数理逻辑基础知识

（上册）

宋文淦编

北京师范大学哲学系逻辑教研室印

这是一份征求意见稿。原来的打算是写成一个不要求多少预备知识的、比较浅近的入门读物，希望能较多地联系传统逻辑，以一种不十分严格的、概述的方式，介绍一些有关现代形式逻辑的初步知识。这从许多方面说都是一种尝试。写着写着可能已经不完全符合初衷。水平有限，完稿又较匆忙，错误和问题一定不少，现在把它印出来，为的是早些较广泛地听取批评，恳请收到和看到此稿的老师、同志多多指正。

目　　录

第一章　传统逻辑与数学逻辑

1.1. 逻辑学

逻辑学是研究思维的规律的科学，它是人们认识真理和证明真理的工具。恩格斯说："在以往的全部哲学中还仍旧独立存在的，就只有关于思维及其规律的学说—— 形式逻辑和辩证法。"（《反杜林论》，《马克思恩格斯选集》第三卷第65页）辩证法是关于自然、人类社会和思维认识的运动和发展的规律的科学。由于外部世界是辩证的，因此人的思维（思考）过程也必须遵从辩证的规律。因此，辩证法不仅包括认识论，而且也是逻辑学，是辩证逻辑，即关于辩证思维的规律的科学。这里所谓形式逻辑，　可以理解为辩证的逻辑，主要指传统的演译法和归纳法。

思维或达致真理的思维过程所遵循的规律，与外部世界的规律并没有什么本质上的区别，不过是客观世界规律在人的主观思维过程中的反映。这两种规律在实际研究过程中常很难分开。正如辩证法规律既是外部世界的规律，又是思维的规律一样，形式逻辑也研究客观事物的最普通的关系，把它们作为思维规律的客观根据。因此，也可以一般地说，逻辑学是研究客体和思维的普通的依存关系的科学。

逻辑学作为人们思维特别是科学认识的工具，与其他科学一样，它的内容和范围是不断发展变化的，它随着人类思维和科学的发展而

发展。

在西方，古典的演绎逻辑，即亚里士多德的词项逻辑和斯多葛派的命题逻辑，是适应古希腊自然科学和社会政治上的探讨和辩论的要求发展起来的。文艺复兴时期到来，随着资本主义的兴起，主要是实验科学的发展促得以培根和笛卡尔为代表的科学归纳法和科学方法论得到发展。在这同时，科学的发展，特别是数学等演绎科学的发展，使得传统的演绎逻辑越来越不够用了，这就从莱布尼兹开始逐渐发展出数理逻辑。

从十五世纪下半叶自然科学真正开始，经过三四百年，在积累了相当多的实证的认识材料之后，产生了加以通盘考虑全面概括总结的要求，这就促使在黑格尔的体系中达到顶峰的近代德国哲学"恢复了辩证法这一最高思维形式"（格斯：《反杜林论》，《马克思格斯选集》第3卷第59页），提出研究辩证逻辑的任务。黑格尔的辩证法经过马克思和格斯的改造，才真正成了科学

进入二十世纪，特别是四五十年代以来，科学发展十分迅猛。这时科学发展的一个特点，是在具体深入和扩展分化的同时，又相互渗透，相互溶合，出现许多新的边缘学科。逻辑学也不例外。适应科学和技术发展的要求，在与数学，语言学以及其他科学技术相结合之下，逻辑学也有长足的发展，包括很多分支部门。其中，数理逻辑居于十分重要的地位，发展很快，应用甚广，以致出现了一个被统称"应用逻

辑"的领域。它是将现代逻辑的思想和方法应用于自然科学社会科学以及哲学主题研究的产物，其中包括例如，量子论逻辑、控制论逻辑、规定逻辑、命令逻辑、时态逻辑、问题逻辑、认识逻辑等等。

1.2 传统逻辑

"形式逻辑"，乃至"逻辑"，常常只是指演绎逻辑。它也被用来指十九世纪中叶数理逻辑产生以前通行的演绎逻辑理论，或者还加上归纳法。后面这种意义下的"形式逻辑"主要是其中的演绎逻辑，又被称为"传统逻辑"或"古典逻辑"。鉴于此，人们才说，数理逻辑是传统（演绎）逻辑的现代发展，或者说，数理逻辑是现代的形式逻辑。

我们要说的传统逻辑，只是指传统的演绎逻辑。所谓传统逻辑，是相对于现代逻辑或数理逻辑说的，主要是从形成时代、发展水平和处理方法等方面考虑的。由于历史上逻辑学家们从很早开始就提出各种各样的理论和著述，而晚近的传统逻辑著作又在某些观点上与数理逻辑一致，因此传统逻辑的内容和范围不是十分确定的。整个说来，我们可以认为，传统逻辑一般都包括词项（概念）、命题（判断）、推理、证明等部分，主要是关于非模态的直言命题及其演绎推理的直观理论。

非模态命题一般又首先分为简单命题和复合命题两大类，相应地

推理形式也分为两大类。复合命题及其推理的理论只把命题形式分析到单个命题的组合，通常称为命题逻辑。简单命题及其推理则叫做词项逻辑，它进一步把单个不再包含其他命题的命题（叫做‘简单命题’）分析到词项的组合，它以词项间的关系为基础研究这种命题的形式、它们之间的关系以及依据这种关系的推理。

传统逻辑可以说是根据日常语言来研究思维形式的结果，它对于人们日常思维和不大发达的科学活动还是有用的。但是，由于它的视野不够广阔，研究方法比较直观朴素，这就使得它的真正的逻辑内容比较狭窄贫乏，粗疏浅陋，因而处理和解决问题的能力有限，并且愈来愈显得不敷应用了。

传统逻辑关于复合命题及其推理部分只满足于列举若干命题形式和推理形式，内容简单，不成系统。至于简单命题，它也只限于主谓项式命题，即所谓简单性质命题或直言命题。因此，所谓传统逻辑，主要是指亚里士多德的逻辑理论，特别是以直言命题和直言三段论为中心的直言（词项）逻辑。

传统逻辑　　不深入研究关系命题及其推理。它把一切简单命题都归结为主谓项式。如果说这也能处理关系命题的一些逻辑问题的话，那也是很不足道的。因为，关系命题及其推理理论，即关系逻辑，是如此概括和丰富，以至可以把它看成就是整个一般的演绎逻辑系统，而里士多德的直言逻辑（包括传统命题逻辑，因此整个传统逻辑）

不过是它的一个很小的部分。

传统逻辑没有对命题逻辑作深入细致的分析和研究，更没有能把命题逻辑与词项逻辑有机地联系起来，作统一的处理。就直言逻辑说，它对许多问题（特别如个体问题和存在问题）的处理，都既不精确又缺乏概括性，而且整个理论也发展得很不够。传统逻辑实际上把组成直言命题的词项的外延都看成是事物类，直言逻辑的外延理论整个地是建立在类的关系的理论之上的。因此，从外延上说，传统的直言逻辑也就是所谓类逻辑。但是，它也只是类逻辑的一个很小的部分。

特别是由于局限于自然语言和日常思维，没有系统地运用人工符号和研究近现代科学思维，传统逻辑没有能充分发展尽量词理论。而这也就限制了它，使它想研究关系命题的逻辑也不得其门而入，并影响到它不能对整个演绎逻辑包括如模态逻辑等其他逻辑理论作充分的精确的研究。

当然，这些都不是传统逻辑理论及其研制者的错，这是历史条件决定的。科学理论都是时代的产物，人类实践的产物。

1.3.数理逻辑

数理逻辑也经历了一个发生和发展的过程。它最初是作为“运用数学方法的逻辑”产生的主要是在数学等演绎科学发展的基础上并适应它们的表述和论证的需要而兴起的。随后，数学的发展逐渐正式提

出并要求认真解决数学的逻辑和哲学基础问题，于是数理逻辑又进一步发展成主要是"关于数学的逻辑"，与数学基础相结合，成了一门数学科学。前一种意义的数理逻辑，又常称逻辑演算，符号逻辑，逻辑斯蒂以及现代逻辑（现代的形式逻辑）等。它通常作为基础部分包括在后一意义下的数理逻辑之中。后者是逻辑与整个数学相结合的产物，它的主要部分是公理集合论，证明论，模型论和递归论。这"四论"也是逻辑演算（作为独立的逻辑理论）中用到的概念和方法的进一步的发展。我们这里将只限简略地介绍逻辑演算，并仍沿用数理逻辑这个名称。

数学的对象是现实世界的数量关系和空间形式，即数与形。这二者又是互相联系的。十七世纪时解析几何的创立，变量与函数概念的出现，把数学中数 与形这两大基本概念统一起来了。数学的特征是它的高度的抽象性，精确性和普遍性（应用的广泛性）。它的这些特征决定了它必须运用符号系统，即人工符号语言。这一点是这样重要以至在这个问题没有得到很好解决之前，数学本身的发展都受到影响。其次，数学几乎完全周旋于抽象概念及其相互关系的圈子之中，数学定理的证明只需运用演绎推理、公式推演和数值计算。后二者本质上也就是演绎推理。因此，可以说，演绎逻辑是数学系统的基础和前提。如今，在逻辑演算充分发展之后，各种数学系统都不过成了它的加上数学内容的扩充。当然，这已经是后来的事。在逻辑演算产生之前，

由于传统逻辑之不足，当时提出的任务首先是发展演绎逻辑，研究数学实践所应用的逻辑形式，特别是关系命题及其推理以及量词理论，并把演绎逻辑严格代精确化。

就说运用符号系统问题，也不单纯就是采用什么符号来表达概念的问题，不是单纯的语言问题。因为语言是与思维，与逻辑紧密联系的，特别是语言中的句法就与逻辑中的命题形式理论紧密联系。因此符号系统问题也是逻辑问题。

近代数学和科学的发展日益要求发展量词和关系命题的逻辑理论。以微积分为例。我们可以说牛顿和莱布尼兹是微积分的发明者，但是直等经过150多年，才由哥西发现它的精确的定义。这是人的逻辑思维特别是量词理论发展的结果。微积分也就是无穷小量的计算。哥西认为无穷小量“是一个变量，其绝对无限地减少而收敛于零”，亦即所取的值以零为极的变量。他给出的极限的定义，则是：若代表某变量的一串数值无限地趋向某一固定数值时，其差可随意小，则该固定值称为这一串数值的极限。”用现代的精确的数学语言来表达，一般地应该是：

所谓值a是函数$f(x)$当x趋于值x_0的极限值，是指对于一切（任意小的）正数$\varepsilon>0$，都有正数$\delta>0$，使得$0<|x-x_0|<\delta$，那末就有

$$|f(x)-a|<\varepsilon。$$

在这个表述中，就用到两个量词，全称量词'一切'和存在量词'有'，以及关系命题 $0<|x-x_0|$，$|x-x_0|<\delta$ 和 $|f(x)-a|<\varepsilon$。

又如，关于力学中自由落体运动的时间与路程的关系定律，一种比较确切的表达是：

在地球上的任何地点，对于任何自由落体如果没有其他力作用，那末，对于任何一段时间 t，任何一段路程 S，都有唯一的重力加速 g 使得

$$S=\frac{1}{2}gt^2。$$

这里出现'唯一的'这样一种特殊的量词。

1.4 数学基础问题

数学基础是研究数学的逻辑和哲学基本问题的。广义的数学基础包括数理哲学，研究数学的本质等哲学问题。数学基础一般则包括数学的一些基本逻辑问题，例如，对数学概念的精确定义和归约的问题，数学中所用的演绎推理和公理方法的的本质特征的问题等历史上首先提出并直接促进数理逻辑发展的数学基础问题一是由非欧几何产生而引起的公理方法的问题，一是数学主要是集合论中出现的悖论的问题。

欧几里得几何是历史上最早的一个公理化的数学理论系统。其中有一条公理说，通过已知直线外一个已知点只能作一条直线与该已知直线平行。它在欧几里得《几何原本》中是第五公设，又称平行公设。

具体说法略有不同。数学家从来就认为此公设直观上不那么浅显明白，怀疑它可以从其他公理公设推导出来，就是说，它可能是一条定理，而不该算作公理（现代公理方法不区分公理和公设）。他们为证明这这一点作了很多很大的努力，但一直未能成功。人们还尝试运用反证法来证明，就是说，先假定一个与第五公设相反的命题，从这个命题和其他公理出发，推出矛盾，证明此反命题不可能，从而证明第五公设成立，这也就是证明了第五公设可从其他公理推出来。历史事实是，用这种方法也达不到目的，因为总推不出所想要的矛盾。其结果反倒是出现了各种“非欧里几得几何学”。所谓非欧几何就是以不同于欧几里德第五公设的命题作为平行公理的几何学。例如１８２９年俄国数学家罗巴切夫斯基提出的几何学，代替欧几里德第五公设的是：通过不在一已知直线上的一点，可以作不止一条而至少是两条直线与该已知直线平行。

这就提出一系列问题：如何证明一公理系统中公理的独立性（即不能从别的公理推出），公理的独立性与公理系统推不出矛盾是什么关系，一公理系统中没有推出矛盾，能否说永远不会推出矛盾，怎样证明一公理系统不可能出现矛盾；公理方法的性质和作用是什么以及，如果一个数学理论是无矛盾的那末能否就说它是正确的或真实的，数学理论的真理性是否就在于它的无矛盾性（或一致性，协调性），数学理论的现实基础，现实意义以及它与现实的关系又是什么等等。这里

面既有逻辑问题，主要是公理方法亦即演绎逻辑的问题，又有数理哲学问题。

另一个重要的数学基础问题就是逻辑悖论的问题。所谓悖论，也是自相矛盾，特别是同一命题既眞又假。这是逻辑学所不能容忍的历史上人们早就发现悖论,那就是著名的“说谎者悖论”：克里特人伊壁蒙尼德说：“我在说谎”。他这是在说谈还是在说眞话？假定他是在说谈。那么，他所说的就不能是眞的，由于他说的就是他在说谎，因此他是在说眞话。假定他是在说眞话。那末，他所说的必定是眞的，可是他现在说他在说谎,因此他是在说谎亦即说假话,这样，他所说的“我在说谈”这句话就既眞又假了。人们长期以来就对这类博论进行研究，但是并没有引起普遍的重视。到二十世纪，居然在数学理论中国发现一连串的悖论，这就成了大问题。

十九世纪末（１８９５—１８９７）德国数学家格奥尔格·康脱（１８４５—１９１８）创立了关于集合特别是无穷集和无穷数的数学理论，即集合论。这后来成了数学中的基础理论，具有极重要的意义。可是产生不久，其中就接连出现悖论。我们举著名的罗　悖论为例来说明。

所谓集合，也就是通常所说的类，它由一个个的事物组成，这些事物叫做它们所组成的类的分子。类一般都不是自身的分子例如，所有自然数构成的类，它本身不是自然数。但是例如所有类的类，它本

身也是类，所以这个类是其自身的分子.现在我们来看这样一个类A，它是由所有不是自身分子的类所组成的类。A也总或者是自身的分子或者不是自身的分子。如果A是自身的分子，那末与A的所有其他分子一样，它就不是自身的分子。同时，如果A不是自身的分子，那末它就具有使它有资格成为A的分子的性质，就是说它又是A即其自身的分子。这就是个悖论。

出了悖论，特别是数学中出了悖论，这就提出问题，悖论是怎样产生的，是不是我们所用的逻辑工具有问题，能否解决和避免悖论，如何解决和避免；等等。这些都是逻辑问题，同时也成为数学基础（根基）问题。逻辑学家要回答这些问题，数学家也被迫要研究数学中应用的逻辑和数学工具，找出症结之所在。这个问题也与公理方法、公理系统有密切关系。

总之，数学基础问题的提出和研究，也是整个数理逻辑发展的原因和动力。

4.5 推理和演算

数理逻辑也是在人们要把推理转化为演算以及把推理机械化即制造逻辑机，这些理想的推动下发展起来的。

前面提到，演绎推理，公式推演和数值计算本质上是一回事.粗略地说，公式推演无非是根据一定的规则从一些公式得出一个新的公式，

而公式是表达命题的，因此公式推演与演绎推理并无二致。至于数值计算，则只是公式推演的具体化，即把公式中的变项代以数值，在作推演的同时运用如乘法表之类具体计算规则得出数值结果。至于说到把演绎推理转化为演算或计算，则需要对推理作数学处理。

甚至早在古希腊毕达哥拉斯（约公元前５８０—５００）学派的哲学中就有了把思维归诸计算的思想。他们认为数是万物的本原，事物之间的关系就是数之间的关系。因此，观念（逻各斯）与数，思维与数的运算是一回事。

其后，伊壁　鲁派的斐珞德谟（公元前一世纪）曾在他的《哲学的语法》中明确谈到逻辑与计算的同一性。他把作如此理解的逻辑叫“逻辑斯蒂”（ logistics ），意思是“计算的技艺”。这个词后来被用来称呼数理逻辑演算。

第一个试图得到一种逻辑演算的是中中世纪西班牙逻辑学家瑞蒙·卢尔（１２３５—１３１５）。他已开始用字母即代数符号来表达概念，他还是第一个提出和设计“逻辑机”（狭义地是指解决逻辑中的问题的机械）的人。

卢尔的逻辑演算思想影响深远，一直影响到哥特弗利德·威廉·莱布尼兹（１６４６—１７１６）。此外，如英国哲学家托马斯·霍布士（１５８８—１６７９），法国哲学家勐奈·笛卡尔（１596—1650）和后来的法国哲学家埃蒂耶纳。博诺·德·孔狄亚克

（1715—1780）也都有这种思想，认为思维就是计算，逻辑就是记号的演算。

莱布尼兹是数理逻辑的真正的先驱。他年青时就有了建立计算的逻辑的想法。他的计划是建立一种新的逻辑理论，叫做“一般数学”。为此首先要建立一种“普遍语言”即一种符号系统，一种通行于全人类的人工语言。在这种语言中，初始概念是照着代数学的样子用数目或字母符号来表达的，复杂的概念应该被分解并表达为初始概念的组合（乘积），命题则表达成等式。他想在这种普遍语言的基础上创造一种逻辑代数，莱布尼兹把它叫做“推理演算”。推理就是根据这个演算的规则来计算，这样就能把人类知识化归为一个记号和记号的运算的系统。

莱布尼兹没有能建成他的逻辑代数，他的主要功绩在于提出了建立逻辑演算的基本原则。他之所以没能建立起一个算法逻辑，一个重要的原因是他采取内涵观点，把词项和公式解释为表示事物性质及性质之间的关系。

只有对逻辑从外延上考虑，即把词项看成表示事物类，命题只代表真假值，才能很好地加以数学的处理。在经过约150年之后，英国数学家和逻辑学家乔治·布尔（1815—1864）正是这样做的，因此他相当成功地建立了一个逻辑演算系统。他所建立的逻辑代数是数理逻辑的早期形式。布尔当初的目的就是要把代数方法应用于