

經濟數學導引(II)

(線性代數)

經濟數學導引(II)

(線性代數)

目 錄

	矩陣.....	35
	2.2.6. 子矩陣.....	38
1. 線性空間.....	1	
1.1. 群.....	1	
1.2. 向量空間.....	1	
1.3. 子空間, 線性組合, 線性無關.....	3	
1.4. 向量系秩.....	6	
1.5. 基, 維, 坐標.....	8	
1.6. n 維實數空間.....	10	
2. 線性映射及矩陣.....	17	
2.1. 線性映射.....	17	
2.1.1. 定義, 線性映射之核及秩.....	17	
2.1.2. 同構, 自同態及自同構.....	19	
2.1.3. 線性映射矩陣.....	21	
2.2. 矩陣.....	23	
2.2.1. 定義.....	23	
2.2.2. 矩陣運算.....	28	
2.2.3. 矩陣秩.....	32	
2.2.4. 對稱及反號對稱矩陣.....	34	
2.2.5. 置換矩陣及有關		
3. 行列式.....	41	
3.1. 置換.....	41	
3.2. 行列式之表現.....	44	
3.3. Laplace 展開.....	48	
3.4. 行列式之計算規則.....	50	
3.5. Laplace 展開之推廣.....	53	
3.6. 計算法則應用.....	54	
3.7. 行列式乘法.....	56	
3.8. 行列式鑲邊.....	57	
4. 方陣.....	59	
4.1. 方陣之行列式及跡.....	59	
4.2. 正交方陣.....	60	
4.3. 逆矩陣.....	61	
4.3.1. 概念.....	61	
4.3.2. 逆矩陣性質.....	63	
4.3.3. 矩陣除法.....	64	
4.3.4. 互換過程.....	65	
5. 線性方程組.....	69	
5.1. 線性方程組之可解性.....	69	
5.1.1. 引言.....	69	
5.1.2. 非齊次線性方程組.....	70	

5.1.3. 齊次線性方程組	74	式求解	119
5.1.4. 線性方程組一般解	75	7.4.2. 動乘子	120
5.2. 線性方程組求解過程	76	7.4.3. 投資之適當調整	120
5.2.1. 以逆矩陣求解	76	7.4.4. 蛛網模型	121
5.2.2. Cramer 規則	76	7.5. 常數係數之線性齊次差 分方程式	122
5.2.3. Gauss 消去法	78	7.6. n階線性齊次差分方程組	123
5.2.4. 矩陣秩之計算	82	7.7. 常數係數之線性非齊次 差分方程式	124
6. 特徵值問題	84	7.8. Samuelson-Hicks 連 結模型	127
6.1. 矩陣等價性	84	8. 投入——產出理論	129
6.2. 特徵值及特徵向量	85	8.1. 假設	129
6.2.1. 多項式根	86	8.2. 封閉投入—產出模型	129
6.2.2. 相似矩陣, 特徵值 及特徵向量	88	8.3. 開放投入—產出模型	133
6.2.3. 對稱矩陣對角線化	92	8.4. 一簡單勞動值理論	134
6.2.4. 矩陣級數收斂性	95	8.5. 投入—產出系統內之擴張	135
6.3. 二次形式	96	8.6. 生產企業之投入—產生 模型	136
6.3.1. 定二次形式	97	9. 線性最適問題	141
6.3.2. 附帶條件之二次形式	101	9.1. 問題的建立	141
6.4. 非負矩陣	104	9.2. 最適性判據	144
6.4.1. 不可分矩陣	104	9.3. 單純形方法	145
6.4.2. 非負矩陣性質	106	9.3.1. 單純形算法	145
6.5. 強主對角線矩陣	108	9.3.2. 單純形算法之例子	148
7. 線性差分方程式	112	9.4. 對偶性	150
7.1. 有限差分	112	9.5. 產業計劃模型	152
7.1.1. Δ 算子	112	參考文獻	157
7.1.2. Δ 算子性質	113	索引	159
7.1.3. E算子	115	德文中文名詞對照表	
7.2. 差分方程式概念	116		
7.3. 一階差分方程式	117		
7.4. 一階線性差分方程式	119		
7.4.1. 一階線性差分方程			

1. 線性空間

1.1 羣

定義 1： A 爲一集合， $*$ 爲 A 之運算，把元素 $a \in A$ 及 $b \in A$ 對應至 $a * b \in A$ ；若下列公理成立，則此附有運算 $*$ 之集 A 稱爲群：

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ $a, b, c \in A$ (結合律)。
2. 有一中性元素 $n \in A$ ，對所有 $a \in A$ 滿足 $a * n = n * a = a$ 。
3. 對任 $a \in A$ 有一逆元素 $\bar{a} \in A$ ，使得 $a * \bar{a} = a * \bar{a} = n$ 。

若尚對所有 $a, b \in A$ ，

4. $a * b = b * a$ (交換律)，

則稱此群爲交換群。

我們可證明，一個群只有一個單位元素且對每個元素只有一個逆元素存在。

定義 2：若一交換群 A 之運算稱爲“加法”且以 $+$ 符號記之，則 A 稱爲加法群。此時以 0 表示單位元素，以 $-a$ 表 a 之逆元素， $a + b$ 稱爲 a 與 b 之和， $b + (-a)$ 稱爲 b 與 a 之差，且可寫成 $b - a$ 。

1.2 向量空間

設 R 表所有實數集。

定義 1：向量空間（線性空間）爲一加法群 A ，除加法外還有一“數積”運算，把任兩元素 $\lambda \in R$ 及 $a \in A$ 對應至 $\lambda a \in A$ ，且下公理成立：

5. $(\lambda \mu) a = \lambda (\mu a)$ $\lambda, \mu \in R$ 及 $a \in A$ (結合律)。
- 6a. $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$ $\lambda, \mu \in R$ 及 $a \in A$ 。
- 6b. $\lambda (a + b) = \lambda a + \lambda b$ $\lambda \in R$ 及 $a, b \in A$ (分配律)。
7. $1a = a$ $a \in A$ 。

A 之元素稱為向量， R 之元素稱為數， A 之單位元素稱為零向量。向量在下面是以粗體小寫拉丁字母表示。

定理 1： $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ 之充要條件為 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 。

證：由第一分配律，公理 6a，以 $\mu = 0$ 得

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mathbf{0} \mathbf{a}。$$

加上向量 $-\lambda \mathbf{a}$ ，得

$$(1) \quad \mathbf{0} \mathbf{a} = \mathbf{0}。$$

由第二分配律 6b，以 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 得

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{0}。$$

且同樣由加上一 $\lambda \mathbf{a}$ 得

$$(2) \quad \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0}。$$

由(1)及(2)等式得，若 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 則 $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ 。

其並由公理 5. 及 7. 得之：

$$\mathbf{a} = 1 \mathbf{a} = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \right) \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda} (\lambda \mathbf{a}) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{0} = \mathbf{0}, \lambda \neq 0。$$

定理 2： $(-\lambda) \mathbf{a} = -\lambda \mathbf{a}$ 及 $\lambda (-\mathbf{a}) = -\lambda \mathbf{a}$ 。

證：以 $\mu = -\lambda$ 代入第一分配律，得

$$\lambda \mathbf{a} + (-\lambda) \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

於是

$$(-\lambda) \mathbf{a} = -\lambda \mathbf{a},$$

此為第一部分。第二命題類似可證，以 $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ 代入第二分配律 6b. 即得 $\lambda (-\mathbf{a}) = -\lambda \mathbf{a}$ 。□

此兩分配律對有限多個項亦成立：

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}$$

及

$$\lambda \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \lambda \mathbf{a}_i,$$

此可由歸納法得證。

例：設 R^2 為所有有序實數對所成之集合，

$$R^2 = \{ \mathbf{a} / \mathbf{a} = (a_1, a_2), a_1 \in R \text{ 及 } a_2 \in R \}.$$

對加法

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

及數值

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda (a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2),$$

R^2 顯然構成一向量空間。 $(0, 0)$ 為零向量且 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 之逆元素為 $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2)$ 。

此向量空間可如下幾何方法表示，我們設想在平面上有一起點 x (圖 1)。

平面上其他每一點 a 可對應到從 x 到 a 之有向線段，且記之為關於 x 之位置向量 $\mathbf{a}$ 。設 $\mathbf{b}$ 為另一位置向量，於是 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 由平行四邊形法定義，且同時可知 (圖 1)，此求和為可換的。

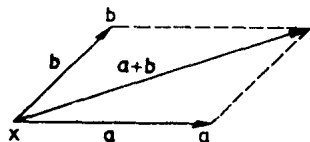


圖 1.

若重複加向量 $\mathbf{a}$ λ 次，就得到此向量的 λ 倍，且 $\lambda \mathbf{a}$ 。對 $\lambda > 0$ ， $\lambda \mathbf{a}$ 與 $\mathbf{a}$ 同向，對 $\lambda < 0$ ，則與 $\mathbf{a}$ 反向，對 λ

$= 0$ 則向量 $0\mathbf{a}$ 即表示在起點上退化至一點的位置向量。

同樣的，所有有序三元實數組所構成的向量空間 R^3 ，可用三度空間表示

1.3 子空間，線性組合，線性無關

定義 1： 向量空間 V 之一非空部分集 U ， $U \subseteq V$ ，若滿足下列條件，則稱為 V 之一子空間。

- (1) 若 $\mathbf{a} \in U$ 且 $\mathbf{b} \in U$ 則 $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$ ，
- (2) 若 $\lambda \in R$ 且 $\mathbf{a} \in U$ 則 $\lambda \mathbf{a} \in U$ 。

向量空間的子空間本身必為一向量空間，因此必須也包含零向量。

在圖 2 設三維空間 R^3 之向量 $\mathbf{a}_1$ ， $\mathbf{a}_2$ 及 $\mathbf{a}_3$ 所展開，於是 $\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_2$ 所

展開的平面為三維空間的一個二維子空間。

注意：向量空間 V 之任意多個子空間的交集可證明也是 V 的子空間。

定義 2：設向量空間 V 有有限多個向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。可表成 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ 之向量稱為向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的線性組合，其中 $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ 為實數。

在向量的線性組合中，若 $\lambda_i > 0$ 則稱為正線性組合。此包含了凸線性組合，即尚滿足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 者。

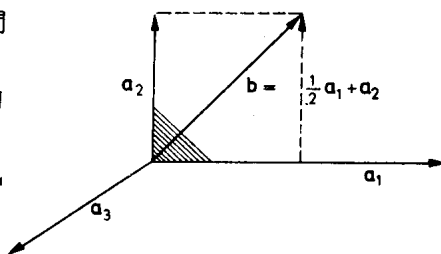


圖 2.

現考慮向量空間之一部分集合 T 。以 S 表示所有子空間 $U \subseteq V$ ，滿足 $T \subseteq U$ 者之集合。因 $V \in S$ ，故 S 非空。由注意知， S 之子空間 U 的交集 D 亦為子空間且包含 T ； D 即為由 T 所展開之子空間。 V 之部分集 T 為一子空間與 $T = D$ 互為充要。

定義 3：若向量為非空部分集 $T \subset V$ 之有限多個向量的線性組合，則稱其為 T 之線性組合。

於是有

定理 1：子空間 $D \subset V$ 恰由 T 之所有線性組合所構成。

證： T 之所有線性組合集以 T^* 表之。兩線性組合相加及線性組合與數 λ 相乘仍然得到線性組合，於是 T^* 為 V 之一子空間。每一向量 $a \in T$ 為 T 之一線性組合，此乃因 $a = 1a$ ，於是 $T \subseteq T^*$ ，故 $D \subseteq T^*$ 。反之 D 必須包含 T 之每一線性組合，故 $T^* \subseteq D$ ，於是得 $D = T^*$ 。□

向量空間 V 之有限多個向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 展開成 V 之一子空間 $V^* = D$ ，且由定理 1 知， V^* 之每一向量可表成 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 之線性組合。

定義 4：若關係

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$$

只在 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ 下成立，則稱向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 線性無關，反之若有一非零 λ_i 且上關係成立則謂之線性相關。

以 0 為起點， R^3 三向量 a_1, a_2, a_3 若均在同一平面上（圖 3），則其為線性相關，因二向量，如 a_1 及 a_2 ，即可展開一平面。於是向量 a_3 可表成

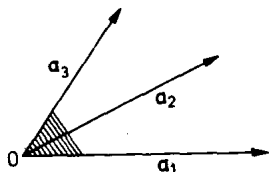


圖 3.

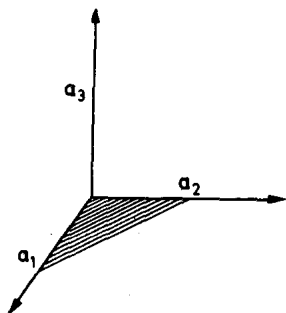


圖 4.

a_1 及 a_2 的線性組合。

R^3 三向量 a_1, a_2, a_3 若不在同一平面上 (圖 4), 則為線性無關, 且展開 R^3 。

定理 2: 零向量決不會出現在線性無關向量中。

證: 設給予向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 其中 $a_n = 0$ 。

線性組合

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

對 $\lambda_n \neq 0$ 成立, 即其不只有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ 之顯然解, 是故有零向量者必為線性相關。□

定理 3: 從 n 個線性無關向量中移去一個或更多的向量, 則所剩的向量仍為線性無關。

證: 例如若從 n 個線性無關向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中移去 a_1 , 則對應方程式

$$\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_3 + \dots + \lambda_n a_n = 0,$$

若對 $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ 有非顯然解, 則原方程式

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

亦有非顯然解, 此與 $a_1, \dots, a_n$ 為線性無關之假設相矛盾。□

定理 4: 若向量 $a_1, \dots, a_n$ 線性相關, 則其中至少有一向量為其他向量的線性組合。

證: 設

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad \text{且} \quad \lambda_1 \neq 0。$$

以 λ_1 除上等式求 $\mathbf{a}_1$ ，則得

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1} \mathbf{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \mathbf{a}_n；$$

是故 $\mathbf{a}_1$ 為其餘向量之一線性組合。 $\square$

定理 5：若向量 $\mathbf{b}$ 為向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 之一線性組合，則向量

$$\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$$

為線性相關。

證：若 $\mathbf{b}$ 為 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 之一線性組合，則

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n。$$

由是得

$$1 \cdot \mathbf{b} - \lambda_1 \mathbf{a}_1 - \lambda_2 \mathbf{a}_2 - \cdots - \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}。$$

因第一項係數非 0，向量 $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 為線性相關。 $\square$

線性無關的觀念可推廣至非有限向量集上。

定義 5：若一向量集 $T \subseteq V$ 之每個有限部分集皆為線性無關，則稱此向量集為線性無關，否則稱 T 為線性相關。

定理 6：設 T 為至少有兩向量之一集合。至少有一向量 $\mathbf{b} \in T$ 可表成互不相同向量 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in T$ 之線性組合，其中 $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{b}, i = 1, \dots, n$ ，這是 T 為線性相關的一充要條件。

由定理 4 及 5 即得證明。

1.4 向量系秩

一向量系是指一線性空間內，向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 所組成的有限集。

定義 1：向量系 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 中線性無關向量之最大個數稱為此系之秩 (Rang)。一向量系之秩為 r ，即表示，此系中個數超過 r 之向量組必為線性相關。

圖 5a 上，向量 $\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_2$ 之秩為 1。圖 5b 上，向量 $\mathbf{b}_1$ 及 $\mathbf{b}_2$ 之秩為 2。在圖 5c 中， $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$ 在 R^3 內構成一向量系，且假設 $\mathbf{c}_4$ 在由

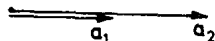


圖 5 a

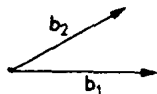


圖 5 b

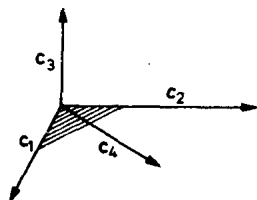


圖 5 c

向量 c_1 及 c_2 所展開之平面上，此時秩為 3。

下面敘述有關向量系秩之重要定理。

定理 1：若向量系 $a_1, \dots, a_n$ 之秩為 $r < n$ ，則其中每個向量皆可唯一表成其中 r 個線性無關向量之線性組合。

證：向量系 $a_1, \dots, a_n$ 之秩設為 r 。我們不妨假設，前面 r 個向量為線性無關。於是前面 $r+1$ 個向量

$$a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}$$

為線性相關。因此對 $\lambda_i, i = 1, \dots, r+1$ 有非顯然解，使得

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r + \lambda_{r+1} a_{r+1} = 0。$$

因我們可假設 $\lambda_{r+1} \neq 0$ ，故

$$a_{r+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{r+1}} a_2 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}} a_r。$$

第一部分由是得證。要證明唯一性，假設 a_{r+1} 有兩種表法，即

$$a_{r+1} = h_1 a_1 + h_2 a_2 + \dots + h_r a_r$$

及

$$a_{r+1} = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_r a_r。$$

兩式相減，得

$$0 = (h_1 - k_1) a_1 + (h_2 - k_2) a_2 + \dots + (h_r - k_r) a_r。$$

但向量 $a_1, \dots, a_r$ 為線性無關，上等式只有在係數為零時才成立，因之 $h_1 = k_1, h_2 = k_2, \dots, h_r = k_r$ 。□

由圖 5c 知道，在一向量系中，若把可由其他向量之線性組合表示的向量移去，其秩不變。若把向量 c_i 從此向量系中移去，其秩仍保持為 3。反之，若移去 c_1 ，則其秩減為 2。

若向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 可由向量系 $b_1, b_2, \dots, b_m$ 之線性組合表示，其中 $m < n$ ，則向量系 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 之秩至多為 m 。

1.5 基，維，坐標

定義 1： 向量空間 V 之一部分集 T ，若為線性無關且可展成整個空間 V ，則為 V 之一基。

定理 1： 設 $(a_1, \dots, a_n)$ 為 V 之一基，且 $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ 為 V 之一向量，若 $\lambda_i \neq 0$ ，則向量 $a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n$ 仍為 V 之一基。

證： 必須證明，向量 $a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n$ 為線性無關。即^{※1}線性組合

$$\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_{i-1} a_{i-1} + \xi_i b + \xi_{i+1} a_{i+1} + \dots + \xi_n a_n = 0$$

有 $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ 之關係。以 $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ 代 b ，則有

$$\xi_1 a_1 + \dots + \xi_{i-1} a_{i-1} + \xi_i \lambda_1 a_1 + \dots + \xi_i \lambda_n a_n + \xi_{i+1} a_{i+1} + \dots + \xi_n a_n = 0$$

或

$$(\xi_1 + \xi_i \lambda_1) a_1 + \dots + (\xi_{i-1} + \xi_i \lambda_{i-1}) a_{i-1} + \xi_i \lambda_i a_i + (\xi_{i+1} + \xi_i \lambda_{i+1}) a_{i+1} + \dots + (\xi_n + \xi_i \lambda_n) a_n = 0$$

及

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\xi_j + \xi_i \lambda_j) a_j + \xi_i \lambda_i a_i = 0。$$

因向量 $a_1, \dots, a_n$ 由假設為線性無關，得

$$(1) \quad \xi_j + \xi_i \lambda_j = 0 \quad j \neq i$$

且同時有

$$(2) \quad \xi_i \lambda_i = 0.$$

但因 $\lambda_i \neq 0$, 由(2)即得 $\xi_i = 0$, 且由(1)又得 $\xi_j = 0, j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. 由是向量

$$a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n$$

之線性無關性得以證明。□

定理 1 可推廣成所謂的 Steinz 互換定理：

定理 2：設 $b_1, \dots, b_k$ 為 V 之線性無關向量，且 $(a_1, \dots, a_n)$ 為 V 之基， $(k \leq n)$ ，則基 $(a_1, \dots, a_n)$ 內有 k 個向量可與向量 $b_1, \dots, b_k$ 互換。

證：向量 b_1 可表成基向量之線性組合：

$$b_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i.$$

因至少有一 $\lambda_i \neq 0$ ，不妨假設 $\lambda_1 \neq 0$ ，由定理 1，向量 $b_1, b_2, \dots, a_n$ 構成 V 之一基。現向量 b_2 可由新的基 $b_1, a_2, \dots, a_n$ 表示：

$$b_2 = \eta_1 b_1 + \sum_{i=2}^n \eta_i a_i.$$

同樣不妨再假設 $\eta_2 \neq 0$ ，因此向量 $b_1, b_2, a_3, \dots, a_n$ 由定理 1 構成 V 之一基。

此過程，應用 k 次，即得包含所有 $b_i, i = 1, \dots, k$ ，之基。
向量

$$b_1, b_2, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n$$

因之成為 V 之一基。□

由定理 2 得

系：設 $(a_1, \dots, a_n)$ 及 $(b_1, \dots, b_k)$ 為向量空間 V 之兩基。於是 $k \leq n$ ，且同樣的 $n \leq k$ ；因此 $k = n$ 。

一向量空間若有一有限基，則所有基之向量個數相同，因之其秩也相同。一向量空間有一無限基，則其他所有基亦無限。

定義 2：設向量空間 V 有一有限基。其所有基之向量個數相同。此個數

稱為 V 的維，以 $\dim V$ 表示。

定義 3：設向量空間 V 無有限基。於是稱其為無限維空間； $\dim V = \infty$ 。零空間之維為零。

設 V 為有限維向量空間，且 $\dim V = n$ ， $0 < n < \infty$ ， $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ 為 V 之一基，又 $\mathbf{a} \in V$ 。於是 $\mathbf{a}$ 可表成基向量之線性組合：

$$(3) \quad \mathbf{a} = \xi_1 \mathbf{x}_1 + \xi_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \xi_n \mathbf{x}_n。$$

定義 4：在(3)式中出現的係數 $\xi_1, \dots, \xi_n$ ，稱為向量 $\mathbf{a}$ 關於基 $\mathbf{x}$ 之坐標，此由 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{x}$ 唯一決定。

若 $\mathbf{b}$ 亦表為同一基向量 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 之線性組合，如：

$$\mathbf{b} = \eta_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \eta_n \mathbf{x}_n。$$

則 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之和向量及差向量分別為

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (\xi_1 + \eta_1) \mathbf{x}_1 + \dots + (\xi_n + \eta_n) \mathbf{x}_n \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &= (\xi_1 - \eta_1) \mathbf{x}_1 + \dots + (\xi_n - \eta_n) \mathbf{x}_n。 \end{aligned}$$

向量 $\mathbf{a}$ 與實數 λ 之乘積為

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda \xi_1) \mathbf{x}_1 + \dots + (\lambda \xi_n) \mathbf{x}_n。$$

於是在兩向量之加法（減法）中，我們必須把對應的係數相加（相減）；在一向量與實數 λ 之乘法中，以 λ 乘每一坐標。

若把向量 $\mathbf{a}$ 關於基 $\mathbf{x}$ 之坐標 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ，及 $\mathbf{b}$ 關於基 $\mathbf{x}$ 之坐標 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 組合成 n 元組：

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

及

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)，$$

則可計算向量 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ ，此時只要計算其對應之 n 元組。 n 元組的計算於是被引入。

1.6 n 維實數空間

定義 1：所有有序 n 元實數組集 R^n ，

$$R^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in R, i = 1, \dots, n\},$$

稱為 R 之 n 次笛卡兒乘積。

以

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

為加法，及以

$$\lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$$

為數積， R^n 構成一 n 維線性空間，稱為“ n 維實數空間”。 $(0, \dots, 0)$ 為零向量， $(a_1, \dots, a_n)$ 之逆元素為 $(-a_1, \dots, -a_n)$ 。 R^n 之向量亦稱為“實 n 向量”。特例 R^2 及 R^3 已於 1, 2 節介紹了。

為方便起見，把實 n 向量 $\mathbf{a} \in R^n$ 寫成列向量，

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{a}'$ 或 $\mathbf{a}^T$ 表示行向量，

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}^T = (a_1, \dots, a_n).$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ 稱為 n 向量 $\mathbf{a}$ 之分量。

$$\text{定義 2 : 一向量 } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

若 $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, 稱為正： $\mathbf{a} > \mathbf{0}$,

若至少有一 $-a_i > 0$, 且其餘 $a_i = 0$, 稱為半正： $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$,

若 $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 稱為非負： $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ 。

對兩個 n 向量有下列關係：

若 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ，則 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ；

若 $\mathbf{a} - \mathbf{b} > \mathbf{0}$ ，則 $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ ；

若 $\mathbf{a} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ，則 $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ ；

若 $\mathbf{a} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$ ，則 $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ 。

定義 3：兩向量

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

之內積乃指

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

因此內積是一個實數。為方便起見，內積以行向量 $\mathbf{a}$ 及列向量 $\mathbf{b}$ 之乘積如下表示：

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

例：

$$\mathbf{a}' = (2, 1, 0, 3), \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 15.$$

由內積定義即得下列關係：

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = \mathbf{b}'\mathbf{a} \quad \text{交換律}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a}'\mathbf{b} + \mathbf{a}'\mathbf{c} \\ (\mathbf{a}' + \mathbf{b}')\mathbf{c} &= \mathbf{a}'\mathbf{c} + \mathbf{b}'\mathbf{c} \end{aligned} \quad \text{分配律}$$

利用內積，可引入一度量，可視為長短之度量。

定義 4：向量 $\mathbf{a} \in R^n$ 之絕對值，範數或長度乃指

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}。$$

範數有下列性質：

$$(1) \quad \|\mathbf{a}\| \geq 0。$$

$$\|\mathbf{a}\| = 0 \text{ 之充要條件爲 } \mathbf{a} = \mathbf{0}。$$

$$(2) \quad \|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|，$$

$$(3) \quad \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|。$$

前兩個性質，直接由內積定義得之。性質(3)，即所謂三角不等式，要利用到下助定理：

助定理：對任意向量 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b} \in R^n$ 有：

$$(4) \quad |\mathbf{a}'\mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|。$$

等式成立的充要條件是 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ 對某一實數 λ 成立。

證：若 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ，則 $|\mathbf{a}'\mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| = 0$ 。若 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ，則對每一實數 λ ，有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\lambda\mathbf{a}'\mathbf{b} + \lambda^2\|\mathbf{b}\|^2 \\ (5) \quad &= \left(\frac{\mathbf{a}'\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} + \lambda\|\mathbf{b}\| \right)^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - \frac{(\mathbf{a}'\mathbf{b})^2}{\|\mathbf{b}\|^2}。 \end{aligned}$$

取一 $\lambda = \lambda_0$ ，使得

$$\frac{\mathbf{a}'\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} + \lambda_0\|\mathbf{b}\| = 0，$$

於是

$$(\mathbf{a}'\mathbf{b})^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2$$

及