

光譜儀田學

第三章 光栅和光栅光谱仪

衍射光栅是另一种重要的分光仪器。它是基于多缝的衍射和干涉原理做成的。关于由光栅产生光谱的基本原理，在“物理光学”中已经作了较为详细的讨论，本书不再重复。

由于光栅仪器较之棱镜仪器有更高的分辨本领以及其它的优点，光栅光谱仪的生产和应用日趋广泛。但是由于光栅的制造较为复杂，要求高精度的加工设备，因而妨碍着它的更迅速的发展。目前已经出现了用非机械方法制造光栅的新技术。预计，随着新技术的成熟和发展，光栅的制造方法将大为简化，成本将大为降低而精度将有所提高，光栅光谱仪亦将取得更大的发展。

光栅光谱仪中所用的光栅有平面光栅和凹面光栅两种。本章重点讨论了平面定向光栅和平面光栅装置的特性，同时也讨论了凹面光栅和凹面光栅装置以及光栅的制造和检验。对于在红外工作中有时要用到的线光栅和片光栅因限于篇幅未予涉及。

§ 3-1 平面光栅

(一) 光栅方程

所谓光栅方程就是由光栅衍射形成主亮纹的条件。当只考虑光束的入射面与栅线垂直的情况时，光栅方程为

$$d(\sin i \pm \sin \theta) = m\lambda \quad (3-1)$$

的形式。式中 d 为栅距； i 为入射角； θ 为衍射角； m 为光谱级； λ 为波长。这里采用与本校编“物理光学”同样的符号规定即：角度的正负按几何光学的规定；括号中两个正弦函数之间如为透射光栅则取

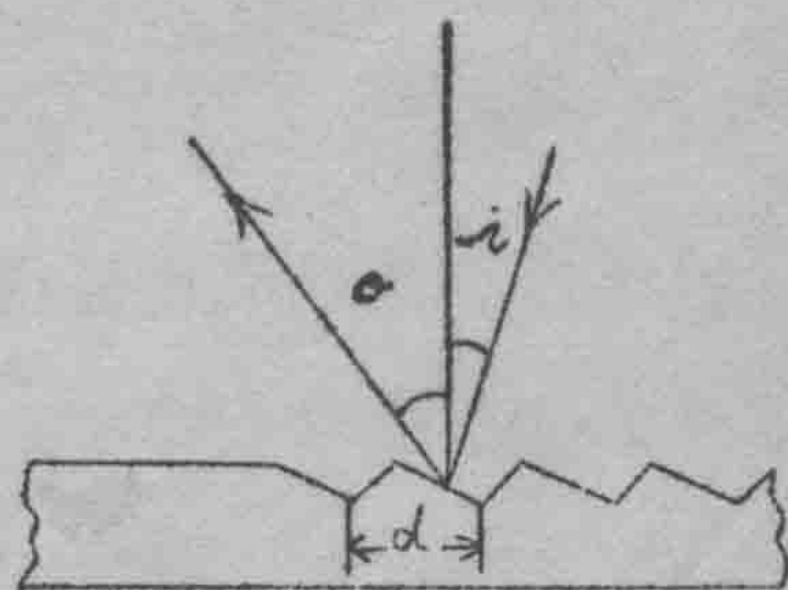


图 3-1

“-”号，反射光栅取“+”号。

由光栅方程，对于一定的光栅常数 d 和入射角 i 可以得知某个波长的 m 级谱线的位置（即 σ ）。

图 3-2 给出了在每毫米 1200 条刻线反射光栅的一级光谱中对应于各种入射角和衍射角的波长。

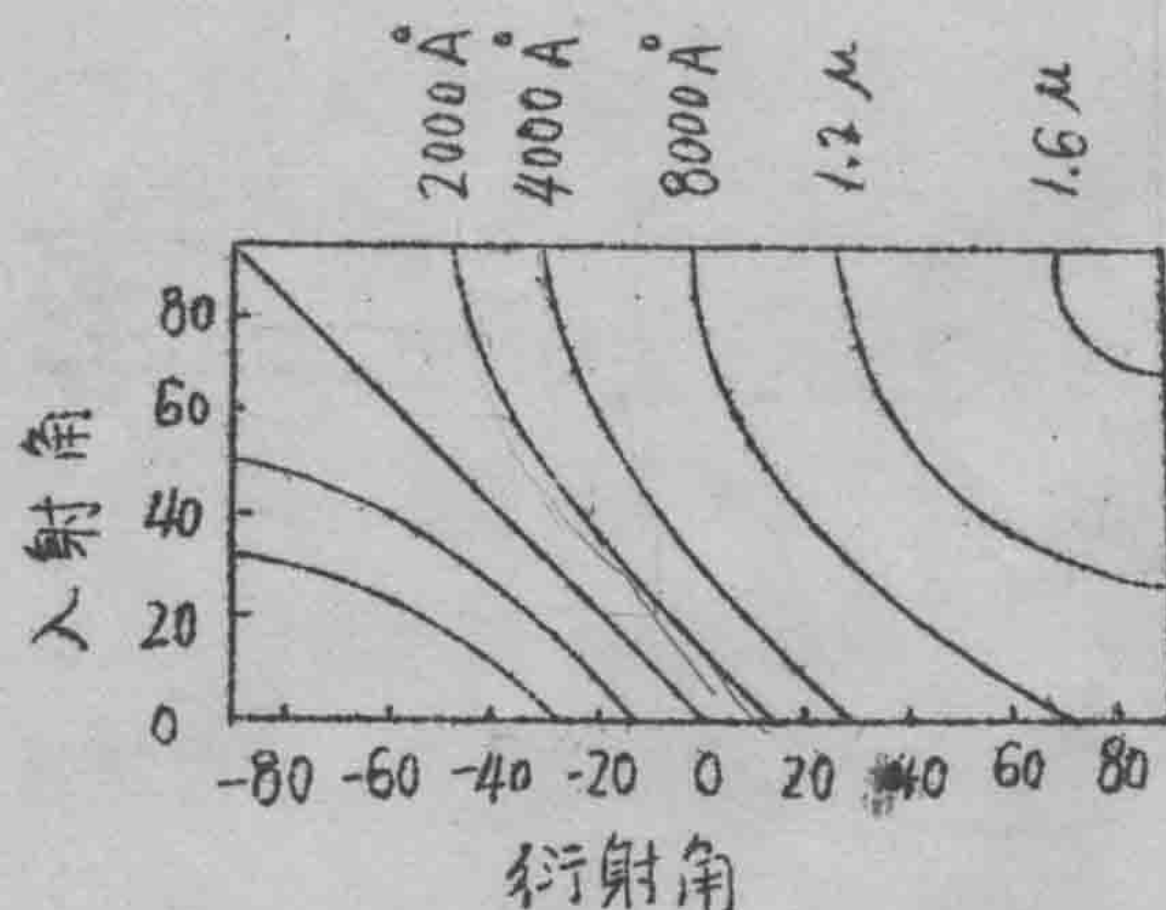


图 3-2

(二) 色散

经光栅衍射后，波长差别不大的两束光的角距离可以由光栅的“角色散”确定。角色散为：

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \sigma} \quad (3-2)$$

两条接近的谱线在谱板上的距离可以由仪器的“线色散”确定。线色散为：

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{d\sigma}{d\lambda} \cdot f' = \frac{mf'}{d \cos \sigma} \quad (3-3)$$

式中角度的单位是弧度；栅距 d 的单位是埃（ $\text{\AA}$ ）；照相物镜焦距 f' 的单位是毫米（ mm ）。这样，角色散的单位就是弧度/ $\text{\AA}$ ；线色散的单位是 $\text{mm}/\text{\AA}$ 。习惯上用每毫米上的埃数（ $\text{\AA}/\text{mm}$ ）表示线色散。用这种方法表示时，数字愈小，线色散愈大。

角色散公式（3-2）是在入射角 i 保持不变的条件下对光栅方程微分得到的。该式说明，为了得到较大的色散，必须使用栅距较小（每毫米的刻线数较多）的光栅在较高的级次下工作。但是光谱级 m 和栅距 d 又是相关的，由光栅方程，

$\frac{m}{d} = \frac{\sin i \pm \sin \theta}{\lambda}$ ，因此可知，只要某个波长的衍射角 θ 选定了，

比值 $\frac{m}{d}$ 就是常数，所以色散实际上仅取决于 θ 。这里需要说明的是，

每毫米的刻线数不能无限制地大，因为刻槽宽度不能小于光的波长。当刻槽宽度小于波长时，光栅就只能起反射镜的作用了。由于在红外波段缺乏合适的泸光片，利用这个原理可以采用栅距为某一特定值的光栅作为分离泸光片。

在光栅的法线附近， $\theta \rightarrow 0$ ， $\cos \theta \rightarrow 1$ ， $\cos \theta$ 随 θ 的变化很小，这时 $(\frac{d\theta}{d\lambda})_{\theta \rightarrow 0} = \frac{m}{d}$ = 常数，即衍射角的差别与波长差成线性关系。这个区域的光谱称为正常光谱。

(三) 分辨本领

和其它光谱仪器一样，光栅的分辨本领也是指它分开相邻两条谱线的能力，用 $R = \frac{\lambda}{\delta \lambda}$ 表示。这里， $\lambda + \delta \lambda$ 是刚能与波长为 λ 的谱线区分开的谱线的波长。

光栅的理论分辨本领是根据瑞利准则对两条等强度窄谱线确定的。

由图 3-3，一个有 N 条刻槽，栅距为 d 的光栅在衍射方向的投影宽度为 $D = Nd \cos \theta$ 。这样一个孔径的分辨

角是 $\frac{\lambda}{D} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$ (弧度)；而由色

散公式 $\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$ ，两条波长间隔为

为 $\delta \lambda$ 的谱线对照相物镜后节点的张角为 $\frac{m \delta \lambda}{d \cos \theta}$ 。如果这两条谱线

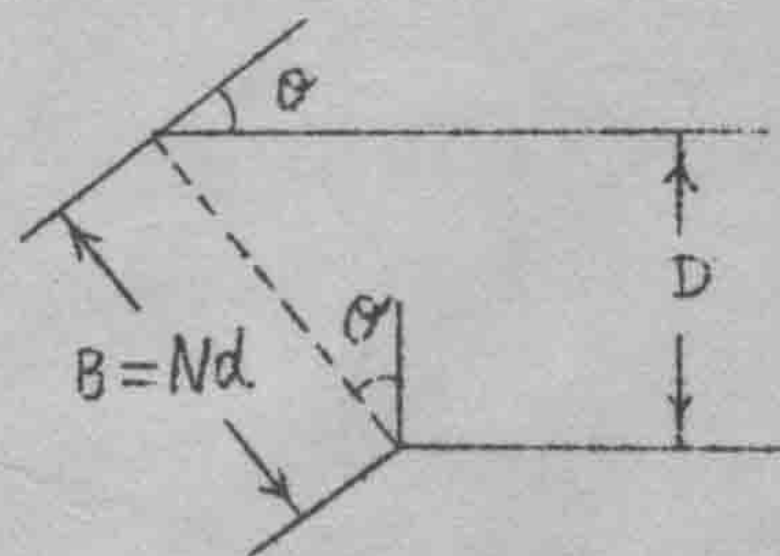


图 3-3

恰能分辨，则这两个角相等，即：

$$\frac{\lambda}{Nd \cos \sigma} = \frac{m \delta \lambda}{d \cos \sigma}$$

所以

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN \quad (3-4)$$

即光栅的分辨本领等于光谱级和光栅上总刻线数的乘积。把光栅方程代入上式得：

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = \frac{Nd(\sin i \pm \sin o)}{\lambda} \quad (3-5)$$

这说明为了获得高分辨本领，需要在大角度下（即 $|\sin i \pm \sin o|$ 较大）使用大光栅。

前已提到，光谱仪的实际分辨本领与很多因素有关。就光栅本身来说，光栅所能达到的实际分辨本领取决于光栅表面的光学质量和刻线间隔的均匀性。在临界缝宽的条件下，一般光栅的实际分辨本领在一级光谱约为理论值的 70—80%，二级约为 60%。

临界缝宽 a_0 可由下式求出：

$$a_0 = \frac{\lambda f}{D} = \frac{\lambda f}{B \cos \sigma} = \frac{\lambda f}{Nd \cos \sigma} \quad (3-6)$$

式中 λ 是波长； f 是准直物镜的焦距； D 是照相物镜的有效孔径；

$Nd = B$ 是光栅的有效宽度； σ 是光谱的中心波长的衍射角。

(四) 闪耀

近代光栅是用闪耀的办法把光能量集中到所要求的波长区。

光能量在光栅光谱的各不同级里的分配取决于光栅刻槽的微观形状。只要使刻槽面为平面并控制槽面的斜率，使得每个槽面都相当于一个小镜子把光线反射到所要求的方向上，就会使入射的光能量高度

集中在这个方向上，这就叫作“闪耀”。从光栅上衍射的方向恰好是槽面反射光的方向的那个波长称为“闪耀波长”。闪耀波长通常是对第一级光谱来说的。当闪耀波长是 λ_0 时，在第二级光谱中对 $\frac{\lambda_0}{2}$ 也闪耀，在第三级光谱中则对 $\frac{\lambda_0}{3}$ 闪耀，余此类推。

刻槽面与光栅面的夹角，或者槽面法线与光栅法线的夹角（如图3-4所示的 α ）称为“闪耀角”。

如上所述，闪耀的一般条件是

$$\alpha - i = \sigma - \alpha$$

（对于槽面来说即 $\sigma' = -i'$ ）或

$$\alpha = \frac{i + \sigma}{2} \quad (3-7)$$

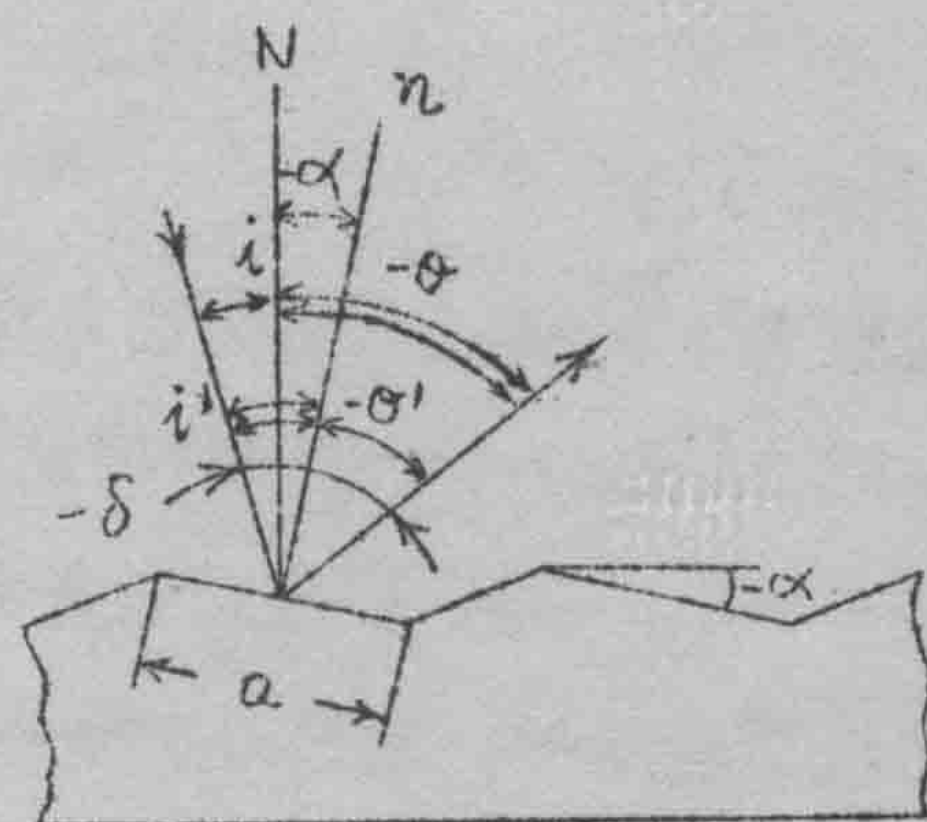


图 3-4

这个闪耀条件有时称为付闪耀条件。在付闪耀条件下的光栅方程可写成如下的形式：

$$2d \sin \alpha \cos(\alpha - i) = m \lambda \quad (3-8)$$

习惯上在定义和计算闪耀角和闪耀波长时，都假定入射角和衍射角是相同的。这实际上就是自准直型式或者叫作立特洛 (Littrow) 型式的情况，如图3-5所示。在这种情况下，

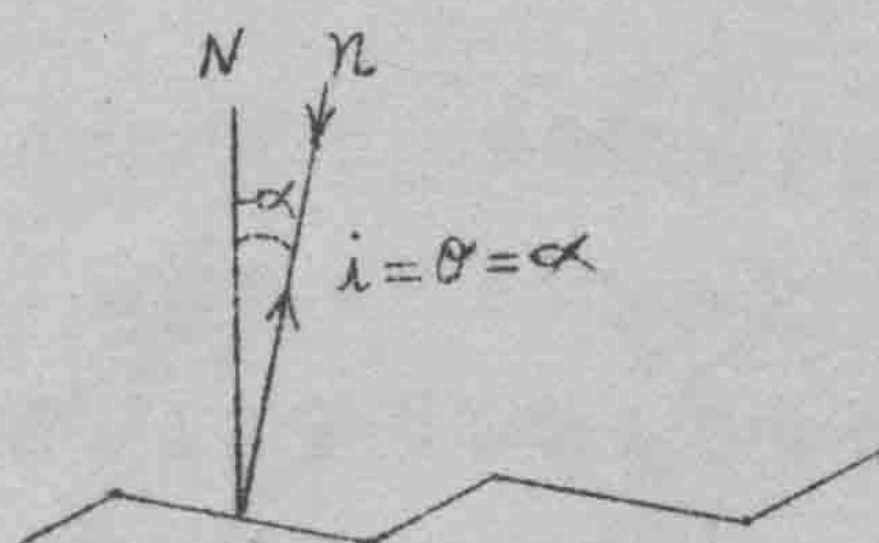


图 3-5

$$i = \sigma = \alpha \quad (3-9)$$

这个闪耀条件有时称为主闪耀条件。此时光栅方程可写成如下的形式：

$$2d \sin \alpha = m \lambda \quad (3-10)$$

将(3-10)式代入(3-8)式中,可以求出在付闪耀条件下的闪耀波长 $\lambda_{\text{付闪}}$ 与在主闪耀条件下的闪耀波长 $\lambda_{\text{主闪}}$ 的关系:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{付闪}} &= \lambda_{\text{主闪}} \cos(\alpha - i) \\ &= \lambda_{\text{主闪}} \cos\left(\frac{\alpha - i}{2}\right) \\ &= \lambda_{\text{主闪}} \cos \frac{\delta}{2} \quad (3-11)\end{aligned}$$

式中 $\delta = \alpha - i$ 是入射光线与衍射光线之间的夹角。例如,一块对 $7500\text{\AA}$ 在 $i = 0$ 时闪耀的光栅当 δ 为 60° 时将在 $6459\text{\AA}$ 处闪耀;当 $\delta = 90^\circ$ 时,闪耀波长变成 $5303\text{\AA}$ 。由此可见,当反射光栅在掠入射下使用时,它可对十分短的波长(甚至 $10\text{\AA}$)闪耀。例如,一块在 $i = 0$ 条件下对 $1200\text{\AA}$ 闪耀的光栅, $\alpha = 4^\circ$,当 $i = 88^\circ$ 或 $|\frac{\delta}{2}| = 84^\circ$ 时,其闪耀波长为 $126\text{\AA}$ 。

在公式(3-10)中,令 $m = 1$, λ 即闪耀波长,则:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_{\text{闪}}}{2d}$$

由于栅距 d 不能小于波长 λ ,可见,反射光栅在 $i = 0$ 的条件下,闪耀角的最大值不能超过 30° 。

透射光栅也可以闪耀。如图3-6所示,刻槽是复制于粘在光学玻璃或者熔融石英基板上的一层透明树脂上的。这相当于许多小棱镜的衍射。不同波长的光通过小棱

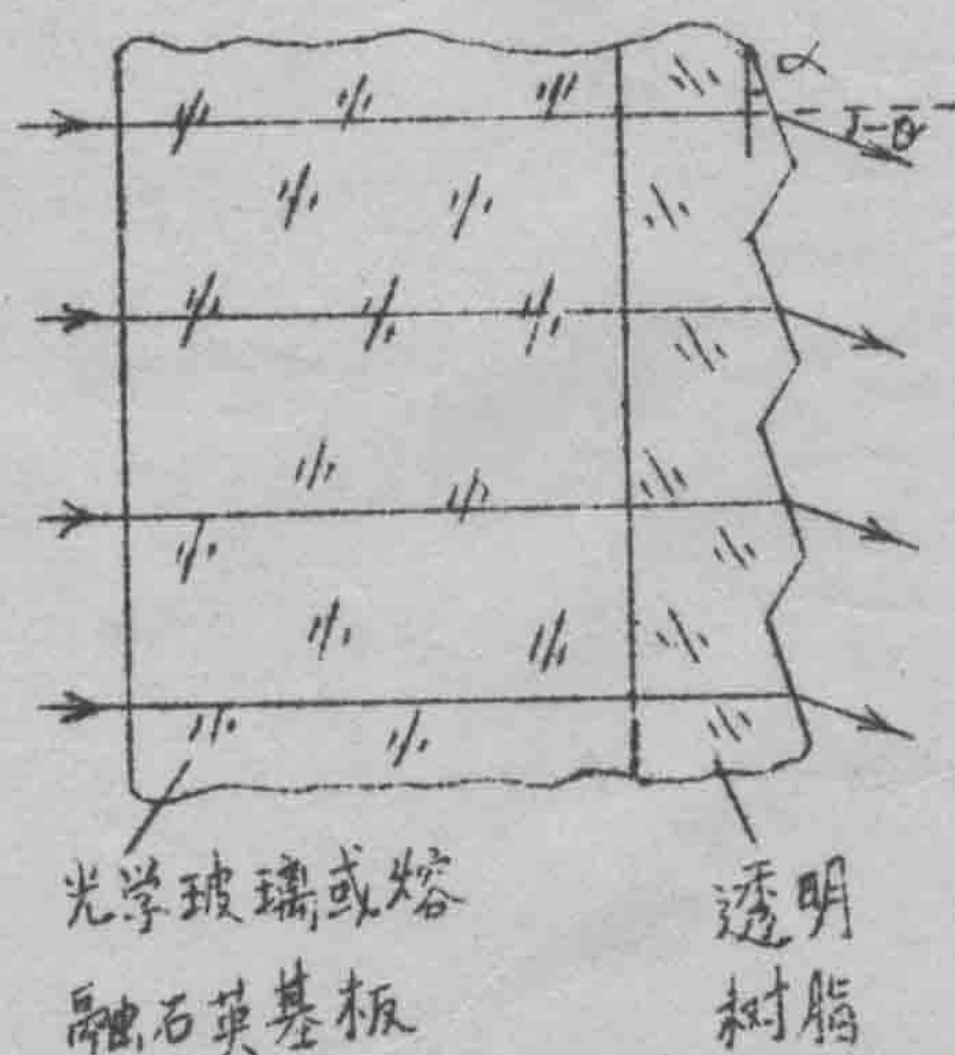


图 3-6

镜后向不同的方向折射。就是说，不同波长的光从每个槽面上衍射的主极大的方向不同。当某个波长从槽面上衍射的主极大方向恰好就是该波长的一级谱线的方向时，这个波长就是闪耀波长。显然，闪耀波长不但与闪耀角 α 有关而且还与树脂的折射率 n 有关。在最简单的情况下，光线以垂直于光栅面的方向入射，如图3-6。此时由于入射角 $i=0$ ，所以 $\sin i = 0$ ，所以 $\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$ 。知道了闪耀波长 $\lambda_{\text{闪}}$ 的衍射角 $\theta_{\text{闪}}$ 后，即可按折射定律求出闪耀角 α 。参看

图3-7。

$$\begin{aligned} n \sin \alpha &= \sin(-\theta_{\text{闪}} + \alpha) \\ &= -\sin \theta_{\text{闪}} \cos \alpha + \cos \theta_{\text{闪}} \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{-\sin \theta_{\text{闪}}}{n - \cos \theta_{\text{闪}}} \quad (3-12)$$

式中 n 是树脂对闪耀波长的折射率。

在这种情况下，闪耀角的最大值由全反射所限制。

$$\sin \alpha < \frac{1}{n_{\text{max}}} \quad (3-13)$$

此处 n_{max} 是透明树脂对工作波段最短波长的折射率。一般，闪耀角最大限制在 30° 左右。

透射光栅的槽纹间距也必须大于波长。若小于波长，就不起光栅的作用而是象一块透明平板了。

还可以把透射光栅做在一块直角棱镜的弦面上，并使得闪耀角等于棱镜角，如图3-8所示。这实际上就是一个透射式的阶梯光栅。在这种情况下，闪耀波长将笔直地通过光栅，并且满足下面的关系：

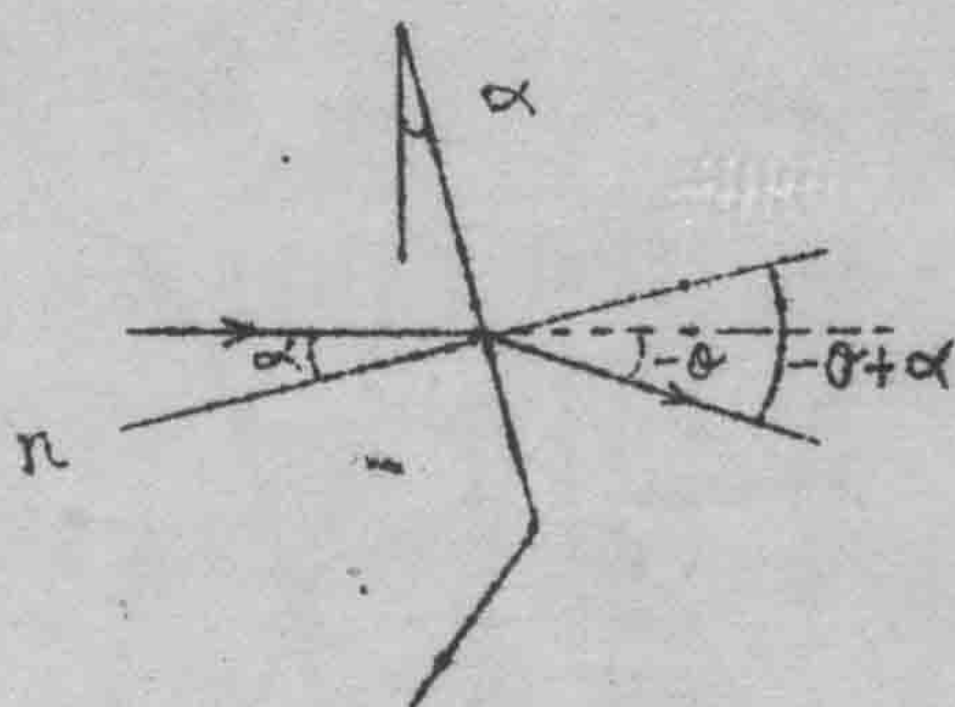


图 3-7

$$\sin \alpha = \frac{m\lambda}{d(n-1)} \quad (3-14)$$

这类光栅的色散等于光栅的色散加上棱镜的色散，因此不再是线性的了。

闪耀光栅对各级光谱的相对效率（即相对反射率或相对透射率）如图 3-9 所示。这种曲线可以根据衍射理论计算后按波长逐点描出。例如，在自准直

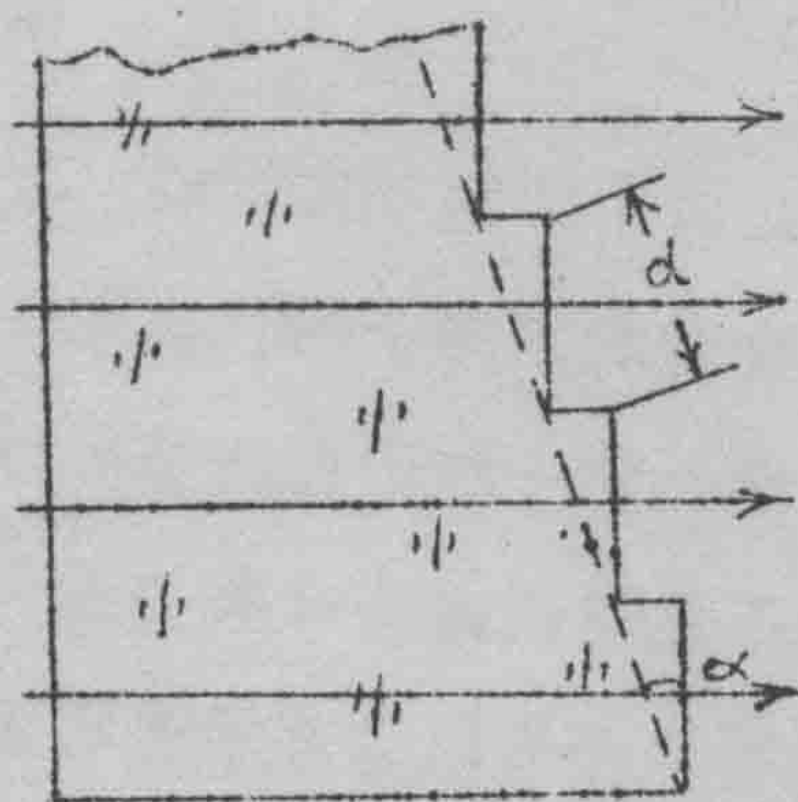


图 3-8

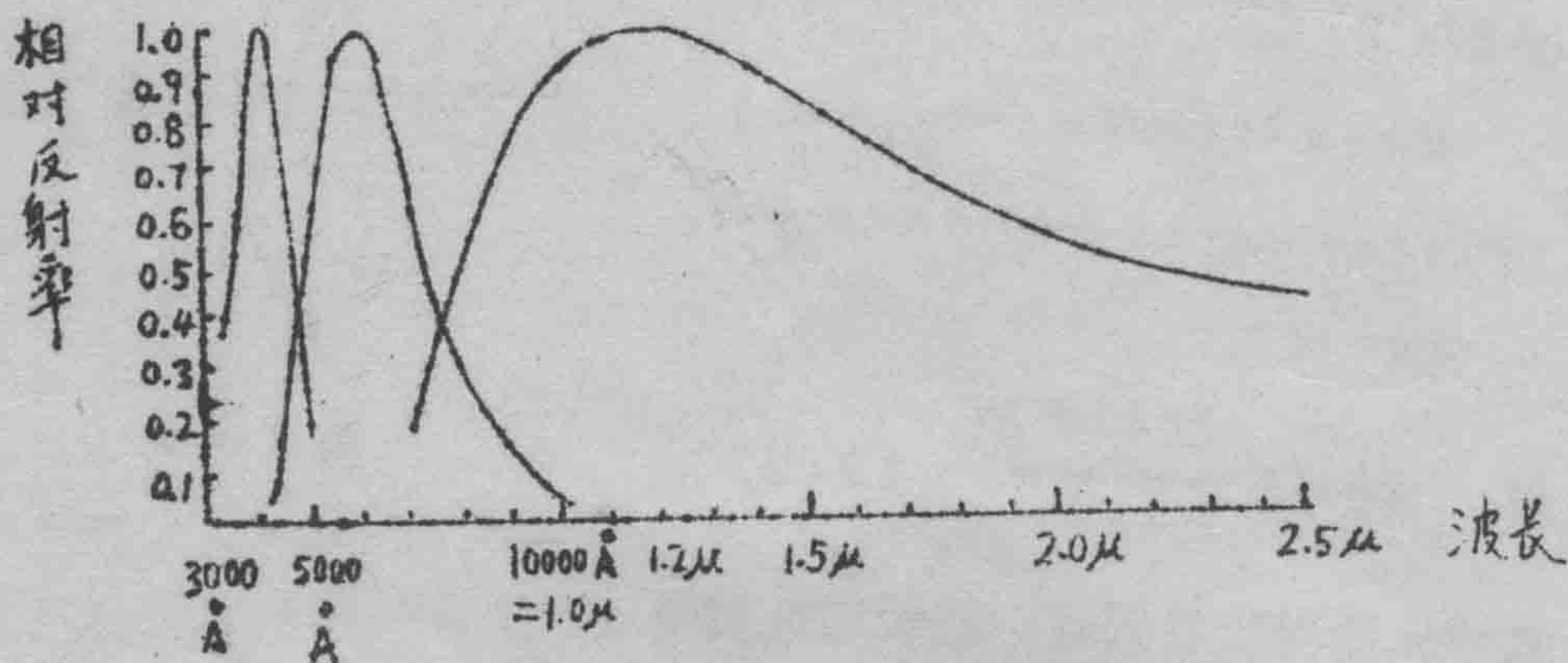


图 3-9

系统中， $i = \alpha$ ，令 $m = 1$ ，就可算出不同波长的衍射角 σ ；再根据单缝衍射的强度分布

$$I \sim \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{\pi a (\sin(i - \alpha) + \sin(\sigma - \alpha))}{\lambda}$$

$$= \frac{\pi a \sin(\sigma - \alpha)}{\lambda}$$

假定在入射光中各种波长的能量相同，即可描出各波长谱线的相对强

度，这也就是光栅对一级光谱各波长的相对效率（以闪耀波长处的峰值效率为 1）。

相对效率大于 0.5 的波长范围一般认为是有用的。有用波长范围可由一个经验公式给出：

$$\left(\frac{2}{2m+1}\right) \lambda_{\text{闪}} < \lambda < \left(\frac{2}{2m+1}\right) \lambda_{\text{闪}} \quad (3-15)$$

式中 $\lambda_{\text{闪}}$ 是第一级的闪耀波长； m 是所使用的级次。

一块闪耀角为 $5^\circ \sim 10^\circ$ ，刻槽轮廓为阶梯形的较好光栅，在闪耀波长处的峰值效率实际可达 80% 以上。随着闪耀角的增大，峰值效率也将下降。刻槽的两个面的夹角愈接近 90° ，峰值效率愈高，但由于金刚石刀头很难磨锐而不易做到这一点。

在实际光栅中光强分布与理想分布不完全一致，因为光栅刻槽的形状不可能很精确地控制。

此外，还存在着偏振效应。当入射光是自然光时，被光栅衍射的光发生显著的偏振。实践证明，当波长大于闪耀波长时，电向量在垂直于刻槽方向上的分量具有较大的强度；而当波长小于闪耀波长时，电向量在平行于刻槽的方向上有较大的强度。

(五) 光栅方程的一般形式，谱线弯曲

前曾指出，(3-1) 式所给出的光栅方程仅是入射面与线槽垂直的特殊情况，也就是只考虑点光源位于仪器主截面（通过准光镜和照相物镜的光轴并与光栅线槽垂直的平面）上的情况。实际的仪器都是使用具有一定高度的狭缝光源。从狭缝上不同点发出的光束以不同的角度入射到光栅面上。

为了进一步研究在倾斜入射情况下光栅的衍射，我们在光栅面上建立一个直角坐标系，如图 3-10 所示。光栅面为 yOz 面， y 轴与

线槽平行。斜入射光束中的一条光线通过座标原点 O ，另一条光线入射到光栅上的 P 点， P 点的座标是 $(0, y, z)$ 。因为入射光束是准直光，故这两条光线平行。从 P 点向第一条光线和它的衍射光线分别作

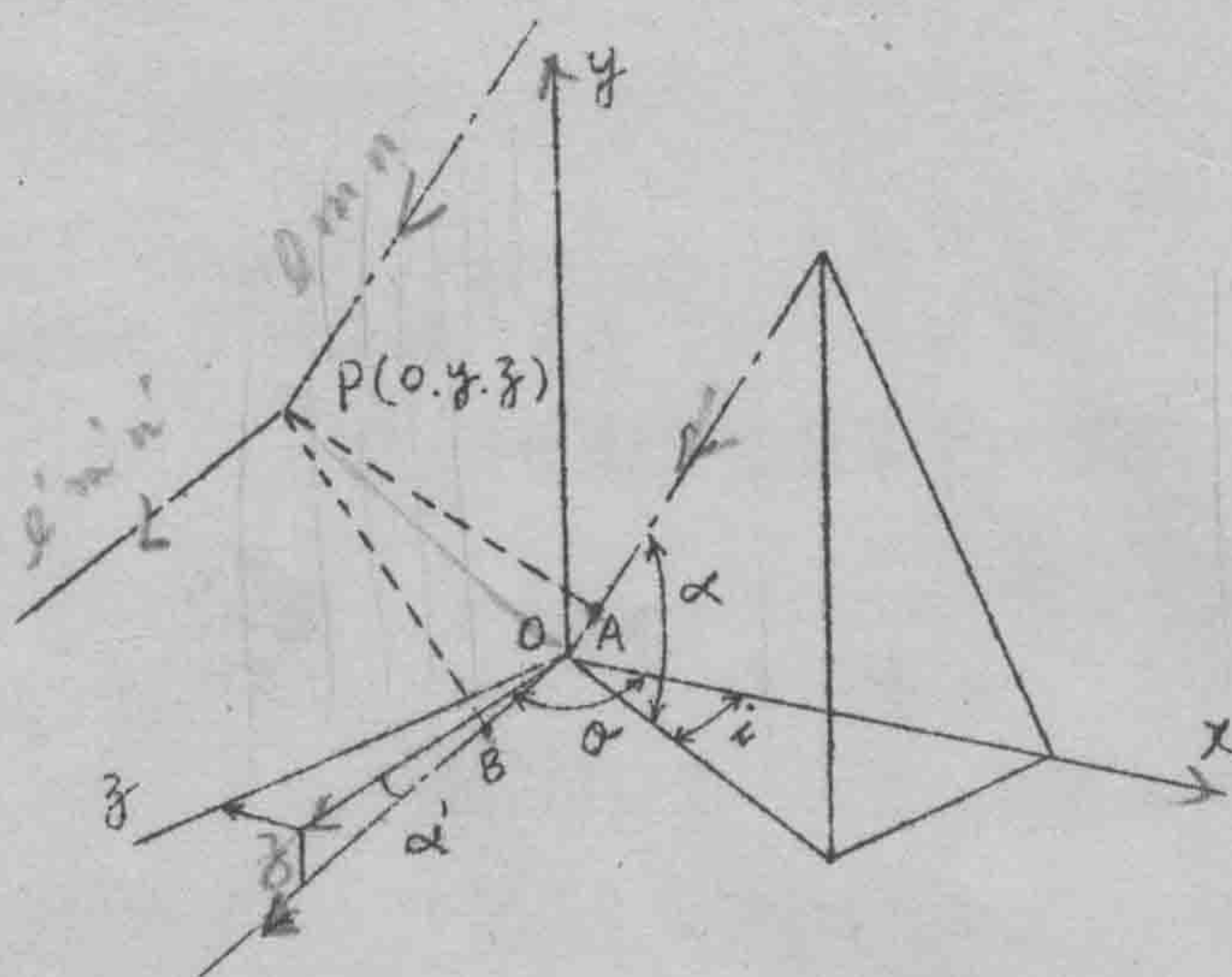


图 3-10

垂线，垂足是 A 和 B 。显然 $\overline{AO}$ 即为两条入射光线的光程差； $\overline{OB}$ 为两条衍射光线的光程差。设入射光束的方向余弦为 ℓ, m, n ；衍射光束的方向余弦为 ℓ', m', n' ，则

$$\overline{AO} = my + nz$$

$$\overline{OB} = m'y + n'z$$

总光程差为：

$$\overline{AO} + \overline{OB} = (m + m')y + (n + n')z$$

对于过 O 点和 P 点的两条线槽来说，间距 z 是常数，而 y 取任何值时上述光程差都应保持不变，因此必须： $m = -m'$ ，即 $\alpha = -\alpha'$ （

α 和 α' 分别为入射光线和衍射光线与 xOy 面的夹角）。由图可见，

$n = \cos\alpha \sin i$ ； $n' = \cos\alpha' \sin o = \cos\alpha \sin o$ 。故总光程

为： $(n + n')z = \cos\alpha(\sin i + \sin o)z$

如果 z 为一个栅距 d ，则获得主亮纹的条件应为：

$$d \cos\alpha(\sin i + \sin o) = m\lambda \quad (3-16-1)$$

若为透射光栅，则为：

$$d \cos\alpha(\sin i - \sin o) = m\lambda \quad (3-16-2)$$

这就是斜入射情况下光栅方程的一般形式。

实际上， α 就是狭缝上主截面外点偏离主截面的距离对于准光镜节点的张角，如图 3-11 所示。对于在主截面上的狭缝中点， $\alpha = 0$ ，光栅方程为 (3-1) 式的形式。随着高度的增加， α 也增大，但在主截面上度量的入射角 i 不变，由 (3-2) 式可见，衍射角 θ （也是在主截面上度量的）相应地增大了。 α 愈大， θ 也愈大，这就造成了谱

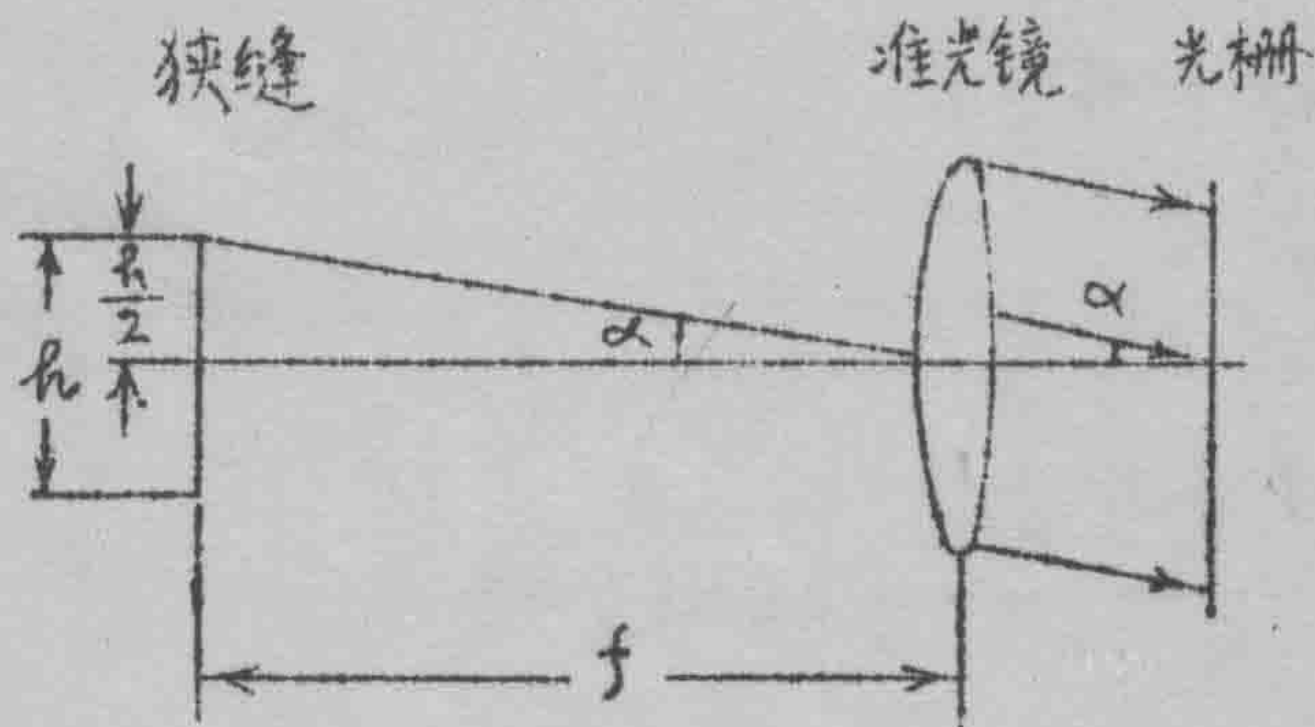


图 3 - 11

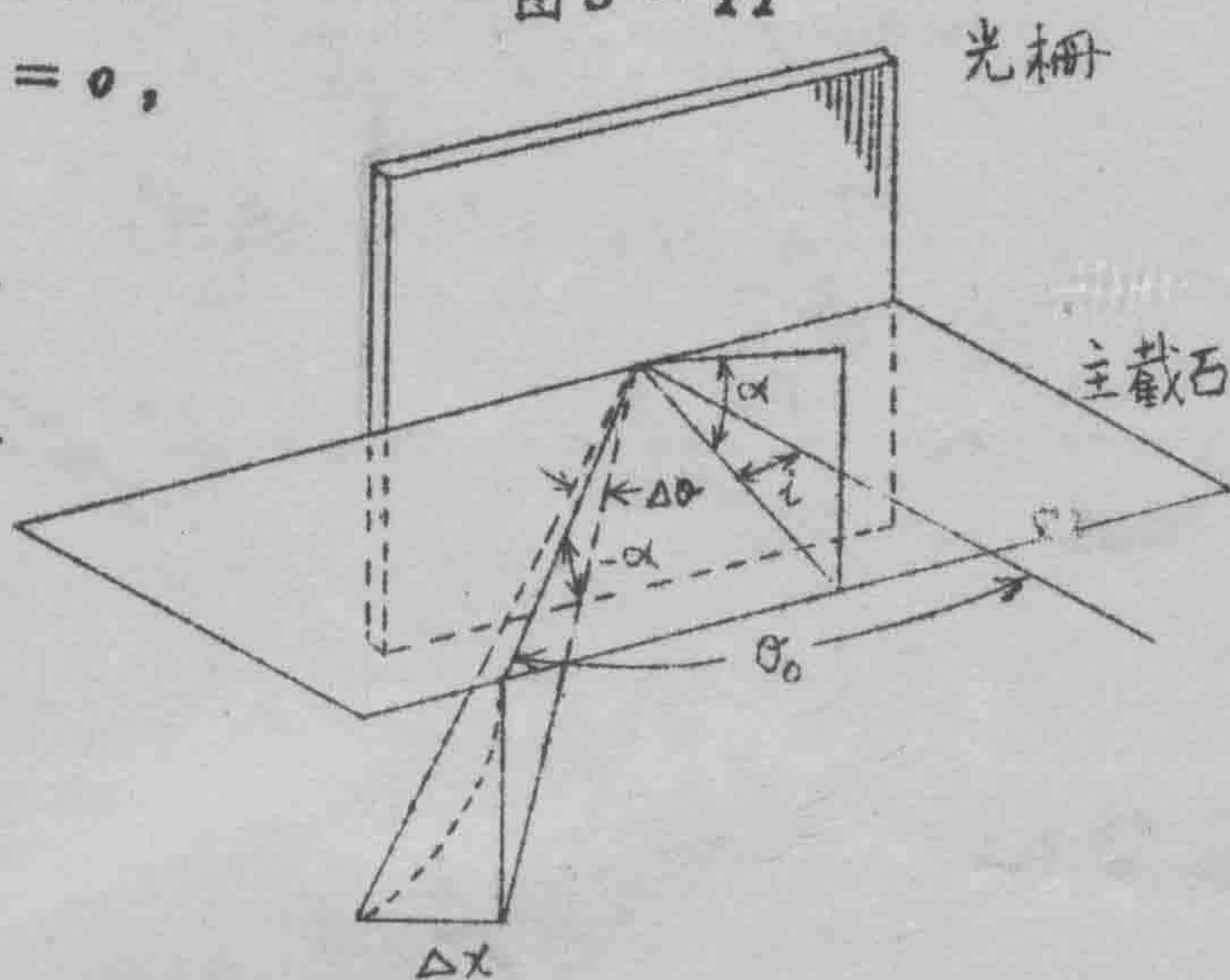


图 3 - 12

线的弯曲。图 3-12 绘出了由直狭缝产生弯曲谱线的情况。由于在同级光谱中，波长愈长，偏离零级愈远，所以与棱镜所产生的谱线弯曲不同，光栅谱线是弯向长波方面的。

由于谱线弯曲会造成单色仪的分辨本领或单色化程度的降低，因此有必要对谱线弯曲作出定量的计算。

对于狭缝中点， $\alpha = 0$ ，

$$\sin \theta_0 = \frac{m \lambda}{d} - \sin i$$

对于狭缝端点， $\alpha = \frac{h}{2f'}$ 。（ f' 为准光镜和照相物镜的焦距，

在平面光栅装置中，两者通常是一样的。）由于 α 很小（一般都小于

$$1/100), \text{ 故 } \sec \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2}; \sin \sigma = \frac{m\lambda}{d \cos \alpha} - \sin i = \frac{m\lambda (1 + \frac{\alpha^2}{2})}{d} - \sin i. \text{ 则}$$

$$\sin \sigma - \sin \sigma_0 = \frac{m\lambda \alpha^2}{2d}$$

$$2 \sin \frac{\sigma - \sigma_0}{2} \cos \frac{\sigma + \sigma_0}{2} = \frac{m\lambda \alpha^2}{2d}$$

因为 $\sin \frac{\sigma - \sigma_0}{2} \simeq \frac{\sigma - \sigma_0}{2} = \frac{1}{2} \Delta \sigma$ 和 $\cos \frac{\sigma + \sigma_0}{2} \simeq \cos \sigma_0$ ，所以

$$\Delta \sigma = \sec \sigma_0 \cdot \frac{m\lambda \alpha^2}{2d} \quad (3-17)$$

弯曲谱线的矢高为：

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta \sigma \cdot f' \\ &= \frac{m\lambda \alpha^2 f'}{2d} \sec \sigma_0 \\ &= \frac{m\lambda h^2}{8df' \cos \sigma_0} \end{aligned} \quad (3-18)$$

(3-18) 式说明，谱线弯曲成抛物线状。在这抛物线的顶部可用圆弧代替，圆弧的半径为：

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{h^2/4 + (\Delta x)^2}{2 \cdot \Delta x} \\ &\simeq \frac{h^2/4}{2 \cdot \Delta x} = \frac{f' d \cos \sigma_0}{m\lambda} \\ &= \frac{f'^2}{\lambda (\frac{d}{d\lambda})} \end{aligned} \quad (3-19)$$

与棱镜所产生的谱线比较, 光栅所产生的谱线更接近于直线。

在光栅单色仪中, 当采用直狭缝时, 单色化程度和分辨本领都要受到限制。由公式 (3-2), $\Delta\sigma = \sec\sigma_0 \cdot \frac{m}{d} \cdot \Delta\lambda$; 由 (3-

17) 式, $\Delta\sigma = \sec\sigma_0 \cdot \frac{m\lambda\alpha^2}{2d}$ 则:

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\lambda}{8} \cdot \left(\frac{h}{f'}\right)^2 \quad (3-20)$$

或
$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2}{\alpha^2} = \frac{8}{\left(\frac{h}{f'}\right)^2} \quad (3-21)$$

(3-20) 式给出了由谱线弯曲所限制的光谱纯度的极限; (3-21) 式给出了由谱线弯曲所限制的分辨本领的极限。

(六) 光栅的放大率

正象一个不在最小偏向角位置工作的棱镜有放大率一样, 一个光栅如果不工作在衍射角的大小等于入射角的大小的情况时, 也会有放大率。其角放大率为

$$\frac{d\sigma}{di} = - \frac{\cos i}{\cos\sigma} \quad (3-22)$$

式中 i 是入射角; σ 是衍射角。

§ 3-2 凹面光栅

为了避免折射材料透过率对使用波段的限制和为了减少光学另件的数量以减少能量的损失及杂光的来源, 常将光栅刻在大半径凹球面上, 这就是凹面光栅。凹面光栅同时具有色散和聚焦两个作用, 因而不需要准光镜和照相物镜。但当入射角和衍射角较大时将产生严重的

象差。

直到现在，凹面光栅都是刻在球面上的线槽间隔相等的反射光栅。而所谓“线槽间隔相等”，准确地说应是“线槽间隔在某一平面上的投影相等”。之所以如此，是由光栅的刻制方法决定的。这个平面就是包含光栅坯在刻划机上的运动方向的一个弦面。

本节首先讨论凹面光栅的光程表示式，然后在这个基础上讨论它的成像条件、象差和其它特性。

(一) 凹面光栅的光程表示式

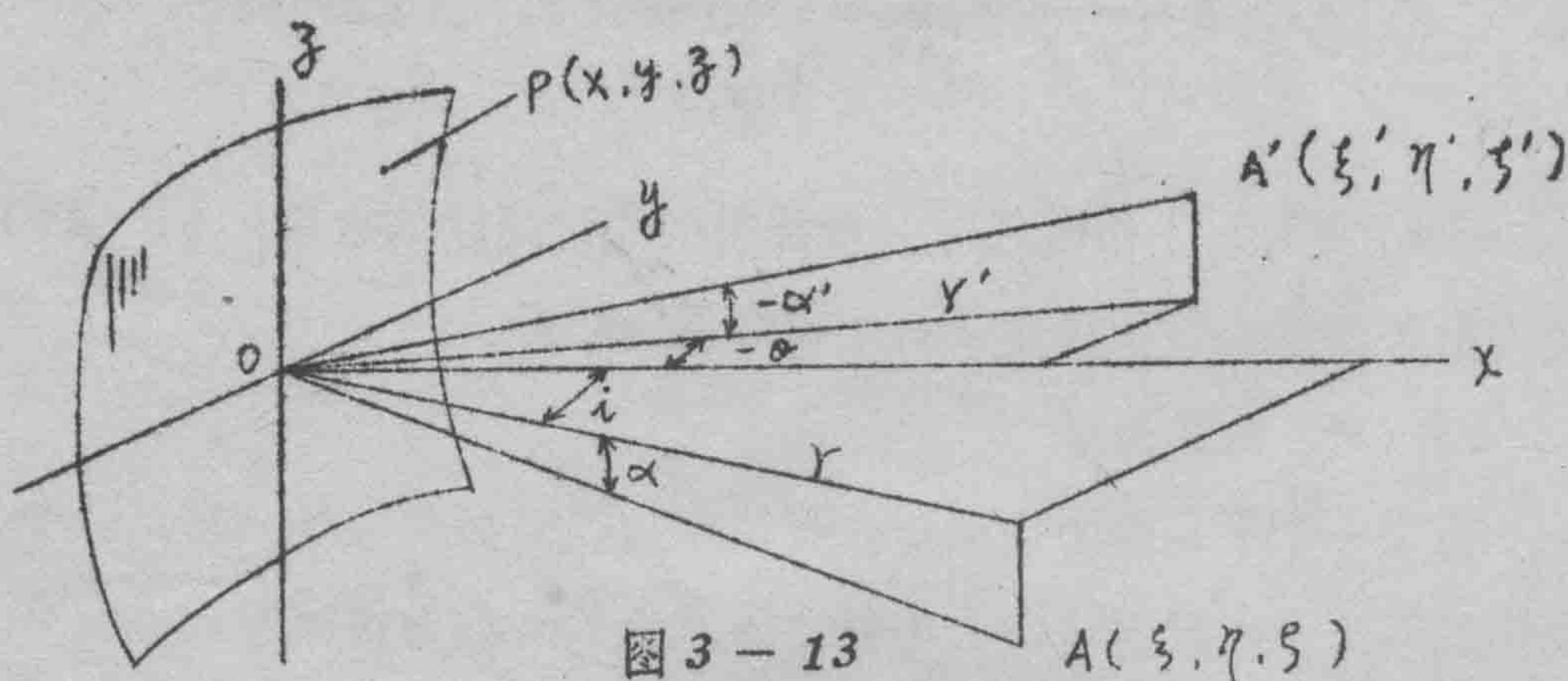


图 3-13

如图 3-13 所示，以光栅面（球面）上的中心点 O 为原点建立一个直角坐标系。 z 轴通过球面的球心。球面的半径为 R 。光栅的线槽在 z 方向，线槽间隔（栅距）为 d 。 $P(x, y, z)$ 是光栅面上的一点； $A(\xi, \eta, \zeta)$ 和 $A'(\xi', \eta', \zeta')$ 分别为光源（沿 z 方向的狭缝）和象上的对应点。则光程 $[AP]$ 和 $[A'P]$ 与各点的坐标有如下的关系：

$$\begin{aligned} [AP]^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \\ [A'P]^2 &= (x-\xi')^2 + (y-\eta')^2 + (z-\zeta')^2 \end{aligned} \quad (3-23)$$

并且由

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$$

或
得:

$$R^2 - 2Rx + x^2 = R^2 - (y^2 + z^2)$$

$$x = R - \sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}$$

由于 y , z 与 R 相比均为小量,故可按台劳级数的牛顿二项式将上展开为

$$x = \frac{y^2 + z^2}{2R} + \frac{(y^2 + z^2)^2}{8R^3} + \frac{(y^2 + z^2)^3}{16R^5} + \dots \quad (3-24)$$

如果是反射镜,要求成理想象的条件是 $[AP] + [A'P] = [AO] + [A'O] = \text{常数}$ 。而光栅成象与一般成象不同,它要求通过相邻两条线槽的光线的光程相差波长的一定整倍数,即要求

$$W = [AP] + [A'P] = [AO] + [A'O] - \frac{y}{d} m \lambda$$

$$\text{或 } W + \frac{y}{d} m \lambda = [AP] + [A'P] + \frac{y}{d} m \lambda = [AO] + [A'O] \\ = \text{常数} \quad (3-25)$$

当光程满足上式时即可得到清晰的谱线。

把(3-23)式展开并进一步将 ξ , η 用极座标 r , i 表示,则:

$$\begin{aligned} [AP]^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2x\xi - 2y\eta - 2z\zeta \\ &= 2Rx + r^2 + \zeta^2 - 2xr\cos i - 2y r \sin i - 2z\zeta \end{aligned}$$

再把 x 用(3-24)式的关系代换,则:

$$\begin{aligned} [AP]^2 &= \zeta^2 - 2z\zeta + (r - y \sin i)^2 + y^2 \left(\cos^2 i - \frac{r \cos i}{R} \right) \\ &\quad + z^2 \left(1 - \frac{r \cos i}{R} \right) + \left(1 - \frac{r \cos i}{R} \right) \left(\frac{(y^2 + z^2)^2}{4R^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(y^2 + z^2)^3}{8R^4} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3-26)$$

实际光栅在使用时相对孔径不大,狭缝也不太长, y , z , ζ 与

r 相比均为小量, 于是又可将 (3-26) 式按牛顿二项式展开。令

$$\begin{aligned} \Delta = & \zeta^2 - 2\gamma\zeta + \gamma^2 \left(\cos^2 i - \frac{r \cos i}{R} \right) + \gamma^2 \left(1 - \frac{r \cos i}{R} \right) + \\ & + \left(1 - \frac{r \cos i}{R} \right) \left(\frac{(\gamma^2 + \gamma^2)^2}{4R^2} + \frac{(\gamma^2 + \gamma^2)^3}{8R^4} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3-27)$$

则

$$(AP)^2 = (r - \gamma \sin i)^2 + \Delta$$

$$(AP) = [(r - \gamma \sin i)^2 + \Delta]^{1/2}$$

$$= (r - \gamma \sin i) \left(1 + \frac{\Delta}{(r - \gamma \sin i)^2} \right)^{1/2}$$

$$= r - \gamma \sin i + \frac{\Delta}{2(r - \gamma \sin i)} - \frac{\Delta^2}{8(r - \gamma \sin i)^3} + \dots$$

$$= r - \gamma \sin i + \frac{\Delta}{2r} \left(1 + \frac{\gamma \sin i}{r} + \frac{\gamma^2 \sin^2 i}{r^2} + \dots \right)$$

$$- \frac{\Delta^2}{8r^3} \left(1 + \frac{3\gamma \sin i}{r} + \frac{6\gamma^2 \sin^2 i}{r^2} + \dots \right) + \dots$$

(3-28)

同样, 光程 $(A'P)$ 也可以展开成相似的表示式。这样, 经过整理后, (3-25) 式成为:

$$\begin{aligned} W + \frac{\gamma}{d} m \lambda = & W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + \dots + W_{\zeta \cdot 0} + \\ & + W_{\zeta \cdot 1} + W_{\zeta \cdot 2} + \dots \end{aligned} \quad (3-29)$$

其中:

$$W_0 = r + r'; \quad (3-30-1)$$

$$W_1 = \gamma \left(\frac{m \lambda}{d} - \sin i - \sin o \right); \quad (3-30-2)$$