_2 \cdots M_n \quad (5)$$

若坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 与 $Oxyz$ 重合，则 $T_0 = E$ 。

将式 (1) 对时间取导，得

$$\dot{M}_j = \Theta_j M_j \dot{\theta}_j \quad (6)$$

这里引用如下矩阵 [8]

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7)

$$\Theta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

式(6)中 Θ 对于转动副取 Θ_s ,对于移动副取 Θ_s ;广义坐标 q ,对于转动副取 θ_i ,对于移动副取 s_i 。类似地可得

$$T_i = T_{i-1}M_i + N_i q_i \quad (8)$$

式中

$$N_i = T_{i-1}\Theta M_i$$

$$T_i = T_{i-1}M_i + N_i \dot{q}_i + L_i \quad (9)$$

式中

$$L_i = 2T_{i-1}\Theta M_i \dot{q}_i + T_{i-1}\Theta^2 M_i \dot{q}_i^2$$

式(8)、(9)均可表为广义坐标形式

$$\dot{T}_i = \sum_{j=1}^i U_{i,j} \dot{q}_j \quad (10)$$

式中

$$U_{i,j} = T_0 M_1 M_2 \cdots M_{j-1} \Theta M_j \cdots M_i$$

$$1 < j < i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$T_i = \sum_{j=1}^i U_{i,j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j U_{i,j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (11)$$

式中

$$U_{i,j,k} = T_0 M_1 \cdots \Theta M_j \cdots \Theta M_k \cdots M_i$$

静态误差分析

1. 由广义坐标偏差 Δq 引起的手部位置误差

设末杆(手部)的速度 S_n 为

$$S_n = [S_{1n}, \dots, S_{6n}]^T = [\omega_{1n}, \omega_{2n}, \omega_{3n}, \rho_{1n}, \rho_{2n}, \rho_{3n}]^T \quad (12)$$

式中

$\omega_n = [\omega_{1n}, \omega_{2n}, \omega_{3n}]^T$ 为手部角速度(在相连坐标轴上投影); $\rho_n = [\rho_{1n}, \rho_{2n}, \rho_{3n}]^T$ 为相连坐标系原点的速度(在相连坐标轴上投影)。

由于

$$\dot{T}_n = T_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dot{\rho}_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dot{\rho}_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dot{\rho}_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{3n} & \omega_{2n} & 0 \\ \omega_{3n} & 0 & -\omega_{1n} & 0 \\ -\omega_{2n} & \omega_{1n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_n \sum_{k=1}^6 \Theta_k S_{kn} \quad (13)$$

故
$$T_n^{-1} T_n = \sum_{k=1}^6 \Theta_k S_k \quad (14)$$

将式(10)代入上式,得

$$\sum_{k=1}^6 \Theta_k S_k = T_n^{-1} \sum_{j=1}^6 U_j q_j$$

将上式两边左乘 $\Theta = [\Theta_1^T, \Theta_2^T, \dots, \Theta_6^T]^T$, 然后两边求迹 $tr[\cdot]$, 得

$$S_n = J^0 q \quad (15)$$

式中
$$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$$

J^0 为雅可比阵, 其元素为

$$J_{ij}^0 = \delta_i \cdot tr[\Theta_i^T (M_1 \dots M_n)^{-1} \Theta (M_1 \dots M_n)]$$

而
$$1/\delta_i = tr[\Theta_i^T \Theta_i] = \begin{cases} 2, & i=1, 2, 3 \\ 1, & i=4, 5, 6 \end{cases}$$

由式(15)即可确定由广义坐标偏差 Δq 引起的手部位置误差如下:

$$\Delta S_n \approx J^0 \Delta q \quad (16)$$

式中

$$\Delta S_n = [\Delta \varphi_{1n}, \Delta \varphi_{2n}, \Delta \varphi_{3n}, \Delta \rho_{1n}, \Delta \rho_{2n}, \Delta \rho_{3n}]^T$$

$$\Delta q = [\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n]^T$$

下面叙述已知手部误差 ΔS_n 如何确定手部实际达到的位姿。

考虑同一刚体(比如说,末杆)在绝对坐标系 $Oxyz$ 中的两个位姿相互变换

$$T_n^{(2)} = T_n^{(1)} M^{1-2} \quad (17)$$

可认为是原点的一个平移 $\vec{\rho}$ (在坐标系 $Ox_1^1 y_1^1 z_1^1$ 中的分量为 ρ_1, ρ_2, ρ_3) 和绕过原点某轴线 \vec{u} (其单位矢在坐标系 $Ox_1^1 y_1^1 z_1^1$ 中的方向余弦为 u_1, u_2, u_3) 转 ϕ 角(图2)。后一过程可用绕斜轴转动矩阵 $R_{\phi, u}$ 表示[9]。于是

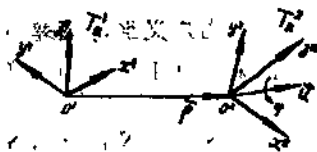


图 2

$$M^{1-2} = \begin{bmatrix} R_{\phi, u} & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

应用式(17)及(18)进行工业机器人的误差计算时,首先按已知手部误差 ΔS_n 确定矩阵 M^{1-2} 的各元素。这里

$$\rho_1 = \Delta \rho_{1n}, \rho_2 = \Delta \rho_{2n}, \rho_3 = \Delta \rho_{3n} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sqrt{(\Delta \phi_{1n})^2 + (\Delta \phi_{2n})^2 + (\Delta \phi_{3n})^2} \\ u_1 &= \Delta \phi_{1n} / \phi, u_2 = \Delta \phi_{2n} / \phi, u_3 = \Delta \phi_{3n} / \phi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

若设 $T_n^{(1)}$ 为规定要达到的手部位姿，则由式 (17) 即可求得由于 ΔS_n 影响手部实际达到的位姿 $T_n^{(2)}$ 。

2. 由杆件公差引起的手部位置误差

为了确定由杆件公差引起的手部误差，应该把每个杆件的四个参数都看作变量。据此，我们对式 (4) 取导，得

$$T_{,i} = \sum_{j=1}^i U_{,i} \dot{\theta}_j + \sum_{j=1}^i U_{,i} \dot{s}_j + \sum_{j=1}^i V_{,i} \dot{a}_j + \sum_{j=1}^i V_{,i} \dot{h}_j \quad (21)$$

式中

$$U_{,i} = T_0 M_1 \cdots M_{j-1} \Theta M_j \cdots M_n \quad (\Theta \text{ 对于 } \dot{\theta}_j \text{ 取 } \theta_j, \text{ 对于 } \dot{s}_j \text{ 取 } \theta_0)$$

$$V_{,i} = T_0 M_1 \cdots M_j \Theta M_{j+1} \cdots M_n \quad (\Theta \text{ 对于 } \dot{a}_j \text{ 取 } \theta_1, \text{ 对于 } \dot{h}_j \text{ 取 } \theta_4)$$

$$1 < j < i, \quad i=1, \dots, n$$

类似式 (12) 及 (15) 的作法，得

$$\Delta S_n \approx J^b \dot{p} \quad (22)$$

式中

$$\dot{p} = [\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n, \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_n, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_n]^T$$

J^b 为雅可比矩阵，其结构为

$$J^b = [J^{b1} : J^{b2} : J^{b3} : J^{b4}]$$

矩阵块的元素分别为

$$J^{b1} = \delta_j \text{tr}[\Theta^T(M_1 \cdots M_n)^{-1} \Theta_1(M_1 \cdots M_n)]$$

$$J^{b2} = \delta_j \text{tr}[\Theta^T(M_1 \cdots M_n)^{-1} \Theta_0(M_1 \cdots M_n)]$$

$$J^{b3} = \delta_j \text{tr}[\Theta^T(M_{j-1} \cdots M_n)^{-1} \Theta_1(M_{j+1} \cdots M_n)]$$

$$J^{b4} = \delta_j \text{tr}[\Theta^T(M_{j-1} \cdots M_n)^{-1} \Theta_4(M_{j+1} \cdots M_n)]$$

$$i=1, \dots, 6, \quad j=1, \dots, n$$

由式 (22) 可得

$$\Delta S_n \approx J^b \cdot \Delta p \quad (23)$$

式中 $\Delta p = [\Delta \theta_1, \dots, \Delta \theta_n, \Delta s_1, \dots, \Delta s_n, \Delta a_1, \dots, \Delta a_n, \Delta h_1, \dots, \Delta h_n]^T$

从式 (23) 即可确定由于公差 Δp 引起的手部位置误差。当然，这样确定的手部误差是趋于保守的。要比较精确地确定手部误差，还须考虑杆件参数偏差在公差带中的分布情况。这里不再讨论。至于由运动副间隙引起的手部误差，由于“间隙矢量”是一较复杂的量，并且与负载有关，一般都是将其折算到公差中来考虑，不另外分开计算[10]。

动态误差分析

1. 工业机器人的力分析

根据高斯定理,对于机械系统中第*i*个刚体,真实运动的加速度要使其约束量*Z*,为最小。引用文[8]的推导,得

$$\min Z_i = \min \left\{ \text{tr} \left[\frac{1}{2} \ddot{T}_i^T H_i \ddot{T}_i - \Phi_i \ddot{T}_i \right] \right\} \quad (24)$$

式中*H_i*称为刚体的惯性矩阵,它包括刚体所有惯性特性, $H_i = \sum_V m_V^i (\rho_V^i)^T$, 即

$$H_i = \begin{pmatrix} I_{xx}^i & I_{xy}^i & I_{xz}^i & S_x^i \\ I_{yx}^i & I_{yy}^i & I_{yz}^i & S_y^i \\ I_{zx}^i & I_{zy}^i & I_{zz}^i & S_z^i \\ S_x^i & S_y^i & S_z^i & m_i \end{pmatrix} \quad (25)$$

$I_{xx}^i = \sum_V m_V^i (\rho_{V1}^i)^2$, 等等; 为对坐标平面的转动惯量;

$I_{xy}^i = I_{yx}^i = \sum_V m_V^i \rho_{V1}^i \rho_{V2}^i$, 等等; 为离心转动惯量;

$S_x^i = \sum_V m_V^i \rho_{V1}^i$, 等等; 为静矩;

$m_i = \sum_V m_V^i$, 为刚体的质量;

又 Φ_i 称为主动力矩阵,它包括主动力所有特性, $\Phi_i = \sum_V F_V^i (\rho_V^i)^T$, 即

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \sum_V F_{V1}^i \rho_{V1}^i & \sum_V F_{V1}^i \rho_{V2}^i & \sum_V F_{V1}^i \rho_{V3}^i & \sum_V F_{V1}^i \\ \sum_V F_{V2}^i \rho_{V1}^i & \sum_V F_{V2}^i \rho_{V2}^i & \sum_V F_{V2}^i \rho_{V3}^i & \sum_V F_{V2}^i \\ \sum_V F_{V3}^i \rho_{V1}^i & \sum_V F_{V3}^i \rho_{V2}^i & \sum_V F_{V3}^i \rho_{V3}^i & \sum_V F_{V3}^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

若构件上只作用重力, 则

$$\Phi_i = m_i g \rho_i^T = m_i [g_1, g_2, g_3, 0]^T [\rho_{1i}, \rho_{2i}, \rho_{3i}, 1]$$

为了写出矩阵 \ddot{T}_i , 设 $\dot{T}_i = \dot{T}_i(x_i)$ 而 $\dot{x}_i = [\dot{x}_{1i}, \dots, \dot{x}_{6i}]^T$, 于是仿式(13)可得

$$\dot{T}_i = T_i \sum_{k=1}^6 \Theta_k \dot{x}_{ki} \quad (27)$$

将该式对时间求导, 不难写出

$$\ddot{T}_i = T_i \sum_{k=1}^6 \Theta_k \ddot{x}_{ki} + \dot{T}_i T_i^{-1} + \dot{T}_i \quad (28)$$

将式 (24) 写成下列形式

$$\text{tr}\left[(\ddot{T}_i, H_i - \Theta_i) \frac{\partial T_i^T}{\partial \ddot{x}_{ki}}\right] = 0 \quad k=1, 2, \dots, 6$$

利用式 (28) 可进一步写出

$$\text{tr}[(\ddot{T}_i, H_i - \Phi_i) \Theta_i^T T_i^T] = 0 \quad k=1, 2, \dots, 6 \quad (29)$$

为了说明该式的物理意义, 将作用于第 i 个刚体上的所有力向相连坐标系原点简化。设主矩和主矢在相连坐标系上的投影为 $P_i = [P_{1i}, P_{2i}, \dots, P_{6i}]^T$, P_{1i} 、 P_{2i} 、 P_{3i} 为主矩的投影, P_{4i} 、 P_{5i} 、 P_{6i} 为主矢的投影, 则

$$P_{ki} = \text{tr}[\Phi_i \Theta_i^T T_i^T]^* \quad k=1, \dots, 6 \quad (30)$$

因此, 式 (29) 中 $\text{tr}[\Phi_i \Theta_i^T T_i^T]$ 为主动动力 (矩) 的各分量, $\text{tr}[-\ddot{T}_i, H_i, \Theta_i^T T_i^T]$ 为惯性力 (矩) 的各分量。

以下用虚功原理作机器人的静力 (矩) 分析。

设机器人系统的虚功为 δA

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \text{tr}[\sum_{\nu} F_i^\nu (\delta r_i^\nu)^T] = \sum_{i=1}^n \text{tr}[\Phi_i \delta T_i^T] \quad (31)$$

式中

$$\Phi_i = \sum_{\nu} F_i^\nu (\rho_i^\nu)^T, \quad r_i^\nu = T_i \rho_i^\nu$$

另外据式 (8) 可得如下约束方程

$$\delta T_i - \delta T_{i-1} M_i - N_i \delta q_i = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (32)$$

引进 4×4 λ_i 矩阵 (拉格朗日乘子), 将 λ_i 与式 (32) 相乘, 然后加到式 (31) 中去, 得

$$\begin{aligned} \delta A^* &= \sum_{i=1}^n \text{tr}[\Phi_i \delta T_i^T - \lambda_i (\delta T_i - \delta T_{i-1} M_i - N_i \delta q_i)^T] \\ &= \text{tr} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\Phi_i - \lambda_i + \lambda_{i+1} M_{i+1}^T) \delta T_i^T + (\Phi_n - \lambda_n) \delta T_n^T \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n (\lambda_i N_i^T) \delta q_i \right] \end{aligned} \quad (33)$$

若约束方程 (32) 成立, 则对于任意的 λ_i , $\delta A^* = \delta A$ 。我们根据下列条件来选 λ_i ,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_{i+1} M_{i+1}^T + \Phi_i \quad i=1, \dots, n-1 \\ \lambda_n &= \Phi_n \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

则

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \text{tr}[\lambda_i N_i^T] \delta q_i \quad (35)$$

* 因为 $\Theta_i^T T_i^T = \Theta_i^T T_i^{-1}$, 故 $\text{tr}[\Phi_i \Theta_i^T T_i^T] = \text{tr}[\Phi_i \Theta_i^T T_i^{-1}] = \text{tr}[T_i^{-1} \Phi_i \Theta_i^T]$, T_i^{-1} 左乘 Φ_i , 使 Φ_i 中的 F_i 转换到第 i 坐标系。

式 (34) 称为伴随方程, 它反映静力从未杆向基座传递的情况, λ_i 为约束力 (矩) 矩阵

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \delta q_i \quad (36)$$

式中 \tilde{Q}_i 为对应于 q_i 的广义力。比较式 (35)、(36)

$$\text{得} \quad \tilde{Q}_i = \text{tr}[\lambda_i N_i^T] = \text{tr}[\lambda_i M_i^T \Theta^T T_{i-1}^T] = \text{tr}[T_{i-1} \Theta M_i \lambda_i^T] \quad (37)$$

在式 (37) 中, λ_i^T 表示在第 $i, i+1, \dots, n$ 各杆上的所有外力对第 $(i-1)$ 杆 (坐标系) 的作用 (约束力), 乘以 M_i 转到第 $(i-1)$ 坐标系, 乘以 $T_{i-1} \Theta$ 取 z_{i-1} 轴上投影。但是一般坐标系原点并不都在运动副中心。下面我们通过辅助矩阵 $M_{a,i}, M_{b,i}$ 的坐标变换, 使杆件取得合适的坐标系。

$$M_{a,i} = \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{b,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & h_i \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{a,i}$ 表示坐标系 x_{i-1}, y_{i-1} 与 x_i, y_i, z_i 的变换, $M_{b,i}$ 表示坐标系 x_i, y_i, z_i 与 x_i, y_i, z_i 的变换 (见图 1、图 3)。因此应将式 (37) 改写为

$$\tilde{Q}_i = \text{tr}[\lambda_i M_{b,i}^T \Theta^T M_{a,i}^T T_{i-1}^T] \quad (38)$$

式中 \tilde{Q}_i 为广义力 (对于 x_i, y_i, z_i 坐标系) 同理可求得运动副反力 $R_k^{(i-1)}$ 的各分量为

$$R_k^{(i-1)} = \text{tr}[\lambda_i M_{b,i}^T \Theta^T M_{a,i}^T T_{i-1}^T], \quad k=1, \dots, 6 \quad (39)$$

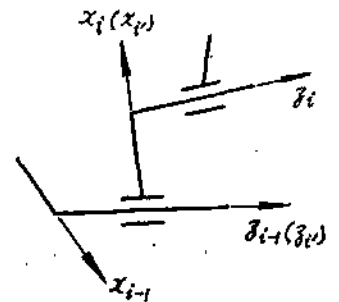


图 3

以上为静力分析。若考虑动力学情况, 应将式 (34) 加上惯性力 (矩) 项 $(-\ddot{T}_i H_i)$, 即

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_{i+1} M_{i+1}^T + \phi_i - \ddot{T}_i H_i, \quad i=1, \dots, n-1 \\ \lambda_n &= \phi_n - \ddot{T}_n H_n \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

广义力和运动副反力仍按 (38)、(39) 计算, 但 λ_i 须用式 (40) 的值。而驱动力 (矩) Q_i 为

$$Q_i = -\tilde{Q}_i \quad (41)$$

2. 用动态静力学法求由杆件变形引起的误差

我们将每一杆件看作在坐标原点处固定的悬臂梁。依式 (39)、(40) 可以得到作用在第 i 杆件上的约束力 (矩) P_i^c 、主动力 (矩) P_i 和惯性力 (矩) P_i^i 的各分量如下 (已向坐标原点简化):

$$P_{k_i} = tr[\lambda_{i+1} M_{i+1}^T M_{i+1}^T, \Theta_i^T M_{i+1}^T T_{i+1}^T], P_{k_n} = 0 \quad (42)$$

$$P_{k_i} = tr[\Phi_i M_{i+1}^T, \Theta_i^T M_{i+1}^T T_{i+1}^T] \quad (43)$$

$$P_{k_i} = tr[-\ddot{T}_i H_i M_{i+1}^T, \Theta_i^T M_{i+1}^T T_{i+1}^T] \quad (44)$$

$$i=1, \dots, n; k=1, \dots, 6$$

以上 P_i 和 P_i 的作用点都是确定的，但惯性力（矩）的作用点并不在简化中心，所以还须确定惯性力系的等效力系。设

$$P_i^* = [P_{1i}^*, P_{2i}^*, P_{3i}^*, P_{4i}^*, P_{5i}^*, P_{6i}^*]^T = [(K_i^*)^T; (F_i^*)^T]^T \quad (45)$$

因此，惯性力系的等效力系的主矢就是 F_i^* ，而力偶矩 W_i^* ，作用点矢量 \vec{e}_i 如下：

$$\vec{W}_i^* = \frac{\vec{K}_i^* \cdot \vec{F}_i^* \cdot \vec{F}_i^*}{|\vec{F}_i^*|^2} \quad (46)$$

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{F}_i^* \times \vec{K}_i^*}{|\vec{F}_i^*|^2} \quad (47)$$

考虑每个杆件坐标系原点处的变形，该变形可用转动矢量 $\Delta \varphi_i$ 和移动矢量 $\Delta \rho_i$ 表示，故第 i 个杆件的变形可写为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{\varphi}_{1i} &= \mu_{1i}^* P_{1i} + \mu_{2i}^* P_{2i} + \mu_{3i}^* P_{3i} \\ \Delta \tilde{\varphi}_{2i} &= \mu_{4i}^* P_{4i} + \mu_{5i}^* P_{5i} + \mu_{6i}^* P_{6i} \\ \Delta \tilde{\varphi}_{3i} &= \mu_{7i}^* P_{7i} + \mu_{8i}^* P_{8i} + \mu_{9i}^* P_{9i} \\ \Delta \tilde{\rho}_{1i} &= \mu_{10i}^* P_{10i} + \mu_{11i}^* P_{11i} + \mu_{12i}^* P_{12i} \\ \Delta \tilde{\rho}_{2i} &= \mu_{13i}^* P_{13i} + \mu_{14i}^* P_{14i} + \mu_{15i}^* P_{15i} + \mu_{16i}^* P_{16i} + \mu_{17i}^* P_{17i} \\ \Delta \tilde{\rho}_{3i} &= \mu_{18i}^* P_{18i} + \mu_{19i}^* P_{19i} + \mu_{20i}^* P_{20i} + \mu_{21i}^* P_{21i} + \mu_{22i}^* P_{22i} + \mu_{23i}^* P_{23i} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

式中 $\mu_{1i}^*, \dots, \mu_{23i}^*$ 为影响系数，它与杆件的截面形状、材料弹性特性、力（矩）的作用点等有关，可以根据材料力学有关的公式计算。当然，量 $\Delta \varphi_{1i}, \dots, \Delta \rho_{3i}$ 等是在第 i' 坐标系中计量的，我们应该将它转到第 n 坐标系，然后迭加起来：

$$\begin{pmatrix} \Delta \varphi_{1n}^i \\ \Delta \varphi_{2n}^i \\ \Delta \varphi_{3n}^i \end{pmatrix} = \tilde{C}_n^{-1} \dots \tilde{C}_{i+1}^{-1} \tilde{C}_{6i}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{\varphi}_{1i} \\ \Delta \tilde{\varphi}_{2i} \\ \Delta \tilde{\varphi}_{3i} \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \rho_{1n}^i \\ \Delta \rho_{2n}^i \\ \Delta \rho_{3n}^i \end{pmatrix} = \tilde{C}_n^{-1} \dots \tilde{C}_{i+1}^{-1} \tilde{C}_{6i}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{\rho}_{1i} \\ \Delta \tilde{\rho}_{2i} \\ \Delta \tilde{\rho}_{3i} \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, n \quad (50)$$

式中 C_i 等为式 (1) 所示矩阵的左上角 3×3 部分。

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= [\Delta\varphi_{1n}, \Delta\varphi_{2n}, \Delta\varphi_{3n}, \Delta\rho_{1n}, \Delta\rho_{2n}, \Delta\rho_{3n}]^T \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \Delta\varphi_{i1}, \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_{i2}, \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_{i3}, \sum_{i=1}^n \Delta\rho_{i1}, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^n \Delta\rho_{i2}, \sum_{i=1}^n \Delta\rho_{i3} \right]^T \end{aligned} \quad (51)$$

据式 (51) 和 (16) 可以确定消除动态误差 ΔS_n 的广义坐标调整量 Δq ，通过调整 Δq 消除手部动态误差，使系统达到“电刚性”。

例：

图 4 所示的五自由度机械手 [9]，其几何参数为 (单位：米)： $s_1=1.1$ ， $h_2=0.142$ ， $s_3'=0.6$ ， $h_5=0.26$ 。（ $s_3=s_3'+s_3''$ ）。

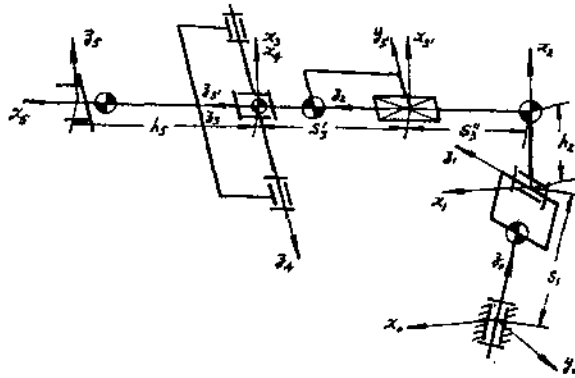


图 4

其惯性参数如下：

杆号	质量(kg)	质心位置(m)			转动惯量(kgm ²)		
		x ⁰	y ⁰	z ⁰	I _{xx}	I _{yy}	I _{zz}
1	61.46	0	-0.8	0	0.15	0.1	0.172
2	27.8	0	0	0	1.5	1.8	1.7
3	18.72	0	0	-0.4	1.3	1.2	1.1
4	5.33	0	0	0	0.007	0.009	0.004
5	6.5+5	-0.1	0	0	0.01	0.01	0.014

离心惯量均为零；静矩 S_x 等可据式 $S_x = mx^0$ 等来计算。

工作任务：机械手夹持 5kg 工件（已计算在杆 5 的质量内）从 A 点至 B 点，坐标系 x_s, y_s, z_s 的原点沿 AB 直线， z_s 轴方位不变， x_s 轴转角 φ 变化范围为 $0^\circ \sim 45^\circ$ ，整个过程在 1 秒钟完成（图 5）。实际上， $\varphi = \theta_1$ 。我们选取 θ_1 的规律如图 6 所示。

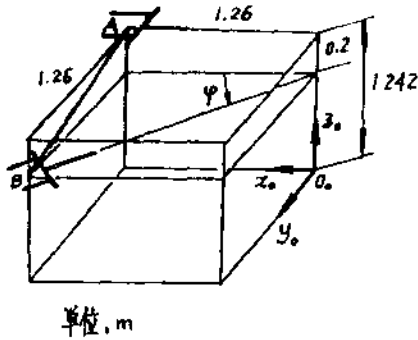


图5 (单位: m)

该机械手的位移分析见文献[9]。图7示出了加速度曲线。在这特定工作任务中, $\ddot{\theta}_1 = 0$, $\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_3$ 。从图7可以看出, 加速度在0.5秒处有突变。这是由于所选的速度规律的加速度在0.5秒处有突变。根据式(38)计算(λ_i 用式(40)计算)得到的广义力曲线如图8所示。广义力在0.5秒处也有跳变。

在力分析的基础上用式(48)——(51)计算了由变形引起的手部动态误差。考虑到杆3(活塞杆)的刚度较差, 所以主要计算了杆3的变形, 其他杆件的变形略去不计。在计算过程中, 考虑到主矢和主矩的作用已分开, 主矢只起剪切、拉伸作用, 所产生的线应变很小, 故主矢的作用全部略去。重力和惯性力是分布力, 为简单起见, 近似认为它们是作用于质心的集中力。

弹性模量 E 取 $2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, 杆3的外径 D 为 0.05 m , 内径 d 为 0.03 m 。图9示出了手部绕 z_0 轴的转角误差 $\Delta \phi_{30}^{\theta}$ 曲线和沿 z_0 轴方向的位移误差 $\Delta \rho_{30}^{\theta}$ 曲线。从图中可以看到, 在0.5秒处两曲线都有跳变, $\Delta \phi_{30}^{\theta}$ 跳动的幅度较大, $\Delta \rho_{30}^{\theta}$ 跳动

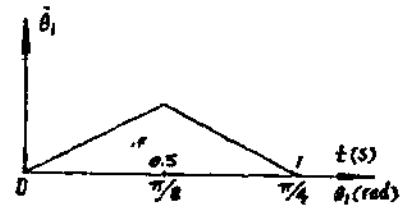


图6

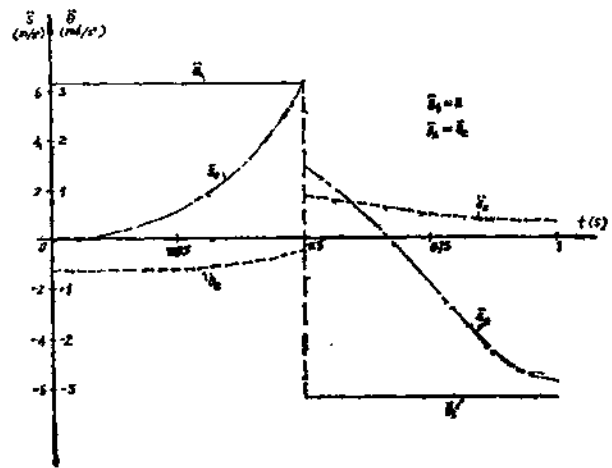


图7

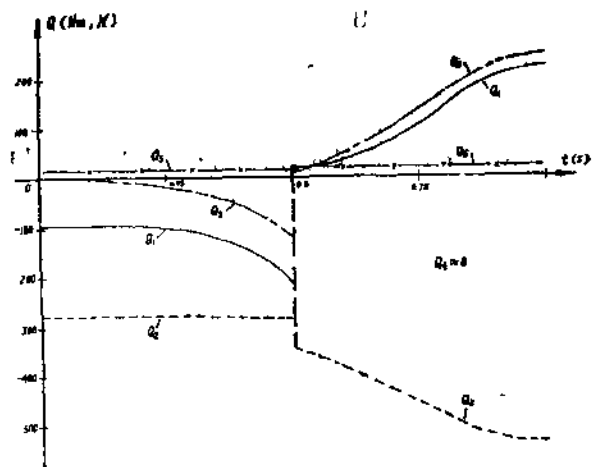


图8

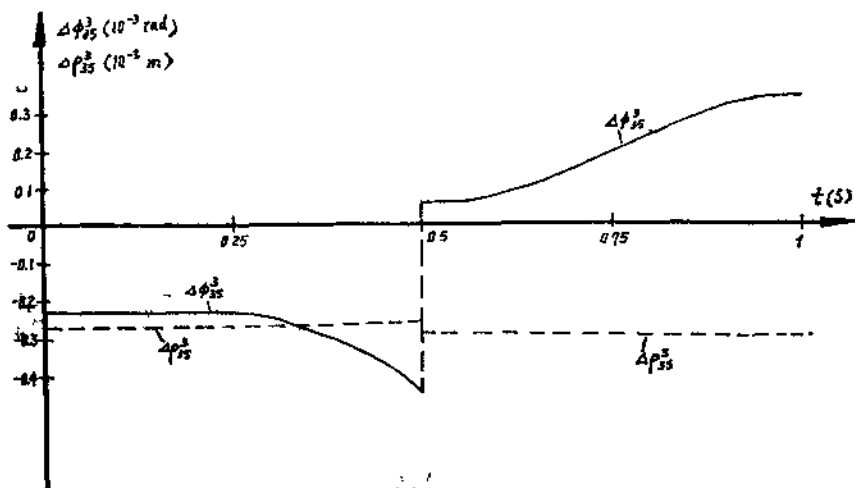


图 9

的幅度较小。 $\Delta\rho_{35}^i$ 的最大值发生在1秒处,为 $-0.3mm$,没有超过规定值(一般规定值为 $1mm$)。若计算结果超过规定值,说明活塞杆刚度不够,应重新选择 D 、 d 值进行计算。

感谢:本文例子的计算得到吴瑞祥老师许多帮助,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Kinzel G.L. etal I. Mech. E. 1975 p.185—191.
- [2] Овацков А.Г. Машинноеведение 2 (1972), p.37—39.
- [3] Dubowsky, S. etal J. of Eng. Ind. 1977, p.88—96.
- [4] Vukobratovic M. etal Dynamics of Manipulation Robots, Springer-Verlag, 1982.
- [5] Черноусько ф.л. Тех. Киб. 5(1981).
- [6] Truckenbrodt A. Proc. of 5-th World Cong. on TMM, 1979.
- [7] Book W.J. J. of Dyn. Sys. Mea. Contr. 101, (1979).
- [8] Домов П.Е. и Др. Манипуляционные роботы, М. «Изяука» 1978.
- [9] 张启先:《空间机构的分析与综合》上册,机械工业出版社,1984.
- [10] 仇时雨,金芝英,张启先:北京航空学院学报, 2 (1983)。

ERROR ANALYSES OF THE INDUSTRIAL ROBOTS

Chen Mingzhe Zhang Qixian

ABSTRACT

This paper is concerned with the problems about analyses of the kinematic errors and the dynamical errors in industrial robots. A procedure for determining the kinematic errors arising from the tolerances of linkage parameters is presented. The dynamical errors due to the deformations of links are calculated by the kineto-static method and an example illustrating the above procedure is provided.