

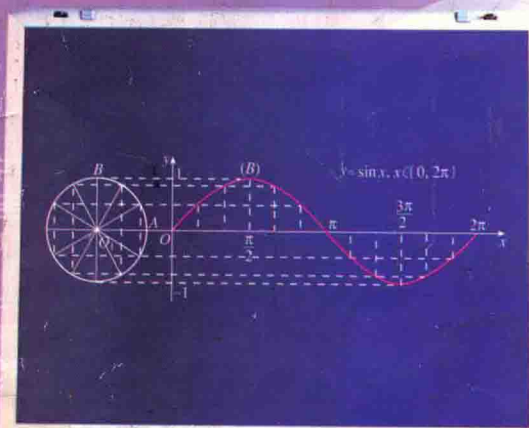
普通高中课程标准实验教科书

# 数学 4

必修

## 教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所  
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

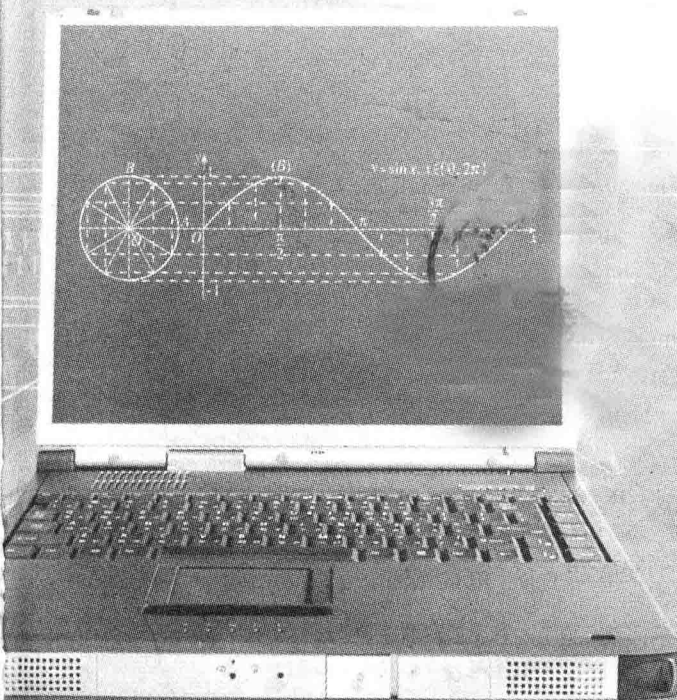
普通高中课程标准实验教科书

# 数学 ④

必修

## 教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 编著  
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社  
A版

普通高中课程标准实验教科书

数学(4) 必修 A 版

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 编著  
中学数学课程教材研究开发中心

\*

人民教育出版社出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

人民教育出版社印刷厂印装 全国新华书店经销

\*

开本: 890 毫米×1 240 毫米 1/16 印张: 9.5 字数: 241 000

2007 年 4 月第 2 版 2008 年 12 月第 9 次印刷

ISBN 978-7-107-18073-6 定价: 10.00 元  
G·11162 (课)

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与本社出版科联系调换。  
(联系地址:北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编:100081)

主 编：刘绍学

副 主 编：钱珮玲 章建跃

本册主编：章建跃

主要编者：章建跃 白涛 张劲松 桂思铭 蒋佩锦

责任编辑：章建跃 刘长明

美术编辑：王俊宏 王 艾

封面设计：林荣桓

# 中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材。作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下。这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列1~5以及选修1、2中所涉及的基本数学内容。

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述。这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解。

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学。我们这里选择恩格斯观察数学的角度。恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学。这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”。概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中。但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军。考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意。

**集合** 只要研究问题，就有研究对象。这些研究对象都是数学中的元素。把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合。因而元素、集合是处处存在的。另一方面，从有关自然数的Peano公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义。在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合。这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用。

**统计** 统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论。统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法。在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想与聚类分析思想等。

**概率** 概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础。在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具。概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小。这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似。但是两种度量之间存在如下区别：

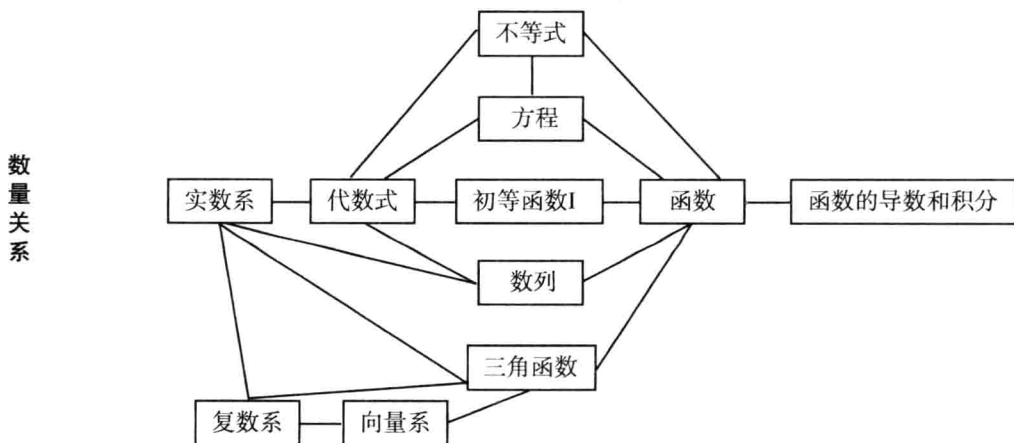
1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过1，几何中的度量却不受这种限制。
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形。

**算法** 实现具体计算数量关系的手段。机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程。在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

计算机来解决的某一类问题的程序或步骤, 这些程序或步骤必须是明确和有效的, 而且能够在有限步之内完成.

### “数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图:



**实数系** 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具, 实数系是一切具有运算的体系的标兵, 任何具有运算的体系中的内容、方法与思想, 都能在与实数系的类比中得到启发.

**复数系** 复数及其运算. 由实数扩张而得, 是人类能创造出的最大、最佳数系, 这是因为: 把复数系再扩张时, 就不再存在像复数系这样方便完美的运算了; 对复数系, 我们有代数基本定理 (每一个复系数一元  $n$  次多项式至少有一个复数根, 其中  $n$  为正整数).

**向量系** 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数, 平面中的向量的坐标是实数对  $(x, y)$ , 而空间中向量的坐标是三实数组  $(x, y, z)$ . 在这个意义上, 向量可以看作实数的一种推广. 另一方面, 在历史上, 复数  $(a+bi)$  曾被推广到四元数  $(a+xi+yj+zk)$ , 而其中的  $xi+yj+zk$  被发展成现在的向量. 从这里看到, 向量的确是“数”(即四元数)的一部分. 当然, 在谈论向量时永远记住它在几何上和物理中的背景 (有向线段, 位移, 力等).

在研究几何时, 作为工具, 向量系和实数系有异曲同工之妙.

**代数系** 用文字代表数, 我们有了变量  $a, b, c, x, y, z$  等. 数和变量一起运算的结果, 我们得到代数式, 代数式之间也有加、减、乘、除等运算, 这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广, 它大大拓宽了运算对象的范围.

**方程** 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现, 而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化, 我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

**不等式** 把方程中的“=”换成实数系所特有的“>”(或“<”)便得到不等式, 因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换, 不等式也有“同解”变换; 由函数观点, 方程  $f(x)=0$  的解可以看成函数  $y=f(x)$  的零点, 而不等式  $f(x)>0$  的解可以看成使函数  $y=f(x)$  取正值的  $x$  的全体. 另一方面, 两者关系密切: 和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似, 方程  $f(x, y)=0$  可设想为不等式  $f(x, y)>0$  的“边界”. “>”的性质比“=”的性质“坏”许多, 我们应非常小心地对待不等式.

**初等函数 I** 令变量  $y$  等于含变量  $x$  的代数式  $p(x)$ , 即  $y=p(x)$ , 就得到  $x$  的函数  $y$ . 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数, 多项式函数, 指数函数及其反函数即对数函数.

**数列** 数列及数列的运算. 在中学只讨论最简单、最基本的两类数列: 等差数列及等比数列. 我们可以把数列想象成数的推广, 也可以把数列看成是一类特殊的函数, 从而可以把等差数列与一次函数作类比, 把等比数列与指数函数作类比. 不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现: 在用有理数逼近无理数中, 在求圆的面积或球的体积中, 在指数为无理数时的指数定义中, 在求函数的导数的过程中……

**三角函数** 描述周期现象的重要数学模型. 为解直角三角形而引入锐角三角函数; 为解任意三角形而推广到钝角三角函数; 为了刻画一些简单的周期运动(已和解三角形毫无关系了)而再次推广到任意角的三角函数, 后者成为非常重要的函数, 是描述一般周期函数的基石. 三角函数是数形结合的产物.

**函数** 函数及函数的运算(+、-、×). 函数描写运动, 刻画一个变量随着另一个变量的变化状态, 给出一个数集到另一个数集的对应关系. 它是覆盖面广、有统帅作用的概念: 数可以看成特殊函数; 数的运算可以看成特殊的二元函数; 代数式可以容易地被改造成一个函数; 数列是特殊的函数; 解一元方程就是求一个函数的零点, 因而解方程也可纳入函数问题的讨论中; 平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子, 而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系; 解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度, 从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学, 是弄清中学数学脉络, 搞活中学数学的三个重要观点.

**函数的导数和积分** 虽然函数  $f(x)$  的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义, 但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述, 因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物. 这里, 重要的是微积分基本定理, 它使求导函数和求积分真正成为互逆运算, 因而大大简化了这两种运算.

### “空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图:



**平面几何** 讨论点, 直线, 直线的平行和垂直, 三角形, 圆等. 这是平面图形中最基本、最简单者, 然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础.

**圆锥曲线** 在中学, 给出它们的几何定义后, 使用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们. 这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识, 同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础.

**立体几何** 线线、线面、面面之间的位置关系. 特别重要的是垂直和平行关系. 对于空间图形, 只是看看锥面和球面, 从直观上去感知它们的结构特征, 凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系, 以及三视图、透视图, 以使我们获得一定的空间形体的直观感觉.

**一般平面曲线** 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它, 但在整个中学数学中, 与函数结伴几乎出现在所有的地方. 想到函数概念的无比重要性, 对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的.

## “数形结合”

**用三角函数解三角形** 参看 **三角函数**. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说, 已知三角形的两邻边  $a, b$  及其夹角  $C$ , 依边角边定理, 第三边  $c$  完全确定, 因而有函数  $c=f(a, b, C)$ . 如何具体给出这个函数? 这里引入三角函数以具体表示这个函数, 编制三角函数值表以使它可计算.

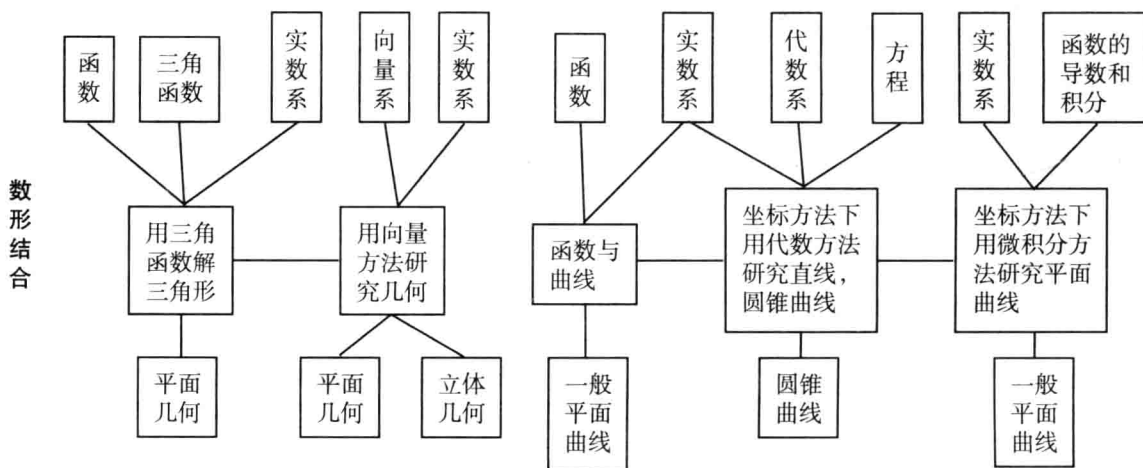
**用向量来研究几何** 用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何, 可概括为“三步曲”: 用向量表示出问题中关键的点、线、面; 进行向量计算得出结果; 对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

**函数与曲线** 贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

**坐标方法下用代数方法研究直线, 圆锥曲线** 用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何, 可概括为“三步曲”: 用数(坐标), 代数式, 方程表示出问题中关键的点、距离、直线, 圆锥曲线; 对这些数, 代数式, 方程进行讨论; 把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

**坐标方法下用微积分方法研究平面曲线** 用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下, 函数对应曲线, 导数就是曲线切线的斜率, 积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目, 把它们放在下面的框图中:



最后, 作为补充, 提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线, 有了它们, 不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比, 让任意对象的运算和数的运算对比, 不仅能使我们获得需要研究的问题, 而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看 **函数**.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来: 函数的曲线, 方程与曲线, 实数与直线, 复数与平面, 向量与有向线段, 不等式的图象, 数据的图象等.

4. 把定性的结果变成定量的结果, 把存在的东西具体表示出来: 参看用三角函数解三角形. 直线用方程表示出来, 直线上的点用满足方程的两个实数表示出来; 一元二次方程的根用系数表示出来, 曲线的切线斜率用导数表示出来等等. 一旦定性的东西得到定量的表示, 操作起来就容易多了.

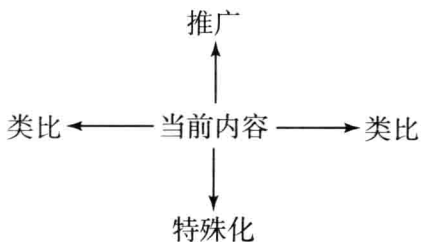
5. “恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理, 目的是为了从“好”的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现: 如一元二次多项式分解成一次因式的乘积, 代数式的恒等变换, 三角函数的恒等变换, 方程的同解变换, 一组数据的各种不同形式的组合, 整数(或一元多项式)的带余除法等等.



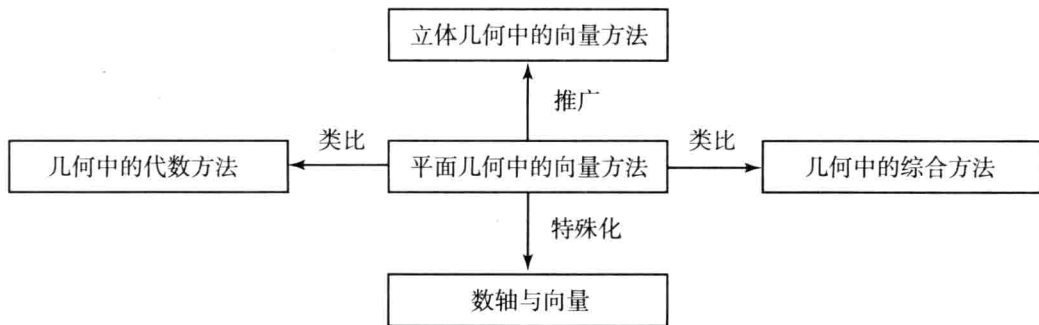
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如, 如果两个三角形能够重合放在一起, 就说它们全等, 这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣; 两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向, 但如果对有向线段引入新的相等定义: 规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的, 我们就将得到一个新对象——向量; 在函数的相等和方程的等价中, 我们都清楚地看到, 什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学: 中学数学中虽然没有明确的公理体系形式, 但在每一次推理时, 我们都有明确的推理根据. 在这个意义下, 我们心目中都有一个“公理体系”, 并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”, 是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中, 根据概率的定义, 经实验、观察得出概率的一系列性质; 后来在推导古典概型的概率计算公式时, 就是从这些性质出发, 经演绎推理而得; 在立体几何中, 明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义, 并归纳出一些判定定理之后, 经推理得出一些性质定理; 在向量中, 有了向量的相等定义和运算定义后, 根据这些定义推导出了向量运算的运算律, 等等.

8. 从数学学习、研究过程来看, 经常使用如下的逻辑思考方法:



其中突出显示了联系的观点, 通过类比、推广、特殊化等, 可以极大地促进我们的数学思考, 使我们更有效地找出自己感兴趣的问题, 从中获得研究方法的启示. 例如, 关于平面几何中的向量方法, 我们可以有如下的“联系图”:



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起, 不同的方法相互促进, 可以使我们提出更多的问题, 在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如, 我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线, 在上述“联系图”的引导下, 就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

刘绍学

# 说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学(A版),是以教科书为基础的系列化教材,包括基本教材和配套教学资源。基本教材是教科书和教师教学用书,配套教学资源包括学生学习用书、课节练习、章节评价手册、教学设计与案例、寒暑假作业、教学投影片、信息技术支持系统等。

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学(A版)》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》中规定的全部内容。本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下,认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系,体现**基础性、时代性、典型性和可接受性**等,具有如下特点:

1. “亲和力”:以生动活泼的呈现方式,激发兴趣和美感,引发学习激情。

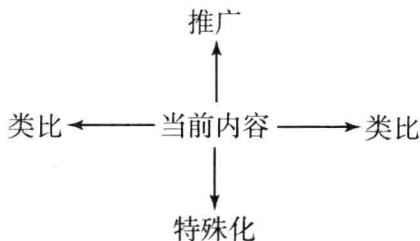
选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材,用生动活泼的语言,创设能够体现数学的概念和结论,数学的思想和方法,以及数学应用的学习情境,使学生产生对数学的亲切感,引发学生“看个究竟”的冲动,兴趣盎然地投入学习。

2. “问题性”:以恰时恰点的问题引导数学活动,培养问题意识,孕育创新精神。

在知识形成过程的“关键点”上,在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上,在数学知识之间联系的“联结点”上,在数学问题变式的“发散点”上,在学生思维的“最近发展区”内,通过“观察”“思考”“探究”等栏目,提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题,引导学生的思考和探索活动,使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程,切实改进学生的学习方式。

3. “科学性”与“思想性”:通过不同数学内容的联系与启发,强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用,学习数学地思考问题的方式,提高数学思维能力,培育理性精神。

利用数学内容的内在联系,使不同的数学内容相互沟通,提高学生对数学的整体认识水平。特别地,在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法,尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法:



以使学生体会数学探索活动的基本规律,逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究,推求新的事实和论证猜想,从而发展学生认识事物的“数”“形”

属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流。

**4. “时代性”与“应用性”：**以具有时代性和现实感的素材创设情境，加强数学活动，发展应用意识。

利用具有时代气息的、反映改革开放、市场经济下的社会生活和建设成就的素材创设情境，引导学生通过自己的数学活动，从事物中抽取“数”“形”属性，从一定的现象中寻找共性和本质内涵，并进一步抽象概括出数学概念、结论，使学生经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉。教科书设置了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等栏目，为学生提供丰富的具有思想性、实践性、挑战性的，反映数学本质的选学材料，拓展学生的数学活动空间，发展学生“做数学”“用数学”的意识。

**5. “联系性”：**以有层次和完整的结构，提供多种选择；将配套教材作为教材建设的有机组成部分。

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目。

1. 总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想，包括：课程目标、学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议等。

(1) 课程目标与学习目标说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 本章知识结构框图展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 内容安排说明按照全章内容的编排顺序，参照教科书“小结”中的“逻辑结构框图”，说明内容的前后逻辑关系；

(4) 课时安排建议根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整。

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以节为单位进行分析，着重说明了编写意图。主要包括：本节知识结构、重点、难点、教科书编写意图与教学建议等。

(1) 本节知识结构讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系），说明学习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

(3) 难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(4) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学

习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空的问题，给出解释或解答。

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议。

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型。具体包括了下面一些内容：

- (1) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；
- (2) 教学重点、难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；
- (3) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；
- (4) 教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图。

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能。

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料。同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释。

另外，我们专门制作了一套“信息技术支持系统”，教学中有需求的可以从人教网上下载。网址：<http://www.pep.com.cn> 新课标教材·高中·数学。

本书是必修课程数学4的教师教学用书，包含三角函数，平面向量，三角恒等变换等三章内容。全书共36个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第1章 三角函数	约16课时
第2章 平面向量	约12课时
第3章 函数的应用	约8课时

参加本书编写的有章建跃、白涛、张劲松、桂思铭、蒋佩锦等，责任编辑章建跃。

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要。由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务。

# 目录

## 第一章 三角函数 1

### I 总体设计 1

### II 教科书分析 4

- |                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| 1.1 任意角和弧度制                            | 5  |
| 1.2 任意角的三角函数                           | 14 |
| 1.3 三角函数的诱导公式                          | 26 |
| 1.4 三角函数的图象与性质                         | 32 |
| 1.5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象 | 45 |
| 1.6 三角函数模型的简单应用                        | 53 |

### III 自我检测题 62

### IV 拓展资源 64

## 第二章 平面向量 66

### I 总体设计 66

### II 教科书分析 68

- |                    |    |
|--------------------|----|
| 2.1 平面向量的实际背景及基本概念 | 69 |
| 2.2 平面向量的线性运算      | 74 |
| 2.3 平面向量的基本定理及坐标表示 | 84 |
| 2.4 平面向量的数量积       | 91 |
| 2.5 平面向量应用举例       | 99 |

### III 自我检测题 108

### IV 拓展资源 110

### 第三章 三角恒等变换 113

I 总体设计 113

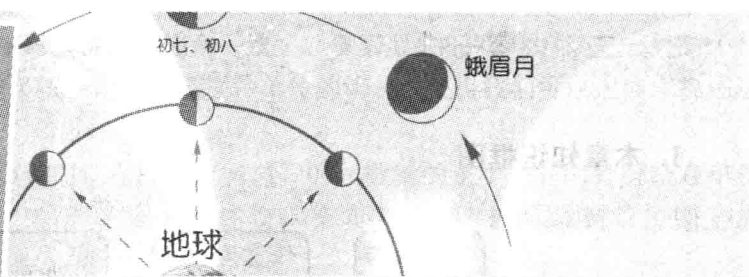
II 教科书分析 115

3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 115

3.2 简单的三角恒等变换 124

III 自我检测题 131

# 第一章 三角函数



## I 总体设计

### 一、课程目标与学习目标

#### 1. 课程目标

本章学习的内容主要是三角函数的定义、图象、性质及应用.

三角函数是基本初等函数,它是描述周期现象的重要数学模型,在数学和其他领域中都具有重要作用.在本章中,学生将通过实例,学习三角函数及其基本性质,体会三角函数在解决具有周期变化规律问题中的作用.

#### 2. 学习目标

##### (1) 任意角、弧度.

了解任意角的概念和弧度制,能进行弧度与度的互化.

##### (2) 三角函数.

① 借助单位圆理解任意角三角函数(正弦、余弦、正切)的定义.

② 借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式( $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$  的正弦、余弦、正切),能画出  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$  的图象,了解三角函数的周期性.

③ 借助图象理解正弦函数、余弦函数在  $[0, 2\pi]$ , 正切函数在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上的性质(如单调性、最大和最小值、图象与  $x$  轴交点等).

④ 理解同角三角函数的基本关系式:

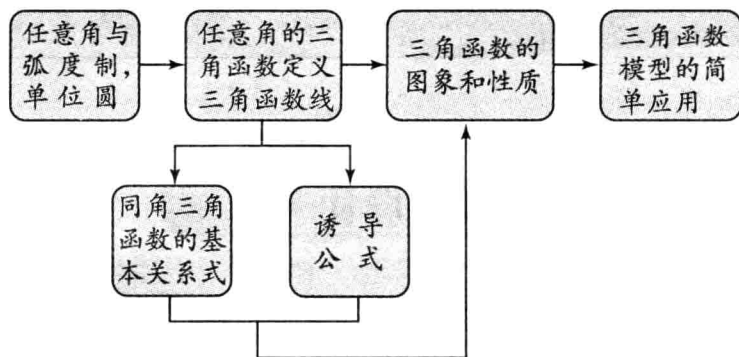
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

⑤ 结合具体实例,了解  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的实际意义;能借助计算器或计算机画出  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的图象,观察参数  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  对函数图象变化的影响.

⑥ 会用三角函数解决一些简单实际问题,体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

## 二、内容安排

## 1. 本章知识框图



## 2. 对知识框图的说明

(1) 本章学习的认知基础主要是几何中圆的性质、相似形的有关知识, 在数学1中建立的函数概念, 以及指数函数、对数函数的研究经验. 主要的学习内容是三角函数的概念, 图象与性质, 以及三角函数模型的简单应用. 单位圆是研究三角函数的重要工具, 借助它的直观, 可以使学生更好地理解三角函数的概念和性质, 因此三角函数的学习可以帮助学生更好地体会数形结合思想. 三角函数作为描述周期现象的重要数学模型, 与其他学科(特别是物理学、地理学)有紧密联系, 因此本章的学习可以培养学生的数学应用能力.

(2) 为了加强三角函数学习的目的性, 本章采用月相变化图和简谐振动图的组合作为章头图, 并以“大到宇宙天体运行, 小到质点的运动, 现实世界中具有周期性变化的现象无处不在”为开篇语, 再在章前引言中明确提出“三角函数是刻画周期性变化规律的数学模型”. 这样的安排使得三角函数的作用体现得更加清楚, 也能使学生更加明确学习三角函数的意义.

(3) 任意角的三角函数可以有不同的定义方法, 而且各种定义都有自己的特点. 过去习惯于用角的终边上点的坐标的“比值”来定义, 这种定义方法能够表现出从锐角三角函数到任意角的三角函数的推广, 有利于引导学生从自己已有认知基础出发学习三角函数, 但它对准确把握三角函数的本质有一定的不利影响. “从角的集合到比值的集合”的对应关系与学生熟悉的一般函数概念中的“数集到数集”的对应关系有冲突, 而且“比值”需要通过运算才能得到, 这与函数值是一个确定的实数也有不同, 这些都会影响学生对三角函数概念的理解.

本章利用单位圆上点的坐标定义任意角的正弦函数、余弦函数.

如图1-1, 设 $\alpha$ 是任意角, 它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ , 那么

$y$ 叫做 $\alpha$ 的正弦, 记作 $\sin \alpha$ , 即

$$\sin \alpha = y;$$

$x$ 叫做 $\alpha$ 的余弦, 记作 $\cos \alpha$ , 即

$$\cos \alpha = x.$$

这个定义清楚地表明了正弦函数、余弦函数中从自变量到函数值之间的对应关系, 也表明了这两个函数之间的关系. 另外, 如果 $\alpha$ 是

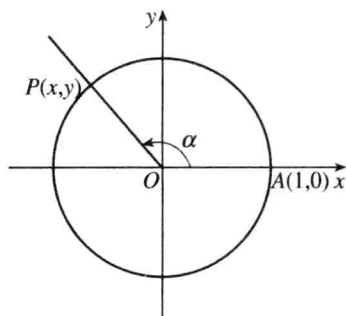


图1-1



弧度数, 即  $\angle xOP = \alpha \text{ rad}$ , 那么正弦函数、余弦函数就是关于任意实数  $\alpha$  的函数, 这时的自变量和函数值都是实数, 这就与数学 1 中给出的一般函数概念完全一致了. 事实上, 在弧度制(这是一种用半径来度量角的方法)下, 角度和长度的单位是统一的, 正是这种单位的统一, 使得我们可以这样来描述这两个函数的对应关系:

把实数轴想象为一条柔软的细线, 原点固定在单位点  $A(1, 0)$ , 数轴的正半轴逆时针缠绕在单位圆上, 负半轴顺时针缠绕在单位圆上, 那么数轴上的任意一个实数(点)  $t$  被缠绕到单位圆上的点  $P(\cos t, \sin t)$ .

基于上述理由, 我们认为这样的定义可以更好地反映三角函数的本质, 也正是三角函数的这种形式决定了它们在数学(特别是应用数学)中的重要性. 事实上, 后续的内容, 特别是在微积分中, 最常用的是弧度制以及弧度制下的三角函数.

另外, 这样的定义使得三角函数所反映的数与形的关系更加直接, 数形结合更加紧密, 这就为后续内容的学习带来方便, 也使三角函数更加好用了. 例如从定义可以方便地推导同角三角函数的关系式、诱导公式、和(差)角公式, 而且为公式的记忆提供了图形支持; 单位圆为讨论三角函数的性质提供了很好的直观载体, 我们可以借助单位圆, 直接从定义出发讨论三角函数的性质……

当然, 这个定义与人们熟悉的用角的终边上点的坐标的“比值”来定义是等价的, 这正是教科书在 1.2.1 中安排例 2 的原因.

(4) 三角函数的诱导公式过去是从求三角函数值引入的, 把  $180^\circ \pm \alpha$ ,  $-\alpha$ ,  $360^\circ - \alpha$ ,  $90^\circ - \alpha$  的三角函数与  $\alpha$  的三角函数关系作为诱导公式, 并且把关于  $90^\circ - \alpha$  的诱导公式作为和(差)角公式的推论给出. 本教科书改变了这种做法. 教科书借助单位圆, 先引导学生讨论了这些角的终边与角  $\alpha$  的终边之间的对称关系, 然后根据三角函数定义导出所有诱导公式. 这样, 既能很好地反映诱导公式的本质(圆的对称性的代数表示), 又使它们成了一个有机的整体. 另外, 去掉了关于  $360^\circ - \alpha$  的诱导公式(因为它与  $-\alpha$  的诱导公式等价), 增加了  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  的诱导公式. 为了使学生尽快熟悉并形成使用弧度制的习惯, 在诱导公式中全部采用了弧度制.

(5) 正弦、余弦函数按照从函数的定义到作函数图象再到讨论函数性质最后到函数模型应用的顺序展开, 三角恒等变换不再穿插其中, 这一顺序与研究其他函数的顺序一致, 使得三角函数的研究更加简洁. 另外, 把周期性作为第一条性质, 目的是为了体现它的重要性. 正切函数先利用诱导公式、单位圆讨论性质, 然后再利用性质作图象, 这样做的目的是为了使学生体会可以从不同角度讨论函数性质.

(6) 对函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  图象的研究, 由于涉及的参数有 3 个, 因此本章采取先讨论某个参数对图象的影响(其余参数相对固定), 再整合成完整的问题解决的方法安排内容, 具体线索如下:

- ① 探索  $\varphi$  对  $y = \sin(x + \varphi)$  的图象的影响;
- ② 探索  $\omega$  对  $y = \sin(\omega x + \varphi)$  的图象的影响;
- ③ 探索  $A$  对  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的图象的影响;
- ④ 上述三个过程的合成.

在对上述四个方面的具体讨论中, 先让学生对参数赋值, 形成对图象变化的具体认识, 然后再推广到一般情形.

这样安排既分散了难点, 又使学生形成清晰的讨论线索, 从中能使学生学习到如何将复杂问题分解为简单问题并“各个击破”, 然后整合为整个问题的解决的思想方法, 培养有条理地思考的习惯, 有利于培养学生的逻辑思维能力.

(7) “三角函数模型的简单应用”是一个新增内容, 主要以举例的方式说明三角函数模型的应用方法. 选择的问题包括: