高等代数

GAO DENG DAI SHU

GDDS

杨子胥 编

聊城师范学院

引　言

任何一门课程的内容都不是固定不变的。但是，在一般情况下，任何一门课程的内容又都是相对稳定的。高等代数是高等院校数学系的重要基础课之一，它的内容也是这样，既不是固定不变的，又是相对稳定的。但是就目前来说，高等代数的内容大体包括以下三个方面：

1　以线性方程组的理论为主导的行列式、矩阵和一般线性方程组的理论；

2　多项式理论，其中包括以多项式的根和分解为中心的任意数域和特殊数域上一元多项式的理论，以及多元多项式中的对称多项式和二次齐式的理论；

3　线性空间和线性变换的理论，其中包括欧氏空间和λ－矩阵的理论。

我们知道，线性方程组理论的核心是矩阵，而二次齐式和线性变换的理论，基本上也是属于矩阵的理论，因此，以上三方面的内容又可以粗略地进一步归纳为多项式和矩阵的理论，而且这些理论都直接或间接地涉及到多项式和矩阵的基本运算。所谓基本运算，就是指多项式以及矩阵的普通加、减、乘运算以及在一定意义下的除法运算，因此，学习高等代数就必须掌握好这些基本运算和它的性质。

学习高等代数还必须十分注意概念，就是说概念要清楚，不含糊。对于定义，不是简单地背诵词句，而是要真正理解和掌握实质，要能用自己的语言并用各种不同的等价说法加以准确地描述。

学习高等代数还必须十分注意基本知识、基本理论和基本方法，而且要注意它们之间的内在的相互联系。例如，矩阵的秩、向量组的秩以及矩阵的行秩和列秩之间的联系，n元向量的线性相关性与线性方程组的解、基础解系和线性空间的联系，以及线性空间、线性变换和矩阵之间的联系，等等。通过对这些内容和它们之间相互联系的真正掌握，必将使我们感到这些内容、理论和方法是浑然一体、协调自然的。

高等代数有一个非常重要的思想方法，那就是等价分类并从每一个等价类中寻找恰当代表元的方法。例如，求矩阵的秩、解线性方程组、求二次齐式的各种标准形以及矩阵和λ－矩阵在各种不同分类中求标准形的问题，等等，都属于这种情况。当然，从根本上说，这种思想方法不仅在代数，而且在别的数学科目甚至在任何科学领域中都是要常常涉及到的方法。但是，它在高等代数中的这一特点尤为突出，而且从总体上说，基本上贯彻整个内容的始终，占主导地位，是非常重要的。因此，只要我们认真注意这些特点和思想方法，我们就能很好地掌握高等代数。

目　录

第一章 行列式

在中学代数里，曾经介绍过二阶、三阶和四阶行列式，并利用它们讨论了二元、三元和四元一次方程组，即线性方程组。在高等代数里，我们要把这些讨论推广到一般情形，就是说，要把这些特殊的二、三、四阶行列式推广到一般的n阶行列式，然后利用n阶行列式，如象中学代数那样，来讨论一般的n元线性方程组。

本章主要介绍n阶行列式的定义、性质和计算，以及它在线性方程组中的应用。

§1 n元排列

为了介绍什么是n阶行列式，我们需要n元排列的概念和简单性质。

以n个数码1，2，…，n为元素的无重复的全排列，简称为**n元排列。**

n元排列共有n！个。例如，三元排列共有3！＝6个，它们是

123，132，213，231，312，321

定义1、在一个n元排列中，如果有一个较大的数码排在一个较小的数码的前面，则称这两个数码在这个排列中构成一个**反序**。

一个n元排列$j_1j_2\cdots j_n$的所有反序的总和，称为这个排列的**反序数**，记为$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。

例如，在排列231中，2与1以及3与1都构成反序，但2与3不构成反序，故其反序数是2；在排列321中任二数码都构

成反序，故其反序数是3；又排列123没有反序，即其反序数是零。因此

$$\tau(231)=2,\ \tau(321)=3,\ \tau(123)=0$$

为了不重不漏地计算一个排列的反序数，可以采用以下的方法：

先数一下所给排列中1前面的数码个数（显然，这些数码都与1构成反序，而1后面的任何数码与1都不能构成反序），设为m_1；划去1后，再数一下2前面的数码个数，设为m_2；划去2后，再数一下3前面的数码个数，设为m_3；如此下去。则这个排列的反序数便是

$$m_1+m_2+\cdots+m_n。$$

例如在排列341625中，$m_1=2$，$m_2=3$，$m_3=m_4=0$，$m_5=1$，$m_6=0$，因此

$$\tau(341625)=2+3+0+0+1+0=6。$$

显然，一个n元排列的反序数不是一个奇数，便是一个偶数。

定义 *2* 如果一个n元排列的反序数是一个奇数，则称该排列为**奇排列**；否则称该排列为**偶排列**。

例如在所有三元排列中，132，213，321是奇排列，而123，231，312是偶排列，即它的奇偶排列各占一半。我们将很快看到，这种现象并非偶然。

在一个n元排列$j_1j_2\cdots j_n$中，如果交换某两个数码的位置，而别的数码不动，则称对这个排列施行了一个**对换**。如果交换的两个数码是i与j，就把这个对换记成（i，j）。例如

$$341625\xrightarrow{(1,5)}345621,$$

即排列341625施行一个对换(1,5)后，得到了一个新排列345621。易知这两个排列的奇偶性相反。对此，下面有更一般的结论。

定理1 每经过一次对换，都改变排列的奇偶性。

证 1）特殊情形。设要对换的两个数码i与j相邻，即

$$\overset{A}{\widehat{\cdots}}ij\overset{B}{\widehat{\cdots}} \xrightarrow{(i,j)} \overset{A}{\widehat{\cdots}}ji\overset{B}{\widehat{\cdots}}$$

易知，A中数码、B中数码、A中数码与B中数码以及i，j与A或B中的数码，在新旧两个排列中的反序不变，即原来构成反序的，在新排列中仍构成反序；原来不构成反序的，在新排列中仍不构成反序。但是，当$i<j$时，i与j在原排列中不构成反序，而在新排列中却构成一个反序，即在新排列中增加了一个反序。同理，当$i>j$时，新排列比原排列又少了一个反序。

不管哪种情形，此时新旧二排列的奇偶性相反。

2）一般情形。设

$$\overset{A}{\widehat{\cdots}}ik_1k_2\cdots k_sj\overset{B}{\widehat{\cdots}} \xrightarrow{(i,j)} \overset{A}{\widehat{\cdots}}jk_1k_2\cdots k_si\overset{B}{\widehat{\cdots}}$$

要证这两个排列的奇偶性相反。

现在将原排列中的i依次与k_1，k_2，…，k_s，j交换，接着将j依次与k_s，…，k_2，k_1交换，这样共对原排列施行了$2s+1$次的相邻对换，便得到了右边的新排列。由1）知，对相邻数码每施行一次对换都改变排列的奇偶性，而$2s+1$又是一个奇数，故上面所说的两个新旧排列的奇偶性相反。 〈证毕〉

由定理1立即可得

定理2 当$n\geqslant 2$时，在$n!$个n元排列中，奇偶排列各占一半，即各有$\frac{n!}{2}$个。

证 由于$n\geqslant 2$，故由定理1知，在$n!$个n元排列中总有奇排列和偶排列，设有s个奇排列和t个偶排列。

现在对s个奇排列施行一个固定的对换，由定理1，这s个奇排列便变成了s个偶排列。但是共有t个偶排列，因此，$s\leqslant t$。

同理，$t\leqslant s$，故$s=t$。

又由于$s+t=n!$，故

$$s=t=\frac{n!}{2}$$ 〈证毕〉

习 题 1

1、计算下面各排列的反序数：

1）3714265　　　　3）$n,n-1,\cdots,2,1$

2）81726354　　　　4）$2k,1,2k-1,2,\cdots,k+1,k$

2、选择i与j，使九元排列

$$27i619j54$$

是一个偶排列。

3、首位是3的五元排列中有多少个奇排列和偶排列？为什么？

4、设$j_1j_2\cdots j_n$是一个n元排列，且$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=k$，求

$$\tau(j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1)=?$$

5、将排列31524施行一些对换变成12345。

6、设$i_1i_2\cdots i_n$和$j_1j_2\cdots j_n$是两个n元排列，证明：可经过一系列对换把其中一个变成另一个。

§2 行列式定义

先来考察二、三阶行列式的共同规律。

我们知道，二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

它具有以下三个性质：

1）共有$2!=2$项；

2）每项都是两个元素相乘，这两个元素既位于不同的行又位于不同的列；

3）每项中两个元素按所在行（称为**行标**）的自然顺序排列

后，其所在列的序数（称为**列标**）构成的排列分别为12和21，即

$$a_{11}a_{22}\longrightarrow 12,\quad a_{12}a_{21}\longrightarrow 21,$$

而12和21正是全体二元排列。

称12和21分别为项$a_{11}a_{22}$和项$a_{12}a_{21}$的**列排列**，12是偶排列，项$a_{11}a_{22}$在二阶行列式的展开式中取正号；21是奇排列，项$a_{11}a_{21}$在二阶行列式的展开式中取负号。

于是二阶行列式可表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2}$表示对全体二元排列求和、

下面再看三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32},$$

它类似于二阶行列式，具有以下三个性质：

1）共有$3!=6$项；

2）每项都是三个元素相乘，这三个元素既位于不同的行又位于不同的列；

3）每项中三个元素按所在行的自然顺序排定后，其所对应的列排列为偶排列时，该项取正号，为奇排列时该项取负号。

于是三阶行列式表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2i_3}$是对所有三元排列求和。

以上所归纳的三条性质，正是二、三阶行列式的本质所在，据此，我们来定义一般的n阶行列式。

定义1 称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为一个n**阶列式行**，它表示

1）n！项的代数和；

2）每项中都有n个元素相乘，这n个元素既位于D中不同的行又位于不同的列（横的称行竖的称列）；

3）每项中的n个元素按所在行的自然顺序排定后，其列排列为偶时该项取正号，为奇时该项取负号。

n阶行列式用式子表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有的n元排列求和。

上面所说的n阶行列式中的n，是任意的自然数，当n＝2，3，4时，就是中学已经学过的二、三和四阶行列式；当n＝1时，即一阶行列式：$|a_{11}|=a_{11}$、此时与通常绝对值的符号相冲突。不过这种极特殊的情况，今后很少考虑。

例1 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

问：$a_{13}a_{21}a_{42}$，$a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$，$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$，$a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}$是不是四阶行列式D_1的项？如果是，应取何符号？

解 $a_{13}a_{21}a_{42}$与$a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$都不是D_1的项，因为前者只有三个元素相乘，后者虽是四个元素相乘，但a_{12}与a_{32}却位于D_1中同一列；

$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$是D_1的一项，它的列排列4132是一个偶排列，因此，该项应取正号；

又$a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}$也是D_1的一项。由于

$$a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}=a_{12}a_{23}a_{34}a_{41},$$

而$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$的列排列2341是奇排列，故该项应取负号。

例2 设

$$D_2=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ g & h & p & q \\ s & t & u & v \\ w & x & y & z \end{vmatrix}$$

问：1）dhsy与ptaz是否为D_2的项？应取何符号？

2）在D_2中包含t的项有多少？

解 1）易知dhsy与ptaz都是D_2的项，前者的四个因子所在的行已是自然顺序，而其列排列为4213，$\tau(4213)=4$，故该项取正号。

又因为ptaz=aptz，而aptz的列排列是1324，$\tau(1324)=1$，故项aptz即项ptaz应取负号。

2）由于在D_2的4！项中 每项的行排列固定为自然顺序后，将含t的第二列也固定，而其余三个元素只能在第一、三、四列中任意取元素，故共有3！=6种取法，因此，D_2中含t的项共有6项。

应该注意，在一个行列式中，通常所写的元素本身不一定有下标，即使有下标，其下标也不一定与这个元素本身所在的行与列的序数完全一致。因此，要确定某一项的符号，一定要按照各

元素所在行列式中实际所在的行与列的序数来计算。

但是在一般情况下，未加声明时，都把n阶行列第i行与第j列交叉位置上的元素认为是a_{ij}，

定理1、以下两个行列式分别称为上、下三角行列式，它们都等于对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

证、只证左边的行列式，对于右边的行列式是类似的。

根据行列式的定义，n阶行列式的每一项中都是n个元素相乘，这n个元素必须位于不同的行与不同的列，即每行及每列中能而且只能取一个元素，因此，第1列中只能取a_{11}，于是第2列中只能取a_{22}，…，在第n列中只能取a_{nn}，即得$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。这个乘积确为该行列式的一项，且显然取正号，别的项全是零。因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

〈证毕〉

定理2　在n阶行列式D中，项

$$a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}$$

应取的符号是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}$$

证、首先，交换项

$$a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_s j_s}\cdots a_{i_t j_t}\cdots a_{i_n j_n} \qquad (1)$$

中元素$a_{i_s j_s}$与$a_{i_t j_t}$的位置，得

$$a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_t j_t}\cdots a_{i_s j_s}\cdots a_{i_n j_n}, \qquad (2)$$

由于对换改变排列的奇偶性，故

$$\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_n) \tag{3}$$

与

$$\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)$$

有相同的奇偶性，这样，逐次交换（1）中元素的次序，总可把项（1）变成

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}, \tag{4}$$

而且（3）与

$$\tau(1\,2\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)=\tau(k_1k_2\cdots k_n)$$

有相同的奇偶性。但是，项（1）就是项（4），它们应取的符号是

$$(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$$

而 $(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,

故项（1）的符号是

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)},$$ （证毕）

这个定理的意义是，在确定行列式中某项应取的符号时，也可以行标不按自然顺序，而同时考虑该项的行排列与列排列。

例 4 试确定四阶行列式中项

$$a_{31}a_{24}a_{12}a_{43}$$

的符号、

解 由于该项的行排列是3214，列排列是1423，而

$$\tau(3214)=3, \quad \tau(1423)=2, \quad (-1)^{3+2}=-1,$$

故该项应取负号、

习 题 2

1、在五阶行列式中，项

$$a_{23}a_{31}a_{52}a_{14}a_{45}, \quad a_{42}a_{51}a_{13}a_{35}a_{24}$$

应各取符何号？

2、设D_2是例2中的行列式，问：乘积

$$qbys, \quad tcgz$$

是否是D_2的项？如果是，应取何符号？

3、利用行列式定义，计算以下两个行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & \cdots & x_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} 0 & y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{n-1} \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

4、写出四阶行列式中包含a_{24}且取正号的所有项。

§3 行列式的基本性质

在解线性方程组和其他一些应用问题中，我们经常需要计算n阶行列式。但是，从上节我们看到，如果仅根据定义来计算行列式，一般是非常麻烦的。例如，要计算一个五阶行列式，就需要计算5！=120项，每项都是五个元素相乘，如果阶数再大些，计算量更是惊人。本节要进一步讨论行列式的基本性质，通过这些讨论，不仅可以大大简化行列式的计算，而且可以进一步了解和掌握行列式。

设有n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

现在把D的第1，2，…，n依次变成第1，2，…，n列，由此所得到的行列式称为D的**转置行列式**，用D'表示，即

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$