
李儼著

中算史論叢
(三)

序

民國十七年曾將中算史論文之發表於各雜誌者輯成中算史論叢第一冊，其後續輯得二、三兩冊，交商務印書館排印，民國二十一年一月二十九日該館被焚，全稿盡失，事後多方搜求，始將各文之散在各雜誌者，收集完全，再重加修正，今幸告成，第三冊所收者，計有下列各篇：

九章算術補註（北平北海圖書館月刊），第二卷第二號，十八年二月，第一二七至一三三頁）；孫子算經補註（國立北平圖書館館刊第四卷第四號，十九年七、八月，第一三至二九頁）；籌算制度考（燕京學報第六期，十八年十二月，第一一二九至一一三四頁）；珠算制度考（燕京學報第十期，二十年十二月，第二一二三至二一三八頁）；中算家之縱橫圖（Magic Squares）研究（學藝雜誌第八卷第九號，十六年九月，第一至四〇頁）；中算家之Pascal三角形研究（學藝雜誌第九卷第九號，十八年十月，第一一至一五頁）；中算家之

方程論 (科學雜誌第十五卷第一期,十九年十一月,第七至四四頁);中算家之級數論 (科學雜誌第十三卷,第九期,第十期,十八年四月,五月,第一一三九至一一七二頁,第一三四九至一四〇一頁);三角術及三角函數表之東來 (科學雜誌第十二卷第十期,十六年九月,第一三四五至一三九三頁).

中華民國二十三年二月二十五日

李儼記於西安

目次

1. 九章算術補註1
2. 孫子算經補註 11
3. 籌算制度考.....29
4. 珠算制度考.....37
5. 中算家之縱橫圖 (Magic Squares)研究59
6. 中算家之Pascal 三角形研究111
7. 中算家之方程論.....127
8. 中算家之級數論.....197
9. 三角術及三角函數表之東來 323

九章算術補註

九章第一

幾何 春秋左氏僖公二十七年傳：「楚蔣賈曰：靖諸內而敗諸外，所獲幾何？」

畝法 廣韻卷第三：「畝，司馬法，六尺爲步，步百爲畝，秦孝公之制，二百四十步爲畝也。」鹽鐵論：「古者制田百步爲畝，先帝哀憐百姓之愁苦，衣食不足，制田二百四十步而一畝。」

頃 廣韻卷第三：「頃，四百畝也。」公羊宣十五年傳注：「一夫一婦，受田百畝，公田十畝，廬舍二畝半，凡爲田一頃十二畝半。」

里 鄒伯奇補小爾雅釋度量衡三篇：「周制三百步爲里。」穀梁宣十五年傳古者三百步爲里。家語王言周制三百步爲里。」

宛田 清羅士琳算學啓蒙後記：「至於是（算學啓蒙）書畹田之畹，并見（四元玉鑑），或疑字書所無，按劉徽所注之九章，本亦作畹。李籍音義謂當作宛，字之誤

也。蓋取爾雅宛中宛邱注中央隆高之義，今則從李所改，楊輝算法作皖，考說文皖下注，田三十畝也，與中央隆高義迥別。夏侯陽算經九田注，形如覆半彈丸，術曰：徑乘周四而一，與此合。九皖音近，皖皖形近似，皖雖不見於字書，殆如明邢雲路古今律歷考纂積之纂作罪，同爲算書習用字。」

九 章 第 二

糲米 說文：「糲，粟重一石，爲十六斗大半斗，舂爲米一斛曰糲。」儼按粟比糲如十六又三分之二比十，故粟率五十而糲率三十。

稗米 說文：「稗，穀也。」又：「穀，糲米一斛，舂爲九斗也。」儼按粟率五十而糲率三十，今糲米一斛，舂爲（稗）九斗，故粟率五十而稗率二十七。

粳米 說文：「粳，糲米一斛爲八斗曰粳。」儼按此言粟率五十而粳率二十四。

御米 詩大雅：「彼疏斯稗。」鄭康成箋：「米之率，糲十，稗九，粳八，侍御七。」

太半 史記項羽本紀：「漢有天下太半。」章昭曰：凡數三分有二爲太半，一爲少半。淮南子覽冥訓：「斬艾百姓，殫盡太半。」達占按：凡數三分有二爲太半，有一爲

少半，韋昭說也。」前漢書食貨志：「收秦半之賦。」師古曰：「秦半三分取二。」

甌甃 前漢書尹賞傳：「穿地方深各數丈，致令辟爲郭。」師古曰：「令辟，甌甃也。」廣韻卷三：「甃；甌甃，甌甃。」

錢 說文貝下云：「至秦廢貝行錢。」史記秦始皇本紀：「（秦）惠文王生十九年而立，立二年初行錢。」

縑 釋名釋綵帛：「縑，兼也，其絲細縑，數兼於布絹也。」廣韻卷二：「縑，絹也，說文曰，并絲縑也。」

匹 漢書食貨志下：「布帛廣二尺二寸爲幅，長四丈爲匹。」

銖 兩 斤 鈞 石 漢書律歷志：「權者，銖兩斤鈞石也，所以稱物平知輕重也，本起於黃鐘之重，一龠容千二百黍，重十二銖，兩之爲兩，二十四銖爲兩，十六兩爲斤，三十斤爲鈞，四鈞爲石。」史記秦始皇本紀：「至以衡石量書。」集解：「石百二十斤。」廣韻卷一：「斤，十六兩也，鈞，三十斤也。」

𦏧 廣韻卷二：「𦏧，說文曰：羽本也。」方言第十三：「𦏧，本也。」〔今以鳥羽本爲𦏧音候。〕

矢幹 釋名釋兵：「矢，指也。……其體曰幹，言挺幹。」

也。」

九 章 第 三

衰分 淮南子說林訓「大小之衰然」高注「衰，差也。」唐陸德明經典釋文卷第十八春秋左氏音義之四以衰注「差，降也。」

大夫 不更 簪褭 上造 公士 史記秦本紀集解引漢書曰：「商君爲法於秦，戰斬一首，賜爵一級，從爲官者五十石，其爵名一爲公士，二上造，三簪褭，四不更，五大夫，……二十徹侯。」前漢書百官公卿表上：「稱爵一級曰公士」師古曰：「言有爵命異於士卒，故稱公士也，」二上造，「師古曰：造，成也，言有成命於上也，」三簪褭，「師古曰：以組帶馬曰褭，簪褭者言飾此馬也，褭音乃了反，」四不更，「師古曰：言不豫更卒之事也，更音工衡反，」五大夫，師古曰：「列位從大夫，」…二十徹侯，皆秦制。」續漢書百官志稱：「關內侯，承秦賜爵，十九等爲關內侯。」梁劉昭注補引：「劉劭爵制曰：一爵曰公士者，步卒之有爵爲公士者，二爵曰上造，造成也，古者成士升於司徒曰造士，雖依此名，皆步卒也，三爵曰簪褭，御驕馬者，要褭古之名馬也，駕驕馬者，其形似簪，故曰簪褭也，四爵曰不更，不更者，爲車右，不復與凡更卒同也，五爵曰

大夫，大夫者，在車左者也。」

持錢 前漢書高祖紀上：「賀錢萬，實不持一錢。」

算 漢儀注曰：「人年十五至五十六，出賦錢一百二十爲一算，又七歲至十四出口錢二十以供天子，至武帝時，又口加三錢，以補車騎馬。」儼按論衡謝短篇曰：「七歲頭錢二十三。」又說文：「漢律民不繇，貨錢二十三，」并口錢也。

徭 前漢書高祖紀上：「高祖常繇咸陽。」應劭曰：繇者，役也，……，繇讀曰徭，古通用字。」

素 禮記鄭注：「素，生帛也。」釋名釋絲帛：「素，朴素也，已織則供用，不復加巧飾也。」

保 史記樂布傳：「窮困，貨傭於齊，爲酒家保。」注：「酒家保，保傭也。」

九章第四

又有積三十九億七千二百一十五萬。儼按此言億爲萬萬也。

九章第五

商功 前漢書二十四上食貨志稱耿壽昌以善爲算，能商功利，又稱（耿）壽昌習於商功分錄之事。前漢書二十九溝洫志稱（許）商（乘馬）延年，皆明計算，能

商功利。

穿地 說文：「穿，地也。」段注引召南曰：「誰謂鼠無牙，何以穿我墉。」說文又稱：「窵，穿地也。」周禮小宗伯注：「南陽名穿地爲窵。」前漢書尹賞傳：「穿地方深各數丈。」史記秦始皇本紀：「始皇初卽位，穿治鄠山。」

壤 說文：「壤，柔土也。」

城 崔豹古今注上：「城者盛也，所以盛受人物也。」

隄 爾雅：「築土遏水曰隄。」

溝 考工記：「廣四尺深四尺，謂之溝。」

澮 廣韻卷第四：「澮，阮也，遶城水也。」

徒 爾雅河曲下，徒駭條，李巡云：「徒駭者，禹疏九河，以徒衆起，故曰徒駭。」又太史條，李巡云：「太史者，禹大使徒衆，通其水道，故曰太史。」史記秦始皇本紀：「始皇初卽位，穿治鄠山，及并天下，天下徒送詣七十餘萬人。」又孝景本紀：「孝景……七年……春免徒隸作陽陵者。」又平準書：「人徒之費，擬於南夷。」

塼墻 廣韻卷第三：「塼，塼障，小城，墻，高土。」

棚 廣韻卷第二：「棚，棚闌。」

脚闕 廣韻：「脚闕，行不進貌。」

九章第六

均輸 史記秦始皇本紀：「調郡縣，轉輸菽粟芻橐。」史記平準書或前漢書食貨志稱：「桑弘羊爲大司農丞，管諸會計事，稍稍置均輸，以通貨物矣。……元封元年，（公元前一一〇年）桑弘羊爲治粟都尉，領大農，盡代僦筦天下鹽鐵，弘羊以諸官各自市，相與爭，物故騰躍，而天下賦輸或不償其蹴費，乃請置大農部丞數十人，分部主郡國，各往往縣置均輸鹽鐵官。」孟康注曰：「（均輸者），謂諸當所輸於官者，皆令輸其土地所饒，平其所在時價，官更於他處賣之，輸者旣便，而官有利。」漢書百官表屬官有均輸令，梁劉昭注漢志并引鹽鐵論之說，以明均輸之制。

塞 崔豹古今注上：「塞者，塞也，所以擁塞戎狄也。」又稱：「紫塞，秦築長城，土色皆紫，漢塞亦然，故稱紫塞也。」

僦一里一錢 前漢書酷吏傳：「初大司農取民車三萬兩爲僦，……車直千錢。」注服虔曰：「雇載曰僦，言所輸物不足，償其雇載之費也。」顏師古曰：「僦，顧也，言所輸賦物不足償其餘顧庸之費也。」

傭價一日一錢 史記陳涉世家：「嘗爲人傭耕。」
儼按前言傭一里一錢，此言傭一日一錢；則傭傭同爲
 雇傭之費，傭以一里計，傭以一日計也。

太倉 史記平準書：「至今上卽位，……太倉之
 粟，陳陳相因。」

上林 史記秦始皇本紀：「諸廟及章臺、上林，皆
 在渭南。」史記孝武本紀：「是時上求神君，舍之上林
 驪氏觀。」

問金一斤值錢幾何 答曰：六千二百五十。 前
漢書張良傳註：「秦以鎰名金，若漢之論斤。」史記平
準書：「又造銀錫爲白金，……故白金三品，其一日重八
 兩，圓之，其文龍，名曰白選，直三千，……而吏民之盜鑄
 白金者，不可勝數。」儼按此處所指之金，蓋指白金。九
章算術言金一斤，值錢六千二百五十，史記言白金八
 兩直三千，卽一斤直六千兩者相類，而吏民之盜鑄白
 金者，不可勝數，故值亦不一。

牡瓦 牝瓦 廣韻卷一「茂，屋牡瓦名。」又卷一
 「甌，牡瓦。」集韻：「甌，甌也。」玉篇：「甌，牡瓦也。」廣雅作
 甌。集韻：「甌，甌，小牡瓦也。」玉篇廣韻稱：「甌，牝瓦也。」
三國志：「魏文帝夢兩瓦落地爲鴛鴦。」李商隱詩：「秦

樓鴛瓦漢宮盤。」白居易詩鴛鴦瓦冷霜華重。」

九章第七

璊 說文：璊，石之似玉者。」

醇酒 行酒 史記曹參世家「日夜飲醇酒」，說文：醇，不澆酒也。酴，泛齊行酒也。段注曰：「泛齊見周禮，一行酒未聞，疑是貨物行敵之行，謂行用之酒也。」儼按行酒實對醇酒而言。

九章第八

九章第九

孫子算經補註

孫子算經序

「孫子曰：夫算者天地之經緯，羣生之元用，……」

微波樹 孔刻算經十書本作「羣生之元用，」汲古閣 毛氏景宋本作「羣生之元首，」毛景本今藏北平故宮博物院圖書館，即天祿琳瑯書目中御題算經十冊之一。至古今之說述孫子者，彙舉如左：

- (1) 夏侯陽 算經序曰：「五曹，孫子，述作滋多，」
- (2) 張丘建 算經序曰：「夏侯陽之方倉，孫子之蒲杯，此等之術，皆未得其妙。」
- (3) 隋書卷三十四，經籍志作「孫子算經二卷，」又律歷志作「孫子算術。」
- (4) 唐慧琳 一切經音義作「孫子算經，及孫子九章算經。」
- (5) 舊唐書卷四十四職官三第二十四，及新唐書卷四十八，志第三十八百官志，並稱「學生三十人，習九章，海島，孫子，五曹，張丘建，夏侯陽，周髀，十五人，」
- (6) 舊唐書卷七十九，列傳第二十九，李淳風，及新唐書卷二〇四，列傳第一二九，方技，李淳風，並稱「先是太史監侯王思辯表稱：五曹，孫子十部算經，理多踳駁，淳風復與國子監算學博士梁述，太子監王真儒等，受詔注五曹，孫子十部算經，書成，高祖。國學行用。」
- (7) 新唐書卷四四，志第三四，選舉志，稱「孫子，五曹共一歲。……試海島，孫子，五曹，張丘建，夏侯陽，周髀，五經算，各一條。」

- (8) 新唐書卷五九：藝文志第四九：「李淳風注五曹，孫子算經二十卷，注數經，孫子算經三卷。」
- (9) 日本寬平時代(881—897)藤原佐世本持撰日本見在書目內有孫子算經三卷，蓋日本自文化二年(696)大改新以來，經大寶(701—703)，養老(717—733)，文物制度已經大備，令義解之學令中，明記算經之名，中有孫子形，其試驗方法及修業方式，並如唐制。
- (10) 李籍九章算術音義作孫子算術。」
- (11) 太平御覽引作孫子算經。」
- (12) 宋史卷二〇七，藝文志第一六〇藝文六經李淳風注釋孫子算經三卷。」
- (13) 續一切經音義卷二，稱「劉洪，九章，孫子，五曹，皆計數術也。」
- (14) 明程大位算法統宗卷十二，「算經源流」條，稱：宋元豐七年，(1084)刊卜式入祕書省，又刻於汀州學校：
黃帝九章，周髀算經，五經算法，海島算經，孫子算法，張丘建算法，五曹算法，緹古算法，夏侯陽算法，算術拾遺。
- (15) 清康熙甲子(1684)毛辰(1690—?)作算經數稱「從太倉王氏(世貞家)得孫子，五曹，張丘建，夏侯陽，四種，……皆元豐七年，(1084)祕書省刊版。」
- (16) 孔繼涵算經十書序，稱今得毛氏汲古閣所藏宋元豐京監本七種，又假戴東原先生所輯永樂大典中海島算，五經算，十書篇，又孔刻算經十書本孫子算經卷下後有「大清乾隆三十八年癸巳(1773)秋關里孔氏依汲古閣影宋刻本重雕」一行。
- (17) 段玉裁戴東原先生年譜：「乾隆三十九年(1774)十月三十日戴氏與段氏書稱纂次永樂大典內散篇，得九章，海島，孫子，五曹，夏侯陽，五種算經。」
- (18) 四庫全書總目卷一〇七，子部十七，天文算法類，有：「孫子算經二卷(永樂大典本。)」

案隋書經籍志有孫子算經二卷，不著其名，亦不著其時代。唐書藝文志稱李淳風註甄鸞孫子算經三卷，於孫子上冠以甄鸞，蓋如淳風之註周髀算經，因甄所註，更加辨論也。隋書論審度，引孫子算術，蓋所生吐絲爲忽，十忽爲秒，十秒爲釐，十釐爲毫，十毫爲分。本書乃作十忽爲一絲，十絲爲一毫。又論度量引孫子算術六粟爲圭，十圭爲秒，十秒爲撮，十撮爲勺，十勺爲合。本書乃作十圭爲一撮，十撮爲一秒，十秒爲一勺。考之夏侯陽算經引田曹倉曹亦如本書。而隋書中所引與史傳往往多合。蓋古書傳本不一，校訂之儒，各有據證，無妨參差互見也。唐之選舉，算學孫子，五曹共限一歲習肄，於後來諸算術中，特爲近古。第不知孫子何許人。朱彝尊曝書亭集：五曹算經跋云：相傳其法出於孫武，然孫子別有算經，考古者存其說可解。又有孫子算經跋云：首言度量所起，合乎兵法。地生度，度生量，量生數之文，次言乘除之法，設爲之數。十三篇中所云廊地、分利、委積、遠輸、費賤、兵役、分數，比之九章方田、粟米、差分、商功、均輸，說不足之目，往往相符，而要在得算多，多算勝，以是知此編非僞托也。云云。合二跋觀之，彝尊之意，蓋以爲確出於孫武。今考書內設問有云長安洛陽相去九百里，又云佛書二十九章，準六十三字，則後漢明帝以後人語。春秋末人，安有是語乎？舊本久佚，今從永樂大典所載，自集編次，仍爲三卷，其甄、李二家之註，則不可復考，是則姚廣孝等割裂刊削之過矣。

(19) 阮元 疇人傳 (1795—1799) 卷一末，孫子傳引：

孫子算經。

〔論曰 朱竹垞〔辨證〕以孫子算經爲孫武作。戰東原〔雲〕以書中有長安洛陽相去，及佛書二十九章語，斷爲漢明帝以後人。余考章懷太子〔枯菴〕三百注引邯鄲 淳風 經謂葦局十七道，而孫子乃云葦局十