YANJIUSHENGSNUXUESHITI JIEDA

研究生数学试题解答

下册

武汉工学院电子工程系

目　录

二、代数部分

三、复变函数部分

四、微分方程部分

五、数学分析部分

二、代数部分

62 上海科技大学（线性代数）

一、（15分）

1．**证明**：在二维向量空间R^2中，向量(a_1,a_2)，(b_1,b_2)线性相关的充分必要条件是$a_1b_2=a_2b_1$。

2．写出在n维向量空间R^n中，向量组$(a_{i1}，a_{i2}，\cdots，a_{in})$，$(i=1，\cdots，n)$为线性相关的充分必要条件。

证明：若$(a_1，a_2)$与$(b_1，b_2)$线性相关，则有不全为0的数c_1，c_2使

$$c_1(a_1，a_2)+c_2(b_1，b_2)=(0，0)。$$

不妨设$c_1\neq 0$，除以c_1到得

$$(a_1，a_2)=-\frac{c_2}{c_1}(b_1，b_2)$$

亦即

$$a_1=-\frac{c_2}{c_1}b_1，\qquad a_2=-\frac{c_2}{c_1}b_2$$

故有

$$a_1b_2=-\frac{c_2}{c_1}b_1b_2=-\frac{c_2}{c_1}b_2b_1=a_2b_1。$$

反之，若$a_1b_2=a_2b_1=k$，若$k=0$，不妨设$a_1=0$，若$a_2=0$，则$(a_1，a_2)$为0向量，当然$(a_1，a_2)$与$(b_1，b_2)$线性相关；若$b_1=0$，则化为$(0，a_2)$，$(0，b_2)$当然线性相关。若$k\neq 0$，则有

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\mu$$

从而有

$$(a_1,\ a_2)-\mu(b_1,\ b_2)=0$$

即$(a_1,\ a_2)$与$(b_1,\ b_2)$线性相关。证毕。

在R^n中，向量组$(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})$，$(i=1,\ \cdots,\ n)$线性相关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

二、（15分）

1．验证：在n维欧氏空间R^n中，与子空间W中的一切向量都正交的所有向量的集合W^+也是R^n的一个子空间。

证明：设a，$b\in W^+$，α，β为常数，则于任何$\nu\in W$。

$$a\cdot\nu=0,\ b\cdot\nu=0$$

于是有

$$(\alpha a+\beta b)\cdot\nu=(\alpha a)\cdot\nu+(\beta b)\cdot\nu=\alpha a\cdot\nu+\beta b\cdot\nu=0$$

故知$\alpha a+\beta b\in W^+$。从而知W^+为一线性子空间。

2．在四维向量空间R^4中，设W是由向量$(1,\ 0,\ 1,\ -1)$，$(0,\ 1,\ 1,\ 1)$所生成的一个子空间，试求出子空间W^+。

解：设向量$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ )\in W^+$，则有

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3-\alpha_4=0\\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\end{cases}$$

这个方程组显然有无穷多组解，我们从中挑出两组线性无关的：　　$(1,\ 1,\ -1,\ 0)$，$(1,\ -1,\ 0,\ 1)$

而w^+又必为2维的，故w^+就是由$(1,\ 1,\ -1,\ 0)$与$(1,\ -1,\ 0,\ 1)$所生成的子空间。

三、（15分）在欧氏空间R中定义变换T：

$$\alpha T=\alpha-k(\alpha,\ \omega)\omega,\qquad \alpha\in R,$$

其中ω是一个单位向量，k是一个实数，$(\alpha,\ \omega)$是向量α与ω的内积。

1．验证：T是一个线性变换；

证明：对任意α，$\beta\in R$，我们有

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)T&=(\alpha+\beta)-k((\alpha+\beta),\ \omega)\omega\\&=\alpha+\beta-k(\alpha,\ \omega)\omega-k(\beta,\ \omega)\omega\\&=\alpha T+\beta T.\end{aligned}$$

又对任何实数λ，有

$$\begin{aligned}(\lambda\alpha)T&=\lambda\alpha-k(\lambda\alpha,\ \omega)\omega\\&=\lambda(\alpha-k(\alpha,\ \omega)\omega)=\lambda(\alpha T).\end{aligned}$$

从而按定义知T为一线性变换。

2．求出k值，使T为正交变换。

解：先求出线性变换T所对应的矩阵A

$$\begin{aligned}\alpha T&=\alpha-k(\alpha,\ \omega)\omega=\alpha I-k\alpha\omega'\omega\\&=\alpha(I-k\omega'\omega),\end{aligned}$$

可见 $$A=I-k\omega'\omega.$$

若记A的行向量为a_j，$j=1,\ \cdots,\ n$，则为使A为正交阵，只须有
$$\begin{cases}a_j\cdot a_j=1 & j=1,\ \cdots,\ n,\\ a_i\cdot a_j=0 & i\neq j.\end{cases}$$

具体写出来即

$$\begin{cases}k^2\omega_j^2\omega_1^2+\cdots+k^2\omega_j^2\omega_{j-1}^2+(1-k\omega_j^2)^2+k^2\omega_j^2\omega_{j-1}^2\\ \quad+\cdots+k^2\omega_j^2\omega_n^2=1\\ k^2\omega_i\omega_j\omega_1^2+k^2\omega_i\omega_j\omega_2^2+\cdots+(1-k\omega_i^2)(-k\omega_i\omega_j)+\\ \quad\cdots+(-k\omega_i\omega_j)(1-k\omega_j^2)+\cdots+k^2\omega_i\omega_j\omega_n^2=0\end{cases}$$

化简并注意 $\|\omega\| = 1$，得到

$$\begin{cases} 1 - 2k\omega_j^2 + k^2\omega_j^2 = 1, & j = 1, \cdots, n \\ -2k\omega_i\omega_j + k^2\omega_i\omega_j = 0 & i \neq j \end{cases}$$

解得 $k = 0$ 或 $k = 2$。即当 $k = 0$ 或 $k = 2$ 时，T 为正交变换。

四、(20分)设 A 是一个 $n \times n$ 矩阵。证明：如果 $A_2 = A$，则 A 的特征值是 1 或 0，且 A 的秩等于 A 的迹。

证明： 设 A 的 Jordan 标准形为 J，即有非异方阵 P，使

$$P^{-1}AP = J$$

于是有

$$J = P^{-1}AP = P^{-1}A^2P = P^{-1}APP^{-1}AP = J^2.$$

设

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_S \end{pmatrix}$$

其中 $J_j\,(j = 1, \cdots, s)$ 为 Jordan 小块，则有

$$J^2 = \begin{pmatrix} J_1^2 & & & \\ & J_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_S^2 \end{pmatrix}$$

从而有

$$J_j = J_j^2, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

由此可知，诸 J_j 都是一阶的且对应的特征值为 0 或 1。因此可设

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad 0 \leqslant r \leqslant n$$

于是

$$秩(A)=秩(J)=T_r(J).$$

但在矩阵求迹的运算中可交换矩阵的次序，故有

$$T_r(J)=T_r(P^{-1}AP)=T_r(APP^{-1})=T_r(A)$$

从而得到

$$秩(A)=T_r(A).$$

五、(15分)设A,B是两个$n\times n$实对称矩阵且A为正定。证明必存在可逆矩阵P，使

$$A=P'P,\quad B=P'\begin{pmatrix}u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n\end{pmatrix}P,$$

其中P'为P的转置矩阵。

证明：因为A为正定实对称矩阵，故有非异方阵Q，使

$$QAQ'=I_n$$

令 $$B_1=QBQ'$$

则B_1也是$n\times n$实对称矩阵，于是有正交变换T，使

$$B_2=TB_1T'$$

为对角形，同时

$$TQAQ'T'=TT'=I_n.$$

令$P=(TQ)'^{-1}$，则$P'=(TQ)^{-1}$，于是

$$A=(TQ)^{-1}(TQ)'^{-1}=P'P$$

而

$$B=(TQ)^{-1}B_2(TQ)'^{-1}=P'B_2P.$$

六、(20分)设A是一个$n\times n$矩阵有n个不同特征值，则凡满足$AB=BA$的$n\times n$矩阵B，其特征矩阵的初等因子都是一次的。

证明：因为A有n个不同的特征值，故它的Jordan标准形为对角形，且对角元恰为它的n个特征值，亦即有非异的

矩阵P，使

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

记$B_1=P^{-1}BP$，则

$$B_1J=P^{-1}BPP^{-1}AP=P^{-1}BAP=P^{-1}ABP=JB_1.$$

若记$B_1(b_{ij})$，则

$$B_1J=\begin{pmatrix}\lambda_1b_{11} & \lambda_2b_{12} & \cdots & \lambda_nb_{1n}\\ \lambda_1b_{21} & \lambda_2b_{22} & \cdots & \lambda_nb_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1b_{n1} & \lambda_2b_{n2} & \cdots & \lambda_nb_{nn}\end{pmatrix},$$

$$JB_1=\begin{pmatrix}\lambda_1b_{11} & \lambda_1b_{12} & \cdots & \lambda_1b_{1n}\\ \lambda_2b_{21} & \lambda_2b_{22} & \cdots & \lambda_2b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1b_{n1} & \lambda_2b_{n2} & \cdots & \lambda_nb_{nn}\end{pmatrix}$$

比较两个得阵的诸相同位置的元素，并注意λ_1，…，λ_n互不相同，便得　$b_{ij}=0$，$i\neq j$.

从而 B_1为对角矩阵，当然它的特征矩阵的初等因子都是一次的。因为$B\sim B_1$，故B的特征矩阵的初等因子也都是一次的.

63　上海纺织工学院（线性代数）

一、（10分）已知1998，2196，2394，1800都能被18除尽，试证（不能用算行列式的值来证明）：三阶行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 9 & 9 & 8\\ 2 & 1 & 9 & 6\\ 2 & 3 & 9 & 4\\ 1 & 8 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

也能被18整除。

证法（一） 将第1列乘以1000后加到第4列，将第2列的100倍再加到第4列，再将第3列的10倍加到第4列，于是得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 1998 \\ 2 & 1 & 9 & 2196 \\ 2 & 3 & 9 & 2394 \\ 1 & 8 & 0 & 1800 \end{vmatrix}$$

因第4列所有元素都能被18整除，故行列式亦能被18整除。

证法（二） 因为第3列可以被9整除，第4列能被2整除，故行列式可被18整除。

二、（10分）当m为何值时，下列二次齐式为正定：

$$5\xi_1^2 + \xi_2^2 + m\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3$$

解法（一） 这个二次齐式所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

计算行列式的值可得$m-2>0$，即当$m>2$时，所论二次齐式是正定的。

解法（二） 这个二次齐式所对应的矩阵的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & m-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (6+m)\lambda^2 - (6m-1)\lambda$$

$$+(m-2) = 0$$

为使原二次齐式为正定，必须且只须三个特征根均为正，利用根与系数的关系便知有$m-2>0$，即$m>2$。这时特征方

程（1）之奇次项系数为负，偶次项系数均为正，故不可能有负根，由此知当$m>2$时，三个特征根均为正，此时原二次齐式为正定。

解法（三） 这个二次齐式所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

利用合同变换将它化为对角形：

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & m-\frac{1}{5} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix}$$

由二次型的惯性定理知原二次齐式正定当且仅当$m>2$。

三、（21分）设$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，计算$A^{100}$

解：先求A的Jordan标准形：

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & \lambda-3 \\ \lambda-2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & \lambda-3 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-3)-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2-5\lambda+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-4) \end{pmatrix}$$

因而有

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

再用待定系数法求化标准形所用的非异方程P：设

$$P=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},\ ad-bc=1, \quad P^{-1}=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

则有

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3bc & ac3 \\ -3bd & 1+3ad \end{pmatrix}$$

于是得到联立方程组

$$\begin{cases} 1-3bc=2 \\ -3bd=2 \\ 3ac=1 \\ 1+3ad=3 \\ ad-bc=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} bc=-\frac{1}{3} \\ bd=-\frac{2}{3} \\ ac=\frac{1}{3} \\ ad=\frac{2}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} bc=-\frac{1}{3} \\ d=2c \\ a=-b \end{cases}$$

可以求得一组解：

$$a=1,\ b=-1,\ d=\frac{1}{3},\quad d=\frac{2}{3}$$

于是 $$P=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因而

$$A^{100}=PJ^{100}P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2+4^{100}) & \frac{1}{3}(-1+4^{100}) \\ \frac{2}{3}(-1+4^{100}) & \frac{1}{3}(1+2\times 4^{100}) \end{pmatrix}$$

其它方法请看吉林大学（一）高等代数第一题

四、（21分）满秩矩阵，正交矩阵以及对称矩阵（设它有逆矩阵），它们的逆矩阵是否仍为同类矩阵？为什么？并分别举出满秩矩阵，正交矩阵以及对称矩阵各一例。

解： 1°满秩矩阵的逆仍为满秩矩阵。

因为按定义 $\quad AA^{-1}=I$

$$|A|\cdot|A^{-1}|=1$$

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\neq 0$$

故 A^{-1} 为满秩矩阵，而且降秩矩阵根本没有逆矩阵。

2°．正交阵的逆矩阵仍为正交阵。

若 T 为正交阵，按定义有

$$TT' = I,$$

$$(T')'T' = I.$$

这就表示T'为正交阵。

3°. 对称矩阵的逆矩阵亦为对称矩阵。

设A为对称矩阵，即$A' = A$。由

$$AA^{-1} = I$$

取转置有

$$I = (A^{-1})'A'.$$

两端右乘$(A')^{-1}$即得

$$A^{-1} = (A')^{-1} = (A^{-1})'$$

这就是说A^{-1}为对称矩阵。

4°. 例如：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_1，A_2，A_2都是满秩的，A_2是正交阵，A_2，A_3都是对称矩阵。

五、（18分）设α_1，α_2，…，α_n与β_1，β_2，…，β_n 是线性空间V的两个基底，且

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)p,$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n & a_{n2} \ \cdots \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果V中元a在这二个基底下的坐标分别为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

试证

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

证明： 按坐标定义有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = a = \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j \qquad (1)$$

按已知有

$$\beta_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i$$

代入（1）式有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) \alpha_i \qquad (2)$$

因$\{\alpha_i, \ i=1, \ \cdots, \ n\}$为基底，故

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i=1, \ \cdots, \ n.$$

写成矩阵形式即

$$x = Py.$$

证毕。

六、（20分）试证n阶矩阵A与对角矩阵相似的充分必

要条件是A有n个线性无关的特征向量。

证法（一）充分性。设n个线性无关的特征向量是ν_1，ν_2，…，ν_n，它们分别对应的特征值是λ_1，…，λ_n，令

$$B=(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n),$$

则B非异且

$$AB=A(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)=(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=B\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

从而有

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

即A相似于对角矩阵。

必要性。设

$$A\sim C=\begin{pmatrix}c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n\end{pmatrix}$$

又设c_1，…，c_n中互异的值为c_1，…，c_r重数分别为t_1，…，t_r，则

$$t_1+\cdots+t_r=n$$

对于齐次线性方程组

$$(\lambda I-A)x=0,$$

当$\lambda=c_j$，$(j=1, \cdots, r)$时，矩阵$(\lambda I-A)$的秩为$n-t_j$，因而有t_j个线性无关解向量：ν_k^j，$k=1$，…，t_j。它们就是A的属于c_j的特征向量。又因属于不同特征值的向量线性无关，故可以断言，向量组$\{\nu_k^j, k=1, \cdots, t_j; j=1, \cdots, r\}$

线性无关，且恰为n个。证毕。

证法（二） 充分性。设A的Jordan标准形为J：

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_S \end{pmatrix}$$

若α为J的特征向量，即 $J\alpha=\lambda\alpha$

则左乘P有

$$AP\alpha=PJP^{-1}P\alpha=PJ\alpha=P\lambda\alpha=\lambda P\alpha.$$

即$P\alpha$为A的特征向量。又因P非异，故知A与J之线性无关特征向量数相同。而J的每个 Jordan小块恰有一个特征向量，从而J的线性无关的特征向量恰为s个，故$s=n$，这就是说每个Jordan块都是一阶的，亦即J为对角矩阵。

必要性。设

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}.$$

则

$$Je_j=c_je_j,\quad e'_j=(0,\cdots,0,\overset{\substack{j\text{列}\\ \uparrow}}{1},0,\cdots,0),\quad j=1,\cdots,n.$$

即J有n个线性无关的特征向量，从而A亦n有个线性无关的特征向量。

64 中山大学（高等代数）

一、（25分）完成下列计算：

1．已知

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求A^{-1}

解： 将A写成分块的形式：

$$A=\begin{pmatrix} B & D \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

容易看出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ D^{-1} & -D^{-1}BC^{-1} \end{pmatrix}$$

对于二阶方阵C，D，容易算出其逆分别为

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},\quad D^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

于是

$$D^{-1}BC^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

最后得到

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2．化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=17x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3+13x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$为标准形，并求出相应的非退化线性换变。

解： 显然，二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$所对应的对称矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 17 & -1 & 2 \\ -1 & 13 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$