北京市金属学会轧钢工程师技术培训班教材之三

现代轧钢技术

北京市金属学会

一九八三年一月

北京市金属学会轧钢工程师技术培训班教材之三

目　　录

有限单元法及其在塑性加工中的应用

乔　端　　钱仁根

（北京钢铁学院）

一、概　述

在塑性加工过程中，需要对加工力，如轧制力、轧制力矩等进行估算；对被加工件，如轧件中的塑性流动规律进行分析；以及对加工工具，如轧辊、轧钢机架等进行强度、刚度的校核。在这些计算中，如对于加工工具零部件的强度校核等，目前较多的仍使用材料力学方法。例如，将轧辊简化为简支梁(图1—a)；将机架简化为由杆系组成的刚架(图1—6)。而对于被加工件的塑性变形问题，则基本上应用工程近似法，如在平面应变条件下的锻压(图2—a)和平板轧制过程(图2—b)，用切片法从物体中取出受力微元，利用简化的平衡方程和近似屈服条件求解。

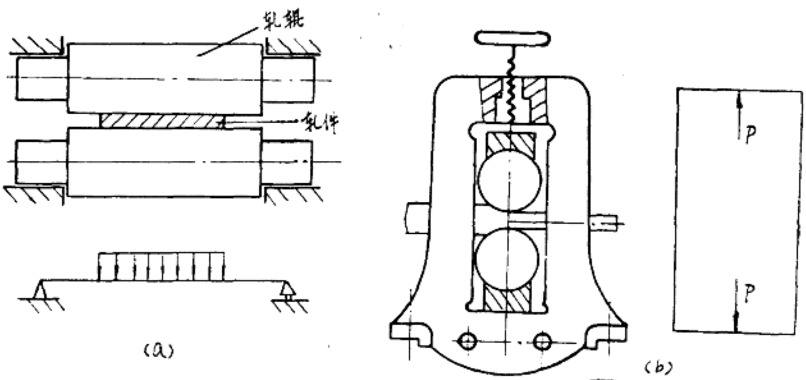

图1　轧辊和轧钢机架的受力图简

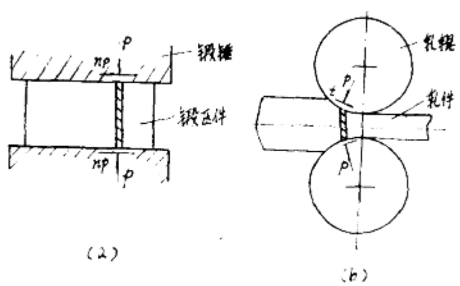

图2　平面应变条件下锻压件和轧件中微元的受力简图

随着塑性加工生产向着现代化发展，使用电子计算机控制生产日趋普遍。为了建立供电子计算机使用的数学模型以及提高其精度，从而要求对加工力，金属塑性流动规律，加工工具强度、刚度等进行精确的分析和计算。于是在塑性加工过程的分析中，弹性与塑性理论得到日益广泛的应用。

用来求解在外力作用下处于弹性或弹塑性变形状态物体中的应力和变形分布规律的弹性与塑性理论是以假设物体为均匀的连续体为前提的。从考虑受力物体的平衡方程，变形的几何条件和联系力与变形的物理定律三个方面来建立基本方程。根据物体的已知边界条件来求解。但是只有当物体的形状比较规则，受力比较简单时，才有可能求得问题的解析解。因而针对不同问题提出了各种近似的分析方法和实验测定的方法。有限单元法就是当问题难于求得精确的解析解时的一种卓有成效的数值解法。其基本方法是将受力物体分割为许多微小不同形状的单元。通常以三角形单元为最方便。这些单元彼此在节点处连接，这样的单元集合体就代表了原来的物体。图 3 为由三角形单元组成的平板。选择简单的函数来近似地描述每个单元在节点处的真正位移变化规律。于是从每个单元到整个物体建立物体所需满足的基本方程。这样的方程已不再是微分方程了，而是简单的代数方程组。虽然当将组成物体的单元分得很微小时，则需要解大量的联立代数方程组，但是可以通过编制计算程序，利用能够进行高速运算的电子计算机进行计算，可以使问题容易得到解决。

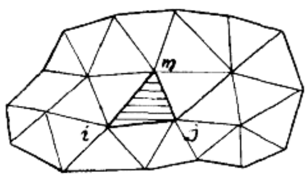

图 3　由三角形单元组成的平板

由于组成物体的许多微小单元是可以以任意方式排列的，所以它们可以模拟非常复形状的物体，这就改变了一定要将工程中的实际构件的形状简化为已有解析解的抽象物体形状的削足适履的作法，而按原来物体形状和受力进行分析。

由于有限单元法是将物体离散化，因而可用来求解非均质的物体，例如，组合材料的受力问题，也可以用来分析非连续的物体，例如，在进行地下巷道围岩应力分析时，可以考虑岩石的解理层、断层的影响。

有限单元法不但可以进行受力物体当其处于弹性变形阶段时的应力和变形，还可以用来分析当物体处于弹塑性变形阶段时的非线性问题。不但可以解决变形物体处于静态时的平衡问题，也可以解决动载荷作用下应力波的传播问题。甚至在流体力学中的渗流、固体和流体中稳态温度分布和瞬时热流，电磁现象等很多工程问题中得到广泛的应用。随着在理论研究中不断取得重大进展，有限单元法的应用范围也随之不断地扩大。

要掌握有限单元法的原理和运算方法，除需要有一定的弹性与塑性理论的基础外，还需要具备矩阵代数、数值分析以及计算机算法语言等方面的知识。限于篇幅，我们现在则着重介绍基本概念，尽量少作数学运算，甚至用直接给出结果的方法来阐明有限单元法的基本原理及其在塑性加工中的应用。因而对编制计算程序，上机计算等内容就不做详细介绍了。

二、弹性理论平面问题的基本方程

1. 平面应力状态

弹性理论的平面问题包括平面应力状态和平面应变状态问题。平面应力状态问题所研究的是等厚度薄板形式的物体。在物体边界上作用着平行于薄板平面，并沿薄板厚度均匀分布的外力，而垂直于板面方向的应力等于零（图4—a）。平面应变状态问题则研究沿物体长度方向承受均匀分布的外力（图4—b）。由于物体长度远大于其横向尺寸，在长度方向的变形受到限制，因而其应变为零。若取如图4—a，b所示的坐标系，则在平面应力状态有$\sigma_z = 0$，$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$；而在平面应变状态有$\varepsilon_z = 0$。工程实际中不少设备的零部件或建筑物中的构件可以简化为平面应力或平面应变问题。如轧钢机机架，一般简化为平面应力问题。而滚动轴承中长滚柱以及在内压力作用下的管道等，则简化为平面应变问题。

若从受力物体中取出一正六面体微元，其厚度为t，则一般平面应力状态如图5—a所示。其应力分量为正应力σ_x，σ_y和剪应力τ_{xy}，τ_{yx}。根据剪应力互等定理得

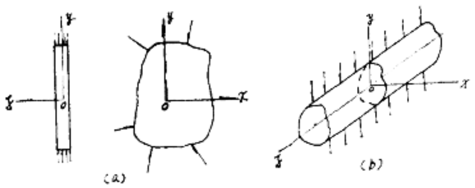

图 4　平面应力状态和平面应变状态

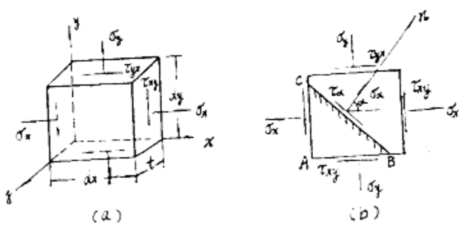

图 5　一般平面应力状态

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

设取任意斜截面BC，其法线n与x轴的夹角为α。斜截面上的正应力为σα；而剪应力为τα。由微元体的ABC部分的平衡（图5—b）可以求得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

公式表明，斜截面上的正应力σα和剪应力τα随角α而变化。为了确定最大、最小正应力，最大剪应力以及它们作用面的方位，将（1）式中的第一式对α取导数，若当$\alpha = \alpha_0$时由使$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0$得

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2)$$

由上式确定的二互相垂直面上的正应力分别达到最大与最小，同时在该截面上的剪应力为

零，这样的截面称为主平面。作用于主平面上的正应力称为主应力，以σ_1，σ_2表示

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1=\sigma_{max}\\ \sigma_2=\sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2} \tag{3}$$

同样，将(1)式中的第二式对α取导数，若$\alpha=\alpha_1$时，由使 $\frac{d\tau\alpha}{d\alpha}=0$ 得

$$t_{an}\,2\alpha_1=\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2\tau_{xy}} \tag{4}$$

从而确定两个互相垂直的截面，分别作用着最大和最小剪应力

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2} \tag{5}$$

2. 位移与应变的关系

物体受力后发生变形，则组成整个物体的每一个正六面体微元将发生边长的伸缩和直角的改变。设从平面应力状态受力物体中取出一矩形微元ABCD，则在变形后变为A′B′C′D′（图6）用u和v分别表示A点在x，y方向的位移。一般情况下，位移应该与该微元的位置有关，即u，v为x，y的函数。由A到B坐标y不变，而x的增量为dx。因而B点在x，y方向的位移应分别为

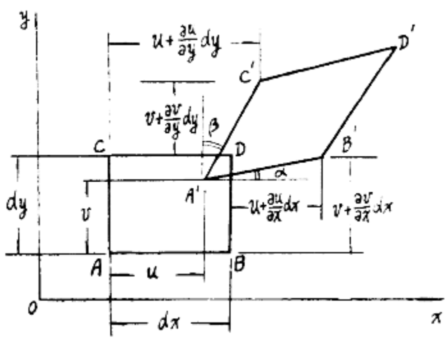

图6 矩形微元ABCD的变形

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx,\qquad v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

所以线段AB沿x方向的伸长为

$$(dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx-u)-dx=\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

沿x方向线应变为

$$\varepsilon_x=\frac{(dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx-u)-dx}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{a}$$

同理，线段AC 沿y方向的应变为

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \tag{b}$$

若以α表示A′B′对其原来位置AB的转角，则

$$\alpha\approx t_{an}\alpha=\frac{v+\frac{\partial v}{\partial x}dx-v}{dx}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

用完全相同方法可求得A′C′对AC的转角β

$$\beta=\frac{\partial u}{\partial y}$$

显然，$\alpha+\beta$表示直角∠BAC在变形时的角度改变，即剪应变

$$\gamma_{xy}=\alpha+\beta=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{c}$$

于是得平面问题中一点的位移分量与应变分量间的关系为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\tag{6}$$

3． 弹性应力—应变关系

在简单拉伸或压缩时，对绝大多数材料，当其处于弹性变形阶段，其应力—应变关系可用虎克定律表示

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}$$

而在一般的三向应力状态下的广义虎克定律为

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]\\
&\varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]\\
&\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]\\
&\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G},\quad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G},\quad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

式中：E为材料的拉压弹性模量；G为剪切弹性模量；而μ为泊松比。这三个常数间存在着下列关系

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

在平面应力状态下，由于

$$\sigma_z=0,\quad \tau_{yz}=0,\quad \tau_{zx}=0$$

于是(d)式变为

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\
&\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\
&\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

在平面应变状态下，由于$\varepsilon_z=0$，于是由（d)式中的第三式得

$$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)\tag{e}$$

同时由于 $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$

于是得到

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right)\\
&\varepsilon_y=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right)\\
&\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

在(8) 式中若引用下列记号

$$E_1=\frac{E}{1-\mu^2},\quad \mu_1=\frac{\mu}{1-\mu}$$

则(8) 式变为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E_1}(\sigma_x-\mu_1\sigma_y)\\\varepsilon_y&=\frac{1}{E_1}(\sigma_y-\mu_1\sigma_x)\\\gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

(7)式和(9) 式在形式上是完全相同的。

4. 弹性变形能、虚功原理

在外力作用下弹性体产生变形。在变形过程中，外力完成一定数量的功。外力的功以变形能的方式储藏于弹性体中。而当外力除去后，已变形的弹性体慢慢恢复到原来形状。

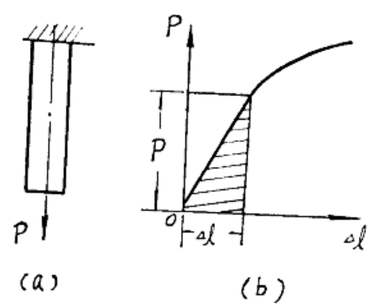

图 7 杆件的拉伸曲线

在简单拉伸时，设杆件的截面面积为F，长为l，在外力P作用下杆件产生变形，其拉伸曲线如图7所示。当杆件处于弹性变形阶段，曲线下的面积（图中划阴影部分）即表示外力功的大小。

$$W=\frac{1}{2}p(\triangle l)$$

在无能量损失的条件下，外力的功在数值上等于储藏于杆件中的变形能

$$A=W=\frac{1}{2}p(\triangle l)$$

单位体积内的变形能称为变形比能或应变能

$$V=\frac{A}{Ft}=\frac{1}{2}\ \frac{P}{F}\ \frac{\triangle l}{l}=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

对于一般三向应力状态，为了计算储藏于弹性体中的变形比能，我们从物体中截取出边长为dx，dy和dz的微元体。假设在此微元体上仅作用有正应力σ_x（图8—a）。若用u表示侧面ACHO在x方向的位移分量，则BDGF面对应的位移分量为$u+(\frac{\partial u}{\partial x})dx$，在ACHO面上，力$\sigma_x dydz$与位移u的方向相反，而在BDGH面上它们的方向则相同。在变形过程中，应力分量σ_x从零增至某一数值σ_x，而位移u从零增至u，于是作用于ACHO面和BDGH面上力所做的净功，即储藏于微元体内的变形能为

$$A=W=\int_0^{\sigma x}\sigma_x\, d\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dydz-\int_0^{\sigma x}\sigma_x du\,dydz$$

$$=\int_0^{\sigma x}\sigma_x\, d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdydz$$

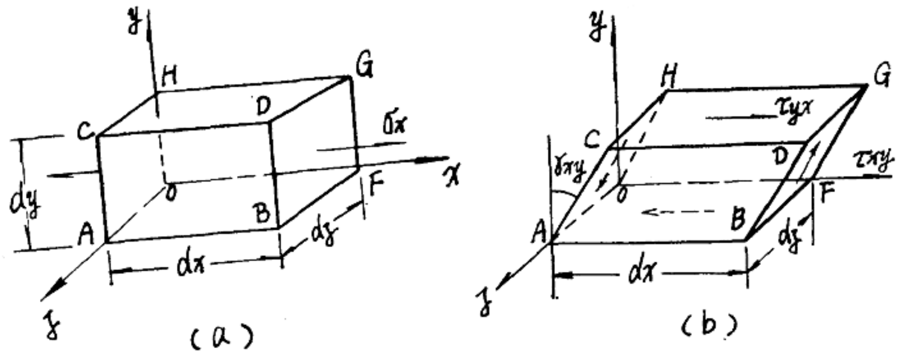

图 8　正应力和剪应力作用的微元体

由 $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E}$，得

$$A = \int_0^{\sigma_x} \frac{\sigma x}{E} d\sigma_x dxdydz = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x dxdydz$$

由此得单位体积内的变形能为

$$U = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x$$

对于剪应力作用下的微元体，由图8-b可以看出：作用于微元体CDGH面上的力等于 $\tau_{xy}dx$ dz，而在此方向的位移为$\gamma_{xy}dy$。由此求得力所做的功，即储藏于微元体内的变形能为

$$A = W = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}dxdydz$$

变形比能为

$$U = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}$$

由于储藏于弹性体中的变形能仅与最终的应力状态有关，而与应力作用的先后次序无关，同时，由虎克定律看出，正应力将不产生任何剪应变，而剪应力也不引起任何线应变。因此可以求出，在一般三维应力状态下，储藏于物体内一点附近的变形比能为

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{10}$$

我们现在来介绍虚功原理的概念。在理论力学中曾讨论过刚体的虚功原理。设在刚体上作用有平衡力系，P_1，P_2……P_n。在力作用点处相应的虚位移分别为$\triangle_1^*$，$\triangle_2^*$，…，Δn^*对于刚体来讲，作用于其上的诸力在相应虚位移上所做的总功等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\triangle_i^* = 0$$

对于连续的弹性体，如果弹性体处于平衡状态，当其产生在约束条件下所许可的微小虚位移时（图 9），则外力在虚位移上所做的虚功等于整个弹性体的虚变形能。

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\ S_i^* = \iiint(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})dxdydz \tag{11}$$

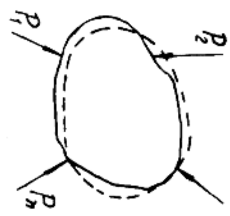

图9　作用于物体上的平衡力系

三、矩阵代数的简介

由于有限单元法最后归结为求解联立的代数方程组，因而在介绍有限单元法的基本原理和计算方法时，关于矩阵代数方面的基本概念和一些简单的运算法则是必不可少的。

1. 矩阵的概念

设有由m个线性关系连系起来的n个未知量x_1，x_2，……xn，可以写出下列方程组

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ & \cdots\cdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots a_{mn}x_n=b_m \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

上列方程组可以用矩阵记号写做

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} \tag{b}$$

并可用缩写记号写做

$$[A]\{x\}=\{b\} \tag{12}$$

其中：

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \tag{c}$$

称为m×n阶矩阵。它是由m×n个数a_{ij}（$1\leq i\leq m$，$1\leq j\leq n$）构成的一个m个横行，n个竖列的矩形数表。矩阵[A]和行列式 $|A|$ 虽然在记法上非常相似。但是在意义上却是完全不同的。矩阵[A]根本不象行列式 $|A|$ 那样代表一个数，而只是一些数所构成的一个表格。

未知量x的矩阵被写做

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \tag{d}$$

它是只有一列的矩阵，称为矢量。这时用记号｛ ｝代替〔 〕。类似的，对于方程组等号右边项b矢量有

$$\{b\}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} \tag{e}$$

2． 转置矩阵

若交换矩阵相应的行与列，则形成转置矩阵

$$[A]^T=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{21}\cdots\cdots a_{m1} \\ a_{12}\ a_{22}\cdots\cdots a_{m2} \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}\ a_{2n}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

根据转置矩阵的定义和记号，则用列矩阵表示的矢量(d)，(e) 式可改为行矩阵

$$\{x\}=[x_1 x_2\cdots\cdots x_n]^T$$

$$\{b\}=[b_1 b_2\cdots\cdots b_m]^T$$

3． 矩阵的乘法

矩阵的数乘就是用一个常数λ去乘矩阵〔A〕的所有每一个元素。

$$\lambda[A]=[A]\lambda=\begin{bmatrix} \lambda a_{11}\ \lambda a_{12}\cdots\cdots\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21}\ \lambda a_{22}\cdots\cdots\lambda a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ \lambda a_{m1}\ \lambda a_{m2}\cdots\cdots\lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

设有一个$m\times n$阶的矩阵〔A〕和一个$n\times p$阶的矩阵〔B〕

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix} b_{11}\ b_{12}\cdots\cdots b_{1p} \\ b_{21}\ b_{22}\cdots\cdots b_{2p} \\ \cdots\cdots \\ b_{n1}\ b_{n2}\cdots\cdots b_{np} \end{bmatrix}$$

并且另有一个$m\times p$阶的矩阵

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11}\ c_{12}\cdots\cdots c_{1p} \\ c_{21}\ c_{22}\cdots\cdots c_{2p} \\ \cdots\cdots \\ c_{m1}\ c_{m2}\cdots\cdots c_{mp} \end{bmatrix}$$

矩阵〔C〕为矩阵〔A〕与〔B〕的乘积，按先〔A〕后〔B〕的次序记做

$$[A][B]=[C] \tag{13}$$

则〔C〕中第i行第j列的元素等于〔A〕中第i行与〔B〕中第j列的对应元素乘积之和

$$C_{ij}=\sum_{t=1}^{n} a_i tbtj,\quad (1\le i\le m,\ 1\le j\le p) \tag{14}$$

例如矩阵

$$[a]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{和} \ [b]=\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Bmatrix}$$

相乘，则由(14)式得矩阵[C]中任一元素，如

$$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}$$

根据矩阵乘法的性质可以证明，矩阵乘法的结合律

$$([A][B])[C]=[A]([B][C]) \tag{15}$$

和矩阵乘法的分配律

$$[C]([A]+[B])=[C][A]+[C][B] \tag{16}$$

但矩阵乘法的交换律一般是不成立的，即

$$[A][B]\neq[B][A]$$

例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

二矩阵乘积的转置矩阵等于二矩阵分别转置以后的乘积，但须逆其次序，这是矩阵乘积的一个逆序法则

$$([A][B])^T=[B]^T[A]^T \tag{17}$$

四、弹性平面问题的有限单元法

1. 位移函数

设从图3所示处于平面应力状态物体中取出一个三角形单元。在xy坐标系中，它的三个节点用i，j，m表示，而节点的坐标分别用x_i，y_i，………y_m等表示。单元内任一点在x，y方向的位移分量u和V的简单描述是假定u和V为x，y的线性函数

$$\left.\begin{aligned} u&=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y \\ v&=\alpha_4+\alpha_5x+\alpha_6y \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

式：α_1，α_2，………α_6等均为常数，(a)式所表示的位移函数是事先假定的位移规律，也称为位移模式。若单元三个节点i，j，m的位移分别为ui，V_i，u_j，………V_m，则将三个节点的坐标代入(a)式后，则有

$$\left.\begin{aligned} u_i&=\alpha_1+\alpha_2x_i+\alpha_3y_i, & v_i&=\alpha_4+\alpha_5x_i+\alpha_6y_i \\ u_j&=\alpha_1+\alpha_2x_j+\alpha_3y_j, & v_j&=\alpha_4+\alpha_5x_j+\alpha_6y_j \\ u_m&=\alpha_1+\alpha_2x_m+\alpha_3y_m, & v_m&=\alpha_4+\alpha_5x_m+\alpha_6y_m \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

由上列方程组左边三式解出α_1，α_2和α_2，由右边三式解出α_4，α_5和α_6，然后代入(a)式中得出

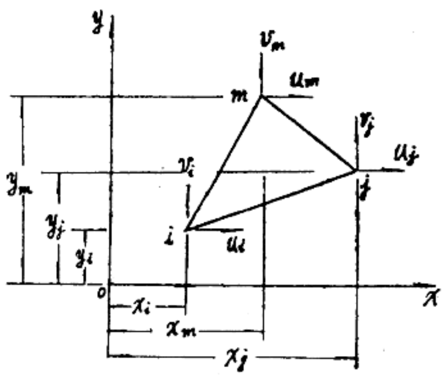

图10　三角形单元节点位移

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \left[\frac{a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m}{2\triangle}\right] + \left[\frac{b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m}{2\triangle}\right] x \\
&\quad + \left[\frac{c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m}{2\triangle}\right] y \\
v &= \left[\frac{a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m}{2\triangle}\right] + \left[\frac{b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m}{2\triangle}\right] x \\
&\quad + \left[\frac{c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m}{2\triangle}\right] y
\end{aligned}\right\} \tag{18}
$$

式中：

$$
\left.\begin{aligned}
& a_i = x_j y_m - x_m y_j,\quad b_i = y_j - y_m,\quad c_i = x_m - x_j \\
& a_j = x_m y_i - x_i y_m,\quad b_j = y_m - y_i,\quad c_j = x_i - x_m \\
& a_m = x_i y_j - x_j y_i,\quad b_m = y_i - y_j,\quad c_m = x_j - x_i \\
& \triangle = \tfrac{1}{2}(x_j y_m + x_m y_i + x_i y_j - x_m y_j - x_i y_m - x_j y_i) \\
& \quad = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{19}
$$

△为三角形单元ijm的面积，当i，j，m的顺序反时针方向时，△总为正值。

选择(a)式作为位移函数，能够保证相邻单元之间位移的连续性，例如，图 11 中相邻二单元ijm和ipj，ij为其公共边。由于(a)式表示的位移是坐标的线性函数，所以沿直线ij位移也是线性变化的。当二单元在i，j点处产生相同位移时，沿二单元的公共边界上肯定有同样的位移。所以用由三角形单元组成的离散体代替原来的连续体后，在外力作用下，相邻二单元之间仍能保持连续性。

2． 用节点位移表示应变。几何矩阵

将(18)式分别对x，y微分，由(6)式得到应变分量的表达式为

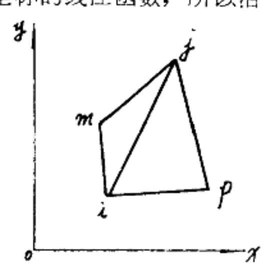

图11　相邻单元间位移的连续性

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2\triangle}[b_i u_i + O + b_j u_j + O + b_m u_m + O] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\triangle}[O + c_i v_i + O + c_j v_j + O + c_m v_m] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2\triangle}[c_i u_i + b_i v_i + c_j u_j + b_j v_j + c_m u_m + b_m v_m]\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

上列方程组可以写做矩阵表达式

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{1}{2\triangle}\begin{bmatrix} b_i & O & b_j & O & b_m & O \\ O & c_i & O & c_j & O & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m\end{Bmatrix} \tag{21}$$

引用下列矩阵记号

$$\left.\begin{aligned}&\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}, \quad \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix}\delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m\end{Bmatrix} \\ &[B] = \frac{1}{2\triangle}\begin{bmatrix} b_i & O & b_j & O & b_m & O \\ O & c_i & O & c_j & O & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

则(21)式可进一步简化写做

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e \tag{23}$$

矩阵[B]是单元节点位置坐标的数组，称为几何矩阵。

对于任一个指定单元来说，△，bi，ci，bj，……Cm等都是常量，所以矩阵[B]的元素都是常量。当单元的三个节点的位移已知时，容易求出单元的应变状态。

3. 用节点位移表示应力，弹性矩阵

由(7)式解出应力分量σ_x，σ_y和τ_{xy}

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \left(\frac{E}{1-\mu^2}\right)\varepsilon_x + \left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}\right)\varepsilon_y + (O)\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}\right)\varepsilon_x + \left(\frac{E}{1-\mu^2}\right)\varepsilon_y + (O)\gamma_{xy} \\ \tau_{xy} &= (O)\varepsilon_x + (O)\varepsilon_y + \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}$$

引入矩阵记号

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}, \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}, \tag{24}$$

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{24}$$

则前式可缩写为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{25}$$

矩阵[D]完全决定于材料的弹性常数E和μ，称为弹性矩阵。在矩阵[D]中主对角线两侧位置对称的元素相等，这样的矩阵称为对称矩阵。

将(23)式代入(25)式得

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e \tag{26}$$

若令 $[S]=[D][B]$

则 $\{\sigma\}=[S]\{\delta\}^e$

[S]称为应力矩阵。

对于某一单元，其节点坐标，弹性常数等都是已知的，因而可求出矩阵[B]和[D]后，只要知道单元的三个节点处的位移，就可以由(26)式直接计算应力，而无须先求应变，然后再计算应力。

4．用节点位移表示节点力、单元的刚度矩阵

在外力作用下，弹性体内各点之间作用有内力，现在我们用三角形单元将连续体离散化。假设每一单元只在节点处与相邻节点相连接。作用于节点处的节点力近似地表示单元周围部分对单元的作用，如图12所示，节点力矢量为

$$\{F\}^e=\{U_iV_iU_jV_jU_mV_m\}^T$$

若假设某一单元的厚度为t，节点的虚位移为$\{\sigma^*\}^e$，其所引起的虚应变为$\{\varepsilon^*\}$。现将虚功原理应用于受力单元，即当处于平衡状态的单元产生在约束条件下所许可的微小位移时，单元节点力在虚位移上所做的虚功等于单元的虚变形能，由(11)式得

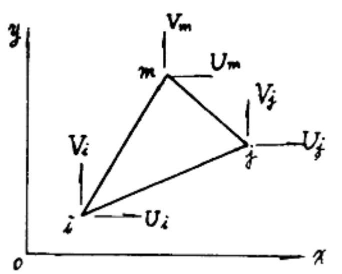

图12 作用三角形单元上的节点力

$$(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e=\iint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}\,tdxdy$$

将由(23)式得到的$\{\varepsilon^*\}=[B]\{\delta^*\}^e$和(26)式代入上式，并根据矩阵相乘的逆序法则

$$([B]\{\delta^*\})^T=(\{\delta^*\}^e)^T[B]^T \text{得}$$

$$(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e=\iint(\{\delta^*\}^e)^T[B]^T[D][B]\{\delta\}^e tdxdy$$

由于$\{\delta^*\}^e$为常量，上式中的$(\{\delta^*\}^e)^T$可以提到积分号前面。又由于虚位移可以是任意的，于是得

$$\{F\}^e=\iint[B]^T[D][B]dxdyt\{\delta\}^e \tag{27}$$

令 $[k]=\iint[B]^T[D][B]dxdyt$

则(27)式可缩写为

$$\{F\}=[k]\{\delta\}^e \tag{28}$$

(k)称为单元的刚度矩阵。由上式可以看出，单元的节点力{F}可以用单元的节点位移来表示。

由于矩阵〔D〕完全决定于材料的弹性常数E和μ。在线性位移函数的条件下，矩阵〔B〕中的元素也是常量，因而可以提到积分号前面去，并注意到$\iint dxdy$为三角形ijm的面积，即$\iint dxdy=\triangle$，于是(27)，(28)式可简化为

$$\{F\}=[B]^T[D][B]t\triangle\{\delta\} \tag{29}$$

$$[k]=[B]^T[D][B]t\triangle \tag{30}$$

5．载荷向节点移置，载荷列阵

在用三角形单元将连续体离散后，对每一单元需将作用于其上的每一个载荷向节点移置（或称作分解）而成为节点载荷。移置是按静力等效的原则进行的。所谓静力等效就是原来的载荷与结点载荷在任何虚位移上所做的虚功是相等的。例如，设有均质、等厚度的三角形单元ijm，重力载荷W作用于重心处（图13—a）。根据静力等效原则，只需将1/3重力移到每一节点处即可。其载荷列阵为

$$\{R\}^e=[X_iY_i\ X_jY_jX_mY_m]^T$$

$$=\left[0-\frac{W}{3}0-\frac{W}{3}0-\frac{W}{3}\right]^T$$

$$=-\frac{W}{3}[0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$$

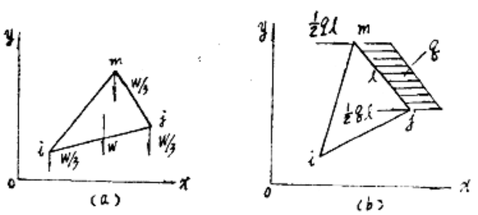

图13 载荷移置

又例如，设在单元的jm边上作用有沿水平方向的均布力q（图13—b），则作用于jm中点处的合力等于qlt。而作用于j，m点处的水平节点力为$\frac{1}{2}$qlt。于是得载荷列阵为

$$\{R\}^e=[0\ 0\ \tfrac{1}{2}qlt\ 0\ \tfrac{1}{2}qlt\ 0]^T=\tfrac{1}{2}qlt[0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T$$

6．问题的求解、整体刚度矩阵

以上的讨论是对一个单元进行的。在讨论中将节点位移$\{\delta\}^e$作为基本未知量。单元的应变和应力都可以用节点位移来表示((23)式和(26)式)。一个离散化的物体是由若干个单元所组成。各单元在节点上用铰链相互连接。对于一个指定单元，作用于其上的节点力是周围相邻各单元通过节点处连接铰对单元的作用力。根据作用力与反作用力的关系，在连接铰上也作用着节点力。同时，我们已将作用于物体上的外载荷移置到各单元的节点处。所以，连接各单元的铰链一般受到节点力与外载荷作用（当各单元节点处无外载荷作用时，连接铰则只受节点力作用）。考虑连接铰的平衡，例如，若在离散物体的节点i处有S个单元互相连接，则对i点处的连接铰可列出两个平衡方程

$$\left.\begin{aligned}\sum_{e=1}^{S}U_i^e=X_i\\ \sum_{e=1}^{S}V_i^e=Y_i\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

其中，x_i，y_i为作用于i节点的外载荷；而U_i^e，V_i^e分别为围绕i节点的每一单元在i节点处的节点力。

对于整个物体可以建立数目为节点数两倍的平衡方程。把这些平衡方程集合起来就得到线性方程组

$$[K]\{\delta\} = \{R\} \tag{32}$$

式中，$\{R\}$表示从节点1开始包括整个物体所有各节点上的载荷（实际上有不少的节点处的外载荷为零）。$\{\delta\}$表示所有各节点的位移。$[K]$称为整体刚度矩阵或总刚度矩阵。

若设有如图14—a 所示的对角受压的正方形薄板，载荷沿厚度均匀分布，为2t/m。由于两个对角线是对称线，所以只需取薄板的四分之一部分作为计算对象（图14—b）。将计算部分分为四个单元Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ和Ⅳ。单元间在节点1，2，……6处连接。根据对称条件节点位移$u_1 = u_2 = u_4 = V_4 = V_5 = V_6 = 0$,因而简化为如图14—b 所示固定铰，滚动铰支座。

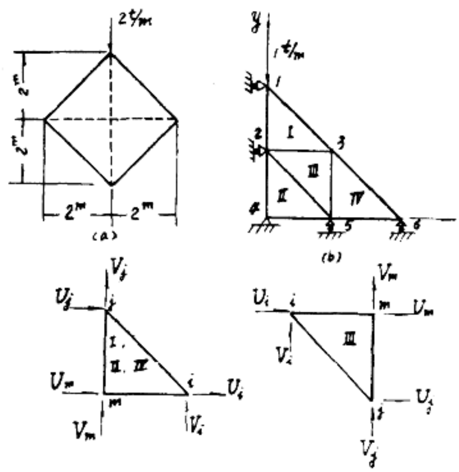

图14　受一对集中力作用的正方形板及其单元划分

有两种不同类型的单元，而单元Ⅰ、Ⅱ和Ⅳ以及单元Ⅲ。对于单元Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ，由(19)式求出

$$\triangle = \frac{1}{2}m^2$$

$b_i = 1^m$,　　$b_j = 0$,　　$b_m = -1^m$

$c_i = 0$,　　$c_j = 1^m$,　　$c_m = -1^m$

由(22)，(24)和(30)式可以计算单元的刚度矩阵。为了计算简单，取$t = 1$，$\mu = 0$。

$$[k] = \frac{E}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

由(28)式求得单元的节点力为

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} = \frac{E}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

利用上式可以具体地写出单元Ⅰ的节点力。对于单元Ⅰ来讲，$i = 3$，$j = 1$，$m = 2$，于是有