概率论与数理统计习题解答

朱显海　周彦军　仲崇骥　王铭文 编

东北师范大学

概率论与数理统计习题解答

朱显海　周彦军　编
仲崇骥　王铭文

东北师范大学印刷厂印刷

内部发行·L·80011

初版：2,900册　工本费：0.63元

1980年10月

目　　录

第一章习题解答

1．(1) $S=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

$e_1=(\text{正}_1,\ \text{正}_2,\ \text{正}_3)$，　$e_2=(\text{正}_1,\ \text{正}_2,\ \text{反}_3)$，

$e_3=(\text{正}_1,\ \text{反}_2,\ \text{正}_3)$，　$e_4=(\text{正}_1,\ \text{反}_2,\ \text{反}_3)$，

$e_5=(\text{反}_1,\ \text{正}_2,\ \text{正}_3)$，　$e_6=(\text{反}_1,\ \text{正}_2,\ \text{反}_3)$，

$e_7=(\text{反}_1,\ \text{反}_2,\ \text{正}_3)$，　$e_8=(\text{反}_1,\ \text{反}_2,\ \text{反}_3)$．

(2) $S=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

$e_1=\{\text{白}_1\}$，$e_2=\{\text{白}_2\}$，$e_3=\{\text{白}_3\}$，$e_4=\{\text{白}_4\}$，

$e_5=\{\text{红}_1\}$，$e_6=\{\text{红}_2\}$，$e_7=\{\text{红}_3\}$，$e_8=\{\text{红}_4\}$，

$e_9=\{\text{红}_5\}$，$e_{10}=\{\text{红}_6\}$.

2．(1) $A\cap\bar{B}=\{e_1, e_2, e_3\}$，

(2) $(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=\{e_1, e_2, e_3, e_7, e_8, e_9\}$，

(3) $(\overline{A\cup B}=\{e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$，

(4) $\bar{A}\cup\bar{B}=\{e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$，

(5) $\overline{A\cap B}=\{e_1, e_2, e_3, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$，

(6) $\bar{A}\cup\bar{B}=\{e_1, e_2, e_3, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$．

3．$\bar{A}$："三件全是好品"　$\bar{A}=C$

$\bar{B}$："三件中至少有两件好品"，

$A\cup C=U$（必然事件），

$A\cap C=V$（不可能事件），

$A-B=$"三件中恰有一件废品"．

4．(1) $A\bar{B}\bar{C}$,

(2) $\bar{A}BC$,

(3) ABC,

(4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$,

(5) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$,

(6) $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$,

(7) $A\cup B\cup C$,

(8) $AB\cup BC\cup AC$,

(9) $\overline{ABC}$.

5．证明两个事件A,B是等价的（$A=B$），最基本的方法是用定义，即证明如下

的两个包含关系成立：

$$A \supset B, \qquad B \supset A.$$

(1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

若 $e \in \overline{A \cup B} \Rightarrow e \bar{\in} A \cup B \Rightarrow e \bar{\in} A$ 且 $e \bar{\in} B \Rightarrow e \in \bar{A}$ 且 $e \in \bar{B} \Rightarrow e \in \bar{A} \cap \bar{B}$，因此，

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}; \tag{i}$$

反之，若 $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow e \in \bar{A}$ 且 $e \in \bar{B} \Rightarrow e \bar{\in} A$ 且 $e \bar{\in} B \Rightarrow e \bar{\in} A \cup B \Rightarrow e \in \overline{A \cup B}$，

所以，
$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B} \tag{ii}$$

由 (i)，(ii) 有 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

(2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

若 $e \in \overline{A \cap B} \Rightarrow e \bar{\in} A \cap B \Rightarrow e \bar{\in} A$ 或 $e \bar{\in} B \Rightarrow e \in \bar{A}$ 或者 $e \in \bar{B} \Rightarrow e \in \bar{A} \cup \bar{B}$，所以，

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}; \tag{i}$$

反之，若 $e \in \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow e \in \bar{A}$ 或者 $e \in \bar{B} \Rightarrow e \bar{\in} A$ 或者 $e \bar{\in} B \Rightarrow e \bar{\in} A \cap B \Rightarrow e \in \overline{A \cap B}$，

所以，$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$； (ii)

由 (i)，(ii) 有 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(1)，(2) 所给出的两个等式是很重要的，在事件的运算中经常用到．它可以推广到有限个或可列个事件的场合，即

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n \cap \cdots,$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n \cup \cdots,$$

简记为

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i,$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i.$$

用话来说，就是：事件并的对立事件等于对立事件的交；事件交的对立事件等于对立事件的并．

(3) $(A \cup B) - B = A \cap \bar{B}$

若 $e \in (A \cup B) - B \Rightarrow e \in A \cup B$ 且 $e \bar{\in} B \Rightarrow e \in A$ 且 $e \in \bar{B} \Rightarrow e \in A \cap \bar{B}$，所以

$$(A \cup B) - B \subset A \cap \bar{B}, \tag{i}$$

反之，若 $e \in A \cap \bar{B} \Rightarrow e \in A$ 且 $e \in \bar{B} \Rightarrow e \in A \cup B$ 且 $e \bar{\in} B \Rightarrow e \in (A \cup B) - B$，所以

$$A \cap \bar{B} \subset (A \cup B) - B; \tag{ii}$$

由 (i)，(ii) 有 $(A \cup B) - B = A \cap \bar{B}$.

(4) $(A \cup B) - AB = A\bar{B} \cup \bar{A}B$

若 $e \in (A \cup B) - AB \Rightarrow e \in A \cup B$ 且 $e \bar{\in} AB$

$\Rightarrow e\in A$，$e\bar{\in} AB$ 或 $e\in B$，$e\bar{\in} AB$
$\Rightarrow e\in A$，$e\bar{\in} B$ 或 $e\in B$，$e\bar{\in} A$
$\Rightarrow e\in A$，$e\in \bar{B}$ 或 $e\in B$，$e\in \bar{A}\Rightarrow e\in A\bar{B}\cup B\bar{A}$，所以

$$(A\cup B)-AB\subset A\bar{B}\cup \bar{A}B; \qquad \text{(i)}$$

反之，若 $e\in A\bar{B}\cup\bar{A}B\Rightarrow e\in A\bar{B}$ 或 $e\in \bar{A}B$，

当 $e\in A\bar{B}$时$\Rightarrow e\in A$ 且 $e\in \bar{B}\Rightarrow e\in A$且 $e\bar{\in} AB\Rightarrow e\in A\cup B$ 且 $e\bar{\in} AB\Rightarrow e\in (A\cup B)-AB$，

当 $e\in \bar{A}B$ 时$\Rightarrow e\in B$ 且 $e\in \bar{A}\Rightarrow e\in B$且 $e\bar{\in} AB\Rightarrow e\in A\cup B$ 且 $e\bar{\in} AB\Rightarrow e\in (A\cup B)-AB$，

因此，无论何时均有 $e\in (A\cup B)-AB$，所以

$$A\bar{B}\cup\bar{A}B\subset(A\cup B)-AB; \qquad \text{(ii)}$$

由 (i)，(ii) 有：

$$(A\cup B)-AB=A\bar{B}\cup\bar{A}B.$$

(5) $A\cup A=A$

若$e\in A\cup A\Rightarrow e\in A$ 因此 $A\cup A\subset A$；反之，若 $e\in A\Rightarrow e\in A\cup A$，所以$A\subset A\cup A$. 总之有$A\cup A=A$.

$$A\cap A=A$$

若 $e\in A\cap A\Rightarrow e\in A$ 因此 $A\cap A\subset A$；反之，若 $e\in A\Rightarrow e\in A\cap A$，所以 $A\cap A\supset A$. 总之有，$A\cap A=A$.

$$\bar{\bar{A}}=A$$

若 $e\in\bar{\bar{A}}\Rightarrow e\bar{\in}\bar{A}\Rightarrow e\in A$ 因 此$\bar{\bar{A}}\subset A$，反之，若 $e\in A\Rightarrow e\bar{\in}\bar{A}\Rightarrow e\in\bar{\bar{A}}$ 因此$A\subset\bar{\bar{A}}$. 总之，$\bar{\bar{A}}=A$.

6．此题与第8页例2完全相同，只需将此题中的“大豆”看作“产品”，“虫豆”看作“废品”．所以，由例2所给出的公式得：

$$P_3=\frac{\binom{10}{3}\binom{90}{2}}{\binom{100}{5}}=0.0063835$$

7．$A\triangleq$“三件中至少有一件不合格品”

考虑 $\bar{A}$ =“三件全是合格品”，

$$P\{\bar{A}\}=\frac{\binom{46}{3}}{\binom{50}{3}}=0.77449$$

$\Rightarrow P\{A\}=1-P\{\bar{A}\}=1-0.77449=0.22551.$

8．$A\triangleq$取得两个红球和三个白球”

由于取球是有放回的，所以基本事件空间含有 12^5 个元素．事件A包含$\binom{5}{2}4^2\cdot 3^3$ 个基本事件．这是因为取得两个红球有 4^2 种方法，取得三个白球有 3^3 种方法，而两个红球在五次抽球中有$\binom{5}{2}$种不同的情况．所以，

$$P\{A\}=\frac{\binom{5}{2}\cdot 4^2\cdot 3^3}{12^5}=0.017361.$$

9．此题与第9页例6类似．用与例6完全相同的解法得：

$$P=\frac{\binom{18}{9}\binom{18}{9}}{\binom{36}{18}}=0.26048.$$

10．$A_1\triangleq$“三个中最小数码是5”

$A_2\triangleq$“三个中最大数码是5”

从10个数码中任取 3 个，基本事件的总数为$\binom{10}{3}$．A_1包含$\binom{5}{2}$个基本事件．这是因为三个数码中最小的数码是5，其余2个应该从6，7，8，9，10这五个数码中任取．于是，

$$P\{A_1\}=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{5\times 4\times 3}{10\times 9\times 8}=\frac{1}{12}.$$

A_2包含$\binom{4}{2}$个基本事件．这是因为三个数码中最大的数码是5，其余两个应该从1，2，3，4这四个数码中选取．所以，

$$P\{A_2\}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{4\cdot 3\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8}=\frac{1}{20}.$$

11．$A\triangleq$“k个数码中既无0又无1”

由于取数码是可重复的，所以基本事件空间由10^k个基本事件组成．A中包含8^k个基本事件，这是因为要求k个数码中既无0又无1，则这k个数码是从2，3，4，5，6，7，8，9这八个数码中有重复地选取的．所以，

$$P\{A\}=\frac{8^k}{10^k}=0.8^k.$$

12．$A\triangleq$“至少有两名学生的生日在同一月”，它的对立事件$\overline{A}$为“n个学生的生日的所在月份全不相同”．先求$P\{\overline{A}\}$．

由于每一个学生的生日的所在月份均可能是1月，2月，…，12月这十二个月中的任一个．因此，n个学生的生日所在月的最基本的情况数为12^n（基本事件空间所包含的样本点的个数），而要求n个学生的生日所在月全不相同，则这n个月应该从1，2，…，12中选取，所以$\overline{A}$包含A_{12}^n个基本事件．这样一来，

$$P\{\overline{A}\}=\frac{A_{12}^n}{12^n}\Rightarrow P\{A\}=1-P\{\overline{A}\}=1-\frac{A_{12}^n}{12^n}.$$

13．$A_1\triangleq$“第一次取得奇数”

$A_2 \stackrel{\triangle}{=}$ “第二次取得奇数”

$A_3 \stackrel{\triangle}{=}$ “两次都取得奇数”

此题即往两张有顺序的空白卡片上不重复地随机写数码（1，2，3，4，5中之一）的问题.

第一张卡片有5种写法，相应于它的1种写法，第二张卡片有4种写法，因此，所有的基本事件的总数为$5 \cdot 4 = 20$.

A_1包含的基本事件数为$3 \cdot 4 = 12$. 因为第一张卡片写奇数，可写1，3，5这三个数码之一，即有三种写法，相应于它的一种写法，第二张卡片还可写上其余的四个数码中的一个. 所以，

$$P\{A_1\} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5};$$

同样的理由，第二张卡片写奇数，有三种写法，相应于它的一种写法，第一张卡片有四种写法，因此，A_2包含$4 \cdot 3$个基本事件. 所以，

$$P\{A_2\} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5};$$

A_3包含$3 \cdot 2$个基本事件，因此，

$$P\{A_3\} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{3}{10}.$$

14. $A \stackrel{\triangle}{=}$ “至少有一个数码与它所占的位置的号数一致”，$\overline{A} =$ “三个数码与它所占的位置的号数全不一致”.

将1，2，3三个数码随机排成一列，有$3!$种不同的排法，因此共有$3! = 6$个基本事件. $\overline{A}$包含两个基本事件$(3,1,2)$，$(2,3,1)$，所以

$$P\{\overline{A}\} = \frac{2}{6} \Rightarrow P\{A\} = 1 - P\{\overline{A}\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

15. $A \stackrel{\triangle}{=}$ “两纸片上的数的和等于10”

从1，2，…，10这10个数中任取两个，有$\binom{10}{2}$种不同的方法，因此基本事件的总数为$\binom{10}{2}$.

A中包含4个基本事件，即：$(1,9)$，$(2,8)$，$(3,7)$，$(4,6)$. 所以

$$P\{A\} = \frac{4}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{45}.$$

16. $A \stackrel{\triangle}{=}$ “能被6或8整除”

基本事件空间包含50个基本事件，A中包含12个基本事件，即能被6或8整除的数有12个，即：6，8，12，16，18，24，30，32，36，40，42，48. 所以

$$P\{A\} = 12/50 = 0.24.$$

17. $A \triangleq$ “两个数是相连的数”

在不放回的情形，所有的基本事件有$n(n-1)$个. A中含有$2(n-1)$个基本事件，即

$(1,2)$, $(2,3)$, $\cdots(n-1,n)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $\cdots$, $(n,n-1)$.

所以

$$P\{A\}=\frac{2(n-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}.$$

在有放回的情况，所有的基本事件有n^2个，A中所含的基本事件数仍为$2(n-1)$. 因此，

$$P\{A\}=2(n-1)/n^2.$$

18. $A \triangleq$ “恰在第k次试验时打开门”

实际上只进行k次试验，一旦在第k次打开门，任何一个人也不会再继续去试开，由此基本事件空间包含$n(n-1)\cdots(n-k+1)$个基本事件. 恰在第k次打开门，意味着第一次试验取出的是不能开门的$n-1$把钥匙之一，第二次试验取出的是其余$n-2$把不能开门的钥匙之一，如此等等，因而A中含有的基本事件数为

$$(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot 1.$$

所以，

$$P\{A\}=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}=\frac{1}{n}.$$

19. $A_1 \triangleq$ “在数列中1与2相继出现”

$A_2 \triangleq$ “在数列中1，2，3相继出现”

将数$1,2,\cdots,n$按任意顺序排列，共有$n!$种不同的排法，因此，所有的基本事件数为$n!$个. 1，2相继出现在1，2位置时，其余$n-2$个数仍可任意排列，有$(n-2)!$种排法，但，$(1,2)$可能出现在$(1,2)$，$(2,3)$，$\cdots(n-1,n)$这$n-1$个位置之一，因而，A含有$(n-1)(n-2)!$个基本事件. 所以，

$$P\{A_1\}=\frac{(n-1)(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n}.$$

同样的计算方法，可知：

$$P\{A_2\}=\frac{(n-2)(n-3)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}.$$

20. $A \triangleq$ “5个数码各取5次”

由于取数码是可重复的，所以，基本事件的总数为5^{25}个. 将25个数码分成5个有序组，有$\frac{25!}{5!5!5!5!5!}$种不同的分法，因而A中含有的基本事件数为$\frac{25!}{(5!)^5}$，所以，

$$P\{A\}=\frac{\frac{25!}{(5!)^5}}{5^{25}}=\frac{25!}{5^{25}\cdot(5!)^5}=0.0020917.$$

21．$A \triangleq$"某指定的盒子是空的"

将 r 个球放入 n 个盒中有 n^r 种不同的放法，因此，基本事件的总数为 n^r．某指定的盒子是空的，表明这 r 个球中任一个均不能放入这盒中，因此，A 中所含的基本事件数等于将 r 个球放入 $n-1$ 个盒中的不同放法为 $(n-1)^r$．所以，

$$P\{A\}=\frac{(n-1)^r}{n^r}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^r.$$

22．此题类似于第12题，只不过那里考虑的是月份，而这里考虑的是生日．假定一年有365天，则所求之概率为

$$P\{A\}=A_{365}^{n}/365^{n}.$$

23．$A \triangleq$"第K次取得黑球"

由于是不放回地取球 $a+b$ 次，所以基本事件的总数为 $(a+b)(a+b-1)\cdots\cdot 2\cdot 1=(a+b)!$．第$K$次取得的黑球，可以是$a$个黑球中的任一个，有$a$种不同的取法，其余的 $a+b-1$ 个球的不同取法有 $(a+b-1)!$ 种．因而A中含 $a(a+b-1)!$ 个基本事件．所以，

$$P\{A\}=\frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

24．$A \triangleq$"必须的抽取次数为 r"

如果 $r<K$ 则抽 r 个球有K个白球是不可能的，所以 $P\{A\}=0$．

当 $r\geqslant K$ 时，必须的抽取次数为r，表明取出的 r 个球中，有K个白球，$r-K$个黑球，且第 r 个球一定是白球，其余 $K-1$ 个白球则分布在前 $r-1$ 个位置的任意 $K-1$ 个位置上．因此，有 $C_{r-1}^{K-1}b^{K}a^{r-K}$ 种不同的排法．所有的基本事件共有 $(a+b)^r$ 个．所以

$$P\{A\}=\frac{C_{r-1}^{K-1}b^{K}a^{r-K}}{(a+b)^{r}}.$$

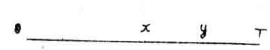
25．$A \triangleq$"点C与点A的距离$\geqslant l$"

由几何概率的定义，立即可得，

$$P\{A\}=\frac{A\text{的测度}}{L\text{的测度}}=\frac{L-l}{L}=1-\frac{l}{L}.$$

26．$A \triangleq$"收音机受到干扰"

又设两信号到达的时刻，分别记为 x，y，则



$A=\{(x,y):|x-y|\leqslant\tau\}$．

由题设知 $0\leqslant x\leqslant T$，$0\leqslant y\leqslant T$．因而两信号到达的一切可能结果相应于边长为 T 的正方形中的一切点．

A则由图（1.1）中阴影部分中的全部点所组成，所以

$$P\{A\}=\frac{T^2-2\cdot\frac{1}{2}(T-\tau)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{\tau}{T}\right)^2.$$

27. 令o点为原点，A点的坐标为x，B点的坐标为y，C点的坐标为z，则，

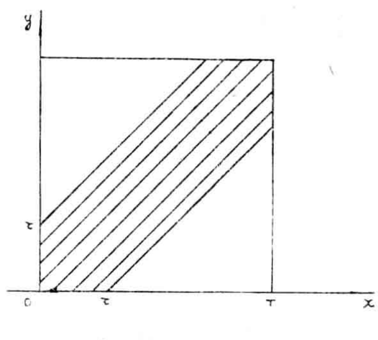


图 1.1

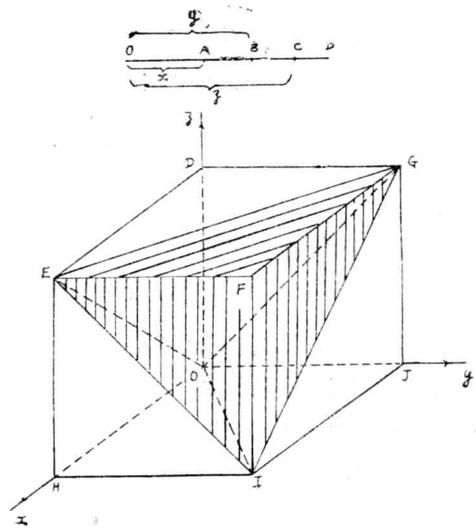


图 1.2

$o \leqslant x \leqslant l$，$o \leqslant y \leqslant l$，$o \leqslant z \leqslant l$.

记A_0="三线段oA，oB，oC能构成三角形"

A，B，C三点的一切可能位置对应于正方体$ODEFGH1J$中的所有点. 它的体积为l^3.

oA，oB，oC能构成三角形的充要条件是

$$x+y>z,\quad x+z>y,\quad y+z>x$$

相应于图1.2中正方体去掉三个三棱锥后的部分（即$OEFGI$），它的体积为

$l^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}l^3=\frac{1}{2}l^3$.

所以，所求之概率

$$P\{A_0\}=\frac{\frac{1}{2}l^3}{l^3}=\frac{1}{2}.$$

28. 以x，y分别记两艘轮船的到达时刻. 则$o \leqslant x \leqslant 24$，$o \leqslant y \leqslant 24$.

令$A \triangleq$"一艘轮船需要等待空出码头"，则A相应于图中的阴影区域，即$\{(x, y):\ y-x \leqslant 1,\ x-y \leqslant 2\}$. 所以，

$$P\{A\}=\frac{24^2-\left[\frac{1}{2}\cdot 23^2+\frac{1}{2}22^2\right]}{24^2}=1-0.87934$$

$=0.12066$.

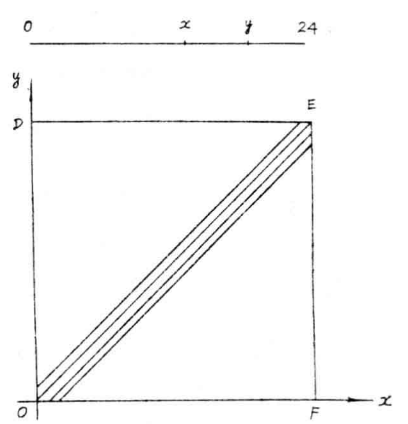


图 1.3

29. 以x，y分别记二人的到达时刻. 有

$$o \leqslant x \leqslant 1, \quad o \leqslant y \leqslant 1$$

$A \triangleq$ “一人要等另一人半小时以上” 相应于图 1.4 中的阴影部分．因而

$$P\{A\}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

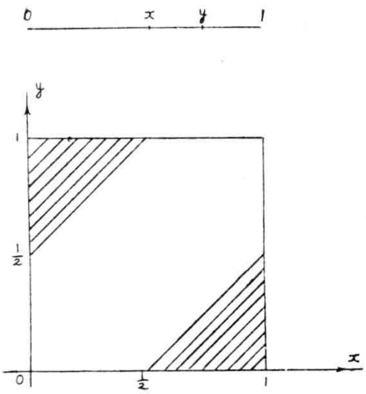


图 1 4

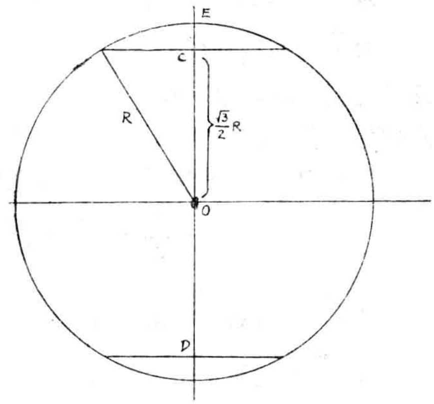


图 1.5

30．$A \triangleq$ “任意画的弦的长度大于R”

我们有$A=$ “在直径EF上任意投点落在区间CD中”

所以

$$P\{A\}=\frac{CD\text{的长}}{EF\text{的长}}=\frac{2\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

31．$A \triangleq$ “3 个都是白球”

$A_i \triangleq$ “第 i 个是白球” $i=1,2,3$，则$A=A_1A_2A_3$，由乘法定理知

$$P\{A\}=P\{A_1A_2A_3\}=P\{A_1\}\cdot P\{A_2|A_1\}\cdot P\{A_3|A_1A_2\}$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}\cdot\frac{a-2}{a+b-2}.$$

此题也可以直接用古典型概率的计算公式计算：

$$P\{A\}=\frac{k}{n}=\frac{A_a^3}{A_{a+b}^3}=\frac{a(a-1)(a-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}.$$

32．$A=$ “3 个球中头两个是黑球，第 3 个是白球”

A_i “第 i 个球是黑球” $i=1,2,3$，我们有$A=A_1A_2\overline{A}_3$，由乘法定理知

$$P\{A\}=P\{A_1A_2\overline{A}_3\}=P\{A_1\}\cdot P\{A_2|A_1\}\cdot P\{\overline{A}_3|A_1A_2\}$$

$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c+d}\cdot\frac{a+2d}{a+b+2c+2d}.$$

33．$P\{A\cap B\}=P\{B\}\cdot P\{A|B\}=0.4\times0.32=0.128$,

$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{AB\}=0.3+0.4-0.128=0.572$

$P\{\overline{AB}\}=1-P\{AB\}=1-0.128=0.872$,

$P\{\overline{A\cup B}=1-P\{A\cup B\}=1-0.572=0.428$.

34. $A_1\triangleq$ "取第一袋（5白7红）"

$A_2\triangleq$ "取第二袋（4白2红）"

$B\triangleq$ "取白球"

$A_1\cup A_2=U$，$B=BU=B(A_1\cup A_2)=BA_1\cup BA_2$

所以$P\{B\}=P\{BA_1\cup BA_2\}=P\{BA_1\}+P\{BA_2\}$ （$\because A_1\cap A_2=V$）

$$=P\{A_1\}P\{B\mid A_1\}+P\{A_2\}\cdot P\{B\mid A_2\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{13}{24}.$$

35. $A_1\triangleq$ "从袋1中取白球"，

$A_2\triangleq$ "从袋1中取红球"，

$B\triangleq$ "从袋2中取白球"

$P\{B\}=P\{B(A_1\cup A_2)\}=P\{BA_1\cup BA_2\}(A_1\cap A_2=V)$

$$=P\{BA_1\}+P\{BA_2\}=P\{A_1\}\cdot P\{B|A_1\}+P\{A_2\}\cdot P\{B|A_2\}$$

$$=\frac{x}{x+y}\cdot\frac{u+1}{u+v+1}+\frac{y}{x+y}\cdot\frac{u}{u+v+1}$$

$$=\frac{u(x+y)+x}{(x+y)(u+v+1)}.$$

36. $A_1\triangleq$ "共取2次"

$A_2\triangleq$ "共取3次"

$A_3\triangleq$ "共取4次"

我们有：$A_1=\{$两个均坏$\}$，$A_2=\{$第三次取坏另件，前两次恰取一个坏$\}$，$A_3=\{$最后一次坏，前三次中恰有一个坏$\}$.

$$P\{A_1\}=\frac{2\cdot1}{4\cdot3}=\frac{1}{6},$$

$$P\{A_2\}=\frac{\binom{2}{1}2\cdot2}{4\cdot3\cdot2}=\frac{1}{3},\qquad P\{A_3\}=\frac{\binom{3}{1}\cdot2\cdot2}{4!}=\frac{1}{2}.$$

37. $A_1\triangleq$ "取2白1黑的罈"

$A_2\triangleq$ "取10黑的罈"

$A_3\triangleq$ "取3白1黑的罈"

$B\triangleq$ "取白球"

由题设知，$P\{A_1\}=\frac{2}{5}$，$P\{A_2\}=\frac{1}{5}$，$P\{A_3\}=\frac{2}{5}$；$P\{B|A_1\}=\frac{2}{3}$，

$P\{B|A_2\}=0$，$P\{B|A_3\}=\frac{3}{4}$.

注意到$A_1\cup A_2\cup A_3=U$，且A_1，A_2，A_3互斥、所以，

$$
\begin{aligned}
P\{B\}&=P\{BU\}=P\{B(A_1\cup A_2\cup A_3)\}\\
&=P\{BA_1\}+P\{BA_2\}+P\{BA_3\}\\
&=P\{A_1\}\cdot P\{B|A_1\}+P\{A_2\}\cdot P\{B|A_2\}+P\{A_3\}\cdot P\{B|A_3\}\\
&=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{34}{60}=\frac{17}{30}.
\end{aligned}
$$

38. 已知：$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=U$，$A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$

$P\{B\}>0$，　$P\{C\}>0$

$P\{A_i\}$，$P\{B|A_i\}$，$P\{C|BA_i\}$皆已知.

求：$P\{C|B\}$

解：$P\{C|B\}=\frac{P\{CB\}}{P\{B\}}$

$$
\begin{aligned}
P\{B\}&=P\{BU\}=P\left\{B\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right\}=P\left\{\bigcup_{i=1}^{n}BA_i\right\}\\
&=\sum_{i=1}^{n}P\{BA_i\}=\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\}\cdot P\{B|A_i\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{CB\}&=P\{CBU\}=P\left\{CB\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right\}=P\left\{\bigcup_{i=1}^{n}CBA_i\right\}\\
&=\sum_{i=1}^{n}P\{CBA_i\}=\sum_{i=1}^{n}P\{BA_i\}\cdot P\{C|BA_i\}\\
&=\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\}\cdot P\{B|A_i\}\cdot P\{C|BA_i\}.
\end{aligned}
$$

所以，

$$P\{C|B\}=\frac{\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\}\cdot P\{B|A_i\}\cdot P\{C|BA_i\}}{\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\}\cdot P\{B|A_i\}}$$

39. $P\{A\}=0.5$，$P\{B|A\}=P\{\overline{B}|\overline{A}\}=0.9$，求$P\{A|B\}$，$P\{A|\overline{B}\}$.

解：
$$
\begin{aligned}
P\{B\}&=P\{BA\}+P\{B\overline{A}\}\\
&=P\{A\}\cdot P\{B|A\}+P\{\overline{A}\}\cdot P\{B|\overline{A}\}\\
&=0.5\times0.9+(1-0.5)\times0.1=0.5.
\end{aligned}
$$

$$P\{A|B\}=\frac{P\{AB\}}{P\{B\}}=\frac{P\{A\}\cdot P\{B|A\}}{P\{B\}}=\frac{0.5\cdot0.9}{0.5}=0.9.$$

$$
\begin{aligned}
P\{A|\overline{B}\}&=\frac{P\{A\overline{B}\}}{P\{\overline{B}\}}=\frac{P\{A-AB\}}{1-P\{B\}}=\frac{P\{A\}-P\{AB\}}{1-P\{B\}}\\
&=\frac{0.5-0.5\times0.9}{0.5}=0.1.
\end{aligned}
$$

40. $A_1 \triangleq$ {从1号袋取球},

$A_2 \triangleq$ {从不是1号袋取球}

$B \triangleq$ {取白球}.

题目要求"这个白球是来自1号袋子"的概率，是求条件概率$P\{A_1|B\}$，由 $Bayes$ 公式有

$$P\{A_1|B\}=\frac{P\{A_1\}\cdot P\{B|A_1\}}{P\{A_1\}\cdot P\{B|A_1\}+P\{A_2\}\cdot P\{B|A_2\}}=\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

41. $P\{B|A\}=\dfrac{P\{B\}\cdot P\{A|B\}}{P\{A\}}$,

式中，$P\{B\}=0.0004$，$P\{A|B\}=0.95$. 欲算出$P\{A\}$，用全概率公式得：

$P\{A\}=P\{B\}\cdot P\{A|B\}+P\{\overline{B}\}\cdot P\{A|\overline{B}\}$

$=P\{B\}\cdot P\{A|B\}+[1-P\{B\}]\cdot[1-P\{\overline{A}|\overline{B}\}]$

$=0.0004\times0.95+0.9996\times0.1=0.10034$,

所以，

$$P\{B|A\}=\frac{0.00038}{0.10034}=0.00379.$$

42. $A_1 \triangleq$ "取的枪试射过",

$A_2 \triangleq$ "取的枪未试射过",

$B \triangleq$ "射击命中",

$P\{B\}=P\{A_1\}\cdot P\{B|A_1\}+P\{A_2\}\cdot P\{B|A_2\}$

$=\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}+\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{10}=\frac{23}{90}$,

$$P\{A_1|B\}=\frac{P\{A_1\}\cdot P\{B|A_1\}}{P\{B\}}=\frac{\frac{16}{90}}{\frac{23}{90}}=\frac{16}{23}.$$

43. $A_1 \triangleq$ "第一次取出黑球",

$A_2 \triangleq$ "第一次取出红球",

$B \triangleq$ "第二次取出黑球".

$P\{B\}=P\{A_1\}\cdot P\{B|A_1\}+P\{A_2\}\cdot P\{B|A_2\}$

$$=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}+\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+r+c}=\frac{b}{b+r},$$

$$P\{A_1|B\}=\frac{P\{A_1B\}}{P\{B\}}=\frac{\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}}{\frac{b}{b+r}}=\frac{b+r}{b+r+c}.$$

44. $A\stackrel{\triangle}{=}$"前面n_1次取得黑球，后面$n_2=n-n_1$次取得红球"

$A_i\stackrel{\triangle}{=}$"第$i$次取得黑球"　$i=1,2,\cdots,n$,

我们有，

$$A=A_1A_2\cdots A_{n_1}\overline{A}_{n_1+1}\overline{A}_{n_1+2}\cdots\overline{A}_n$$

但　$P\{A_1\}=\dfrac{b}{b+r}$,　$P\{A_2|A_1\}=\dfrac{b+c}{b+r+c}$, $\cdots$,

$$P\{A_{n_1}|A_1A_2\cdots A_{n_1-1}\}=\frac{b+(n_1-1)c}{b+r+((n_1-1)c},$$

$$P\{\overline{A}_{n_1+1}|A_1A_2\cdots A_{n_1}\}=\frac{r}{b+r+n_1c},\ \cdots,$$

$$P\{\overline{A}_n|A_1\cdots A_{n_1}\overline{A}_{n_1+1}\cdots\overline{A}_{n-1}\}=\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}$$

由乘法定理知：

$$P\{A\}=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\cdots\frac{b+(n_1-1)c}{b+r+n_1-1)c}\cdot\frac{r}{b+r+n_1c}\cdot\cdots\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}$$

45. 用数学归纳法.

$n=1$时，$P\{A_1\}=\dfrac{b}{b+r}$，命题真.

假定命题对$n=k$时成立，即第k次取得黑球的概率$P\{A_k\}=\dfrac{b}{b+r}$，往证命题当$n=k+1$时成立.

$$\begin{aligned}P\{A_{k+1}\}&=P\{A_1A_{k+1}\}+P\{\overline{A}_1A_{k+1}\}\\&=P\{A_1\}\cdot P\{A_{k+1}|A_1\}+P\{\overline{A}_1\}\cdot P\{A_{k+1}|\overline{A}_1\}\end{aligned}$$

$P\{A_{k+1}|A_1\}$为在第一次取出黑球的条件下，第$k+1$次取出黑球的条件概率，它可以看成是从有$b+c$个黑球，r个红球的罈子里经过k次取球，取出黑球的概率. 由归纳假定，它等于$\dfrac{b+c}{b+r+c}$.

同理，$P\{A_{k+1}|\overline{A}_1\}=\dfrac{b}{b+r+c}$，所以

$$P\{A_{k+1}\}=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}+\frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+r+c}=\frac{b}{b+r},$$

由归纳法原理知，命题得证.

46. $P\{A\}=P\{C\}\cdot P\{A|C\}+P\{\overline{C}\}\cdot PA|\overline{C}\}$

$$=\frac{1}{2}(0.9+0.2)=0.55,$$

$$P\{B\}=P\{C\}\cdot P\{B|C\}+P\{\bar{C}\}\cdot P\{B|\bar{C}\}$$

$$=\frac{1}{2}(0.9+0.1)=0.5.$$

$$P\{A\cap B\}=P\{C\}\cdot P\{AB|C\}+P\{\bar{C}\}\cdot P\{AB|\bar{C}\}$$

$$=P\{C\}\cdot P\{A|C\}\cdot P\{B|C\}+P\{\bar{C}\}\cdot P\{A|\bar{C}\}\cdot P\{B|\bar{C}\}$$

（由A,B条件独立）

$$=\frac{1}{2}[0.9^2+0.2\times 0.1]=0.415.$$

由于　$P\{A\cap B\}=0.415\neq 0.55\times 0.5=P\{A\}\cdot P\{B\}$，所以$A,B$不独立.

47. $A\triangleq$“不出废品”

$A_i\triangleq$“第i道工序不出废品”　$i=1,2,3$.

我们有，$A=A_1A_2A_3$，已假定诸A_i相互独立，由乘法定理，

$$P\{A\}=P\{A_1\}\cdot P\{A_2\}\cdot P\{A_3\}=[1-P\{\bar{A}_1\}][1-P\{\bar{A}_2\}][1-P\{\bar{A}_3\}]$$

$$=[1-0.02]^3=0.98^3=0.94119.$$

48. $P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{AB\}$

$=P\{A\}+P\{B\}-P\{A\}\cdot P\{B\}$　（由A,B独立）

$=P\{A\}+P\{B\}[1-P\{A\}]$,

所以，

$$P\{B\}=\frac{P\{A\cup B\}-P\{A\}}{1-P\{A\}}=\frac{0.6-0.4}{1-0.4}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}.$$

49. $A\triangleq$“二人获得相同数的正面”

$A_i\triangleq$“二人各得i个正面”　$i=1,2,3$

我们有，

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3$$

所以

$$P\{A\}=P\{A_1\}+P\{A_2\}+P\{A_3\}$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{19}{64}.$$

50. $A\triangleq$“一个二进数是错误的”

$A_i\triangleq$“第i位数码是错误的”　$i=1,2,\cdots,n$

我们有，

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

$$P\{A\}=1-P\{\bar{A}\}=1-P\{\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n\}$$（由诸$\bar{A}_i$独立）

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P\{\bar{A}_i\}=1-(1-P)^n.$$