



# 中国工程热物理学会

## 第十届年会论文集

### 热机气动热力学

二〇〇一

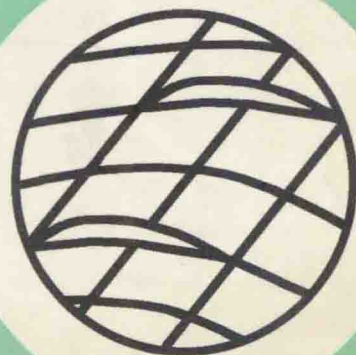
青岛

中国工程热物理学会 主办

青岛海尔集团

山东工业大学能源与动力工程学院

提供资助



# 热机气动热力学学术会议论文目录

## 一. 湍流模型及计算方法的研究

- 012001 径向湍流旋转射流的计算研究.....吕盛明(1)
- 012004 不可压湍流的控制方程.....高歌 熊 焰(7)
- 012022 求解泊松方程的六阶离散多重网格方法.....葛永斌 吴文权 卢 曦(25)
- 012026 机翼大攻角下失速颤振的气动弹性研究.....金 琰 袁 新(31)
- 012046 圆柱近尾迹湍流涡结构的直接数值模拟.....姚 军 樊建人 岑可法(36)
- 012053 13--Bit 格子气自动机模型对流场的模拟.....  
.....石万元 曾丹苓 郑 忠 高小强(44)
- 012058 圆柱绕流大涡模拟的研究.....李 勇 柳朝晖 李光正 郑楚光(48)
- 012059 格子 Boltzmann 亚网格模型及其流动模拟.....晏一光 郑楚光 郭照立(53)
- 012060 混合层流动的格子涡方法数值模拟.....  
.....王赫阳 张会强 王希麟 郭印诚 林文漪(59)
- 012061 转换模型在叶栅粘性流数值模拟中的应用方法研究.....  
.....郭玉波 冯国泰 王松涛 吴 猛(65)
- 012062 转换模型在静叶栅三维粘性流数值模拟中的应用研究.....  
.....郭玉波 冯国泰 祝海义 刘沂秋(71)

## 二. 数值模拟方法的研究和应用

- 012027 多级轴流压气机级全工况特性数值模拟.....张士杰 袁 新 叶大均(76)
- 012028 跨音速轴流压气机级三维粘性流场全工况数值模拟.....  
.....张士杰 袁 新 叶大均(83)
- 012032 时间推进通流气动设计方法的探索和分析.....  
.....施 鑫 赵拥军 季路成 周 盛(88)
- 012034 离心压缩机级内三维粘性流动数值分析.....高丽敏 席 光 王尚锦(95)
- 012036 并行计算用于叶轮机械流场特性分析.....林智荣 袁 新(100)
- 012041 跨音透平级动叶顶部间隙流动的数值模拟.....  
.....张宏武 徐燕骥 黄伟光 陈乃兴(105)
- 012042 汽轮机低压排汽系统气动性能分析.....刘建军 蒋洪德(111)
- 012049 涡轮中的激波/叶排相互作用.....季路成 黄海波 陈 江 徐建中(118)
- 012063 一类高压比新型风扇转子激波结构探索.....  
.....项 林 季路成 赵晓路 周 盛(128)
- 012064 冷气掺混对高压涡轮导叶、转子流场结构影响的数值分析.....  
.....赵晓路 李 维 罗建桥(134)

### 三. 设计及优化

- 012006 带有动力涡轮的双轴原理型燃气轮机的研制.....杨 策 马朝臣 鲍 睫 李改林 朱 庆(140)
- 012007 离心压气机叶轮设计方法研究.....杨 策 张 虹 马朝臣(148)
- 012010 弹体引信微型动力涡轮的设计研究.....丰镇平 邓清华 赵振海 李 俐 刘志强 汪晓安(155)
- 012011 全粘流场分析在离心叶轮设计中的应用研究.....席 光 王晓锋 蒋三红 贾会霞 王尚锦(160)
- 012012 基元阀在汽轮机进汽阀研究中的应用.....徐克鹏 蔡 虎 徐星仲 崔永强 蒋洪德(166)
- 012014 Bèzier 曲线在叶型设计中的应用.....罗春钦(173)
- 012015 轴流式压气机基本方程式及等压设计原理的探讨.....严治中(178)
- 012018 考虑冷却的  $1+1/2$  对转涡轮初步设计(一).....权晓波 李 维 季路成 赵晓路 徐建中(184)
- 012019 考虑冷却的  $1+1/2$  对转涡轮初步设计(二).....李 维 权晓波 季路成 赵晓路 徐建中(190)
- 012020 涡轮叶片尾缘扰流柱最佳形状的研究.....凌长明 闵春华 刘 斌(197)
- 012037 透平叶片中的二次流旋涡结构的研究...王仲奇 冯国泰 王松涛 陈乃兴(201)
- 012047 一维多级轴流压气机性能的解析优化...罗 俊 陈林根 孙丰瑞 倪 宁(211)
- 012051  $1+1/2$  对转涡轮叶排轴向间距对性能影响的初步研究.....季路成 项 林 黄海波 徐建中(216)
- 012057  $1+1/2$  对转涡轮应用中的关键技术问题.....季路成 陈 江 黄海波 徐建中(223)

### 四. 非定常流动和气动声学

- 012002 非定常大步长隐式 TVD 格式途径.....陈宏冀(231)
- 012005 叶型优化在非定常流动条件下效果的数值分析.....王正明 贾希诚(235)
- 012023 旋涡动力学方程非定常动边界条件.....吴文权(241)
- 012024 变工况非定常叶栅绕流数值仿真.....吴文权 韩云霞(246)
- 012033 回热器热声直流模型及其效应研究.....罗二仓(251)
- 012044 管束流动中振动圆管的非定常气动力特性.....张俊杰 刘 红 张恒斌 陈佐一(256)
- 012045 单级跨音压气机整圈三维动静叶干涉的数值模拟.....蒋康涛 徐 纲 张宏武 黄伟光 陈静宜(261)
- 012068 非定常脉动源对风扇/压气机稳定性的影响.....于巍巍 孙晓峰(267)

## 五. 实验研究

- 012008 采用可调切向进气扩大压气机流量范围的研究.....  
.....马朝臣 祝 勇 李向荣 张学文(273)
- 012013 一种 BGK 型二阶非结构化自适应算法在求解 Euler 方程中的应用.....  
.....徐克鹏 蔡 虎 徐星仲 蒋洪德(279)
- 012016 激波管风洞中叶栅测压实验与计算研究.....  
.....黄海波 季路成 肖 翔 李 维 徐建中(287)
- 012017 激波管风洞中叶表测热实验与计算.....  
.....黄海波 季路成 闫 朝 权晓波 徐建中(293)
- 012025 汽轮机调节阀内流动特性的试验研究...毛靖儒 屠 珊 刘全恩 孙 弼(298)
- 012030 压气机叶片前缘楔形角与前缘流动.....陆宏志 吴洋洲 陆利蓬 徐力平(303)
- 012035 进口导叶预旋规律与失速先兆类型的关联.....聂超群(311)
- 012043 用小波和分维数方法处理喘振实验数据.....  
.....李美林 张春梅 王尚锦 席 光(319)
- 012050 离心风机喘振自适应调节的实验研究.....蒋 骏 聂超群(324)
- 012054 叶片正弯曲对透平静叶栅叶片表面气动特性影响的实验研究.....  
.....陈海生 康 顺 谭春青(333)
- 012055 轴流压气机转子叶尖泄漏涡和尾迹在静子尖区的传播.....  
.....马宏伟 张庆国 蒋浩康(341)
- 012056 从转子出口尖区流场的改善看一种处理机匣的扩稳机理.....  
.....张 辉 蒋浩康 刘火星 吴岳庚(348)
- 012065 用 PIV 技术测量跨音压气机转子内流的激波结构.....  
.....王同庆 刘 胤 吴怀宇(352)
- 012066 静叶相对位置对压气机性能的影响.....黄洪雁 王仲奇 芦文才 苏杰先(358)
- 012067 Measurements of a 2-Stage Axial Turbine with Shrouded Rotor Cavities.....  
.....Dieter E. Bohn Hongwei Ma Franz Kreitmeier Michael Sell(363)

## 六. 其它

- 012009 平面叶栅中的湿蒸汽两相凝结流动数值模拟.....李 亮 丰镇平 李国君(369)
- 012021 汽轮机多级焓降优化分配的计算方法.....戴 韧(374)
- 012031 内燃机进气道和缸内三维流场数值模拟.....王海刚 陈 石 刘 石(380)
- 012039 Wilso 点附近区域蒸汽流动解析特性.....张冬阳(385)
- 012040 开关函数法求解非平衡态蒸汽凝结流动.....  
.....张冬阳 Andreas Sturmayer 刘建军 蒋洪德(391)
- 012048 空调用轴流风扇系统的内流特性分析与应用.....  
.....王 军 金培耕 伍光辉 吴克启(397)
- 012052 涡旋射流控制扩压器中边界层分离的研究.....谢永慧 西道弘(403)
- 012069 Salt Solution and Radius Dependence on Surface Tension in Heterogeneous  
Nucleation in Steam Turbines.....Dieter E. Bohn Jing Ren(409)

# 径向湍流旋转射流的计算研究

吕盘明

( 中国科技大学热科学和能源工程系, 230026, pmlu@ustc.edu.cn )

## 一、引言

径向湍流旋转射流在工程上有很多应用, 比如喷雾, 干燥, 加热, 炉膛上煤, 上料, 液体与固体颗粒的溶化等等, 都可因为射流旋转的帮助而进行得更加有效。实验研究有文献[1], 计算研究有文献[2], 用的湍流模型是  $k-\varepsilon$  EVM, 但计算所得的射流扩张速率与实验相比小了很多, 计算是 0.1, 而实验是 0.139。文献[2]怀疑这是由于标准的  $\varepsilon$ -方程并不完全适合于有旋转的流动。作者用能加入湍流结构的边界条件的湍流模型  $k-\varepsilon$  LAEVM 已经计算过各种平面的和轴对称的自由射流, 发现加入合理的上游边界后, 计算出的射流扩张速率和实验符合得都很好[3, 4]。至于通道内的旋转流动也用  $k-\varepsilon$  LADSM 和  $k-\varepsilon$  LAEVM 计算过[5]。因此作者相信  $k-\varepsilon$  LAEVM 对改进径向湍流旋转射流的预测也应当有效。

## 二、数值求解

为求解径向湍流旋转射流, 我们用时间平均的 N-S 方程组(用笛卡儿张量表示):

$$(\rho U_j)|_j = 0 \quad (1)$$

$$(\rho U_i U_j)|_j = -p|_i + [\mu(U_i|_j + U_j|_i) - \rho \overline{u_i u_j}]|_j \quad (2)$$

并用能加入湍流结构的边界条件的二方程湍流模型表示式中的 Reynolds 应力  $\overline{u_i u_j}$ 。

即让

$$-\rho \overline{u_i u_j} = -y_{ij} \rho K + \mu_t [U_i|_j + U_j|_i] \quad (3)$$

其中

$$\mu_t = C_\mu \rho K^2 / \varepsilon \quad (4)$$

$$\rho \frac{DK}{Dt} = \nabla \cdot \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_K} \nabla K \right] + \rho P - \rho \varepsilon \quad (5)$$

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \cdot \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right] + \rho \frac{\varepsilon}{K} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (6)$$

---

\* 本文由国家自然科学基金项目资助。No. 59776007。

$$P = \nu_t \{ 2 [ (\frac{\partial U}{\partial x})^2 + (\frac{\partial V}{\partial y})^2 + (\frac{V}{r})^2 ] + (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial x})^2 + [ r \frac{\partial}{\partial y} (\frac{W}{r}) ]^2 \} \quad (7)$$

方程(3)中这个  $y_{ij}$  是称作湍流局部结构张量  $Y$  的协变分量, 它由湍流结构的上游边界条件及固壁边界条件等决定, 计算  $y_{ij}$  的具体方法详见参考文献[5, 6], 它的基本做法都是给定上游射流中心的  $y_{ijF}$  和射流边沿的  $y_{ijW}$ , 然后由(线性)内插值决定其它地方的  $y_{ij}$ 。并假定  $y_{ij}$  沿平均流线不再改变。其它通用的模型常数见表一。

表一: 湍流模型常数

| $\kappa$ | $C_\mu$ | $C_{\varepsilon 1}$ | $C_{\varepsilon 2}$ | $\sigma_k$ | $\sigma_\varepsilon$ |
|----------|---------|---------------------|---------------------|------------|----------------------|
| 0.42     | 0.09    | 1.44                | 1.92                | 1.0        | 1.3                  |

以上方程(1)(2)(5)(6)可以表示成以下统一的形式, 然后联立求解。

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (\rho r^j U \varphi) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\rho r^j V \varphi) = \frac{\partial}{\partial x^1} [r^j \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}] + \frac{\partial}{\partial x^2} [r^j \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}] + r^j S_\varphi \quad (8)$$

其中  $r$  的上标  $j$  取值 1 (因是圆柱坐标系), 交换系数  $\Gamma_\varphi$  和源项  $S_\varphi$  的表达式见表二。

计算区间: 可有两种取法: 1. 可取如图-1 由 ABCDGH 为顶点的相连成一片的两个四边形区域分两次分别计算。2. 也可取如图-1 由 BCGH 为顶点的一个四边形区域一次计算。这后一种方法本文作者试过, 但是还未成熟, 至今未算出结果来, 一来是因为本文用的计算程序中变量的存储位置是交错的, 改动工作量太大, 更主要是我怀疑完整的湍流径向旋转射流还能不能当成是定常流来计算? 类似的问题在我计算平板的湍流尾流时也碰到过。因此决定留到以后有条件时再作研究。前一种方法比较成熟, 文献[7]的轴对称旋转射流以及很多其它的类似问题就是这么算的。但是本算例有点不同, 上游喷口处的周向速度  $W$ , 湍动能  $K$  及其耗散率  $\varepsilon$  表面上看去都不是对称的, 见文献[2]的 Fig5, 但那是因为无量纲化后的结果。不管怎样, 我们还是要左右两半分别计算, 而不是算半个就完了。这里只叙述前一种取法, 本文发表的计算结果也都是用前一种方法得到的。现以右边一个(以 ABCD 为顶点的)为例细说一下。AD 是径向旋转射流的中心线, 是  $x^2$  方向(或  $y$  方向), AE 是喷嘴半宽度, 是  $x^1$  方向(或  $x$  方向)。U, V 和 W 分别是  $x^1$  方向,  $x^2$  方向和  $x^3$  方向(旋转的周向, 即垂直纸面的方向)的射流分速度。喷嘴出口处射流速度  $V/V_M = f_v(x^1)$ ,  $rW/(rW)_M = f_w(x^1)$ ,  $K/V_M^2 = f_k(x^1)$  和  $\varepsilon \delta/V_M^2 = f_\varepsilon(x^1)$ 。 $\delta$  是射流半宽度。下标 M 表示喷口几何中心处的速度。函数  $f_v(x^1)$ ,  $f_w(x^1)$ ,  $f_k(x^1)$  都从文献[2]的图 5 实测给出。流动假定是不可压缩的。EF 表示射流外边缘的轮廓线。

计算的边界条件:

1. 上游喷口 AE:  $V/V_M = f_v(x^1)$ ,  $rW/(rW)_M = f_w(x^1)$ ,  $K/V_M^2 = f_k(x^1)$ , 以及  $\varepsilon \delta/V_M^2 = f_\varepsilon(x^1)$  都预先给定,  $U = 0$ 。分布函数  $f_v(x^1)$ ,  $f_w(x^1)$ ,  $f_k(x^1)$ ,  $f_\varepsilon(x^1)$  都是从文献[2]的图 5 实测给出。

表二： 湍流控制方程的交换系数和源项

| $\varphi$     | $\Gamma_{\varphi}$             | $S_{\varphi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1             | 0                              | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| U             | $\mu_{eff}$                    | $-\frac{\partial p}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^1}(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial x^1} - \rho K y_{11})$ $+ \frac{1}{r^j} \frac{\partial}{\partial x^2}(r^j \mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial x^1} - r^j \rho K y_{12})$                                                                            |
| V             | $\mu_{eff}$                    | $-\frac{\partial p}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^1}(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial x^2} - \rho K y_{12}) + \frac{\rho W^2}{r}$ $+ \frac{1}{r^j} \frac{\partial}{\partial x^2}(r^j \mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial x^2} - r^j \rho K y_{22}) - \frac{2j\mu_{eff}V}{r^2} + \frac{j\rho K y_{33}}{r}$ |
| r W           | $\mu_{eff}$                    | $-\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu_{eff} r W) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^1}(\rho K y_{13}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^2}(\rho K y_{23}) - 2\rho K y_{23}$                                                                                                                            |
| K             | $\mu_t / \sigma_k$             | $\rho (P - \varepsilon)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| $\varepsilon$ | $\mu_t / \sigma_{\varepsilon}$ | $\frac{\rho \varepsilon}{K} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon)$                                                                                                                                                                                                                                          |

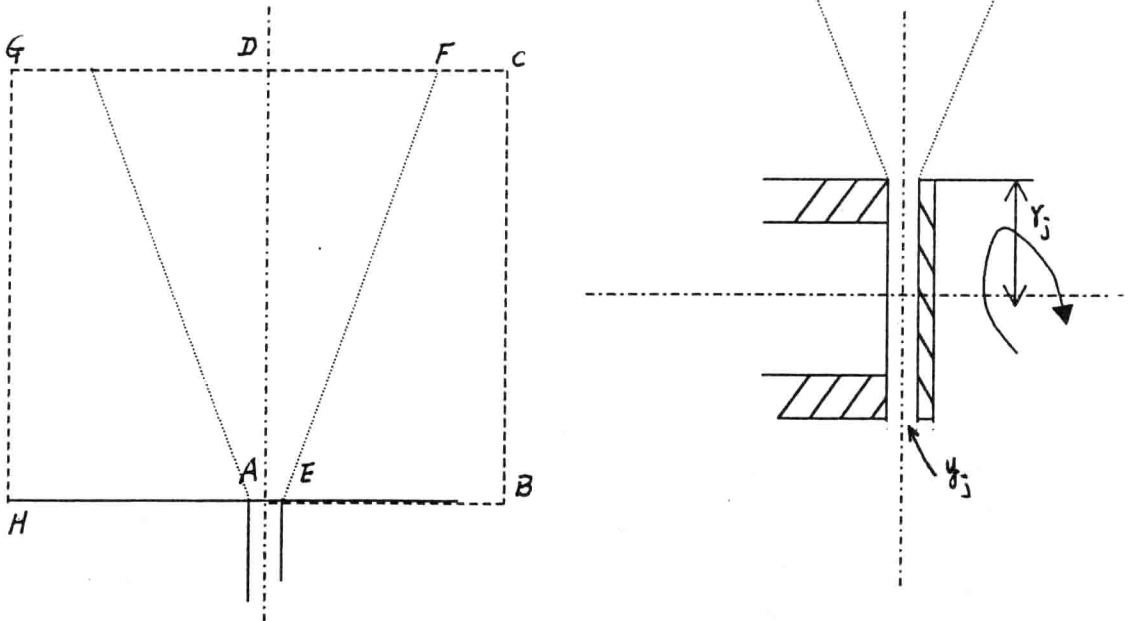


图 1. 径向旋转射流示意图 ( $r_j=0.15$ ,  $y_j=0.00125$ ,  $r_j/y_j=120$ )

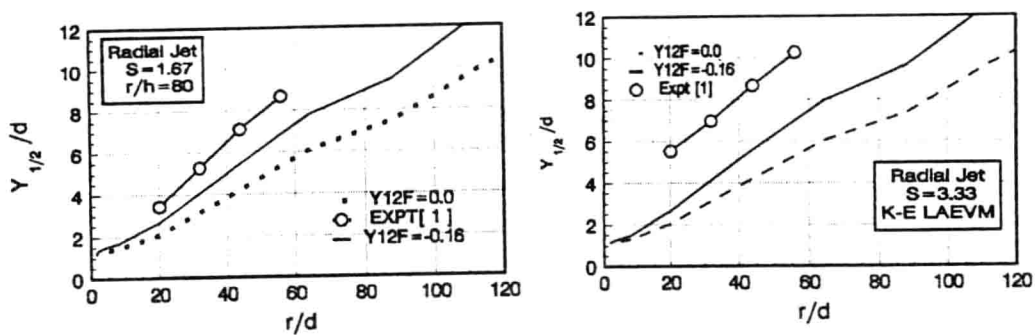


图 2. 径向旋转射流扩张速率的计算与实验的比较 (a)  $S=1.67$  (b)  $S=3.33$

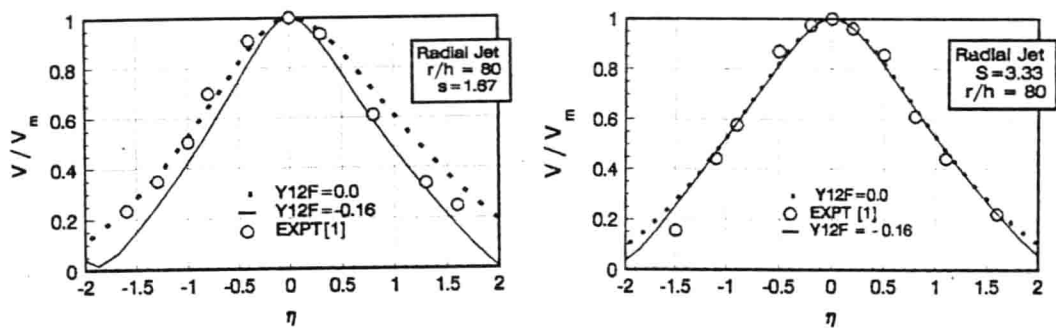


图 3. 旋转射流合速度的相对值的计算与实验的比较 (a)  $S=1.67$  (b)  $S=3.33$

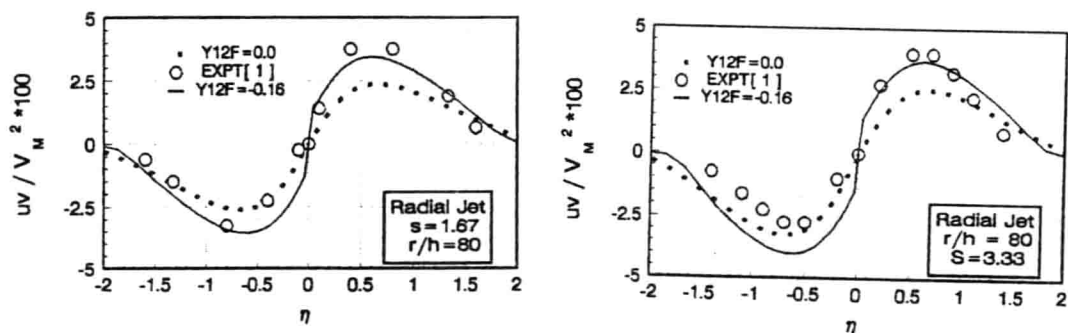


图 4. 雷诺剪应力  $uv$  的计算与实验的比较 (a)  $S=1.67$  (b)  $S=3.33$

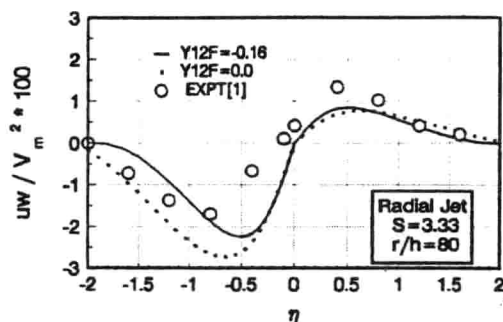


图 5. 雷诺剪应力  $\overline{uw}$  的计算与实验的比较  $S=3.33$

2. 下游 CD :  $U_y = P_y = K_{yy} = \varepsilon_{yy} = 0$  ;  $V$  用连续方程求出。
3. 外卷吸边界 BC :  $V_x = P = K_x = \varepsilon_{xx} = (rW)_x = 0$  ;  $U$  用连续方程求出。
4. 中心线 AD :  $U = V_x = K_{xx} = \varepsilon_{xx} = 0$
5. 上游边界 EB : 本文采用固壁条件  
 $V = 0$  ,  $U = 0$  ,  $rW = 0$  ,  $P_y = K_{yy} = \varepsilon_{yy} = 0$  。

以上带下标  $x, y$  分别表示是对  $x^1, x^2$  的导数, 另外  $y_{ijF}, y_{ijW}$  的边条留在后边与计算结果一起讨论。

本文计算了旋绕数  $S$  (Swirling Parameter) 分别为 1.67 和 3.33 两个不同的工况。旋绕数  $S$  的定义是:  $s = \int_0^\infty r^2 UW dr / R \int_0^\infty (U^2 - W^2 / 2) r dr$

### 三、 计算结果

计算采用本文作者改编过的通用程序 TEAM, 湍流模型是  $k-\varepsilon$  LAEVM。计算网格是  $40 \times 40$  的不等距交错网格。图 2 是径向射流扩张速率的计算结果和实验的比较。计算时采用了两种不同的上游来流湍流结构的边界条件,  $Y_{12F}=0$  和  $Y_{12F}=-0.16$ , 而  $Y_{11F}, Y_{22F}, Y_{33F}$  都取 0.6666, 前者实际上就是标准的  $k-\varepsilon$  EVM (图中标记  $Y_{12F}=0.0$ ), 后者才是  $k-\varepsilon$  LAEVM 模型, 取值 -0.16, 和文献[5]的通道内部旋转流动计算是一致的, 取不同的符号是因为坐标系的走向不同。对  $k-\varepsilon$  LAEVM, 取  $Y_{12F}=Y_{12W}=-0.16$ , 没有考虑沿射流横向的不同; 从图可看出两点: (1)  $k-\varepsilon$  LAEVM 的计算结果的斜率, (此即射流的扩张速率, 大约 0.139) 与实验值几乎平行, 但是  $k-\varepsilon$  EVM 计算的扩张速率, 大概 0.10, 这和文献[2]的计算是一样的。明显偏小 (图中虚线的斜率)。(2) 无论计算结果还是实验, 射流原点与射流喷嘴与对称中心线的交点都不重合。两个不同的工况的实验结果也互不相同。

图 3 是射流径向速度的计算与实验的比较。所有的横坐标  $\eta = x/r$ ; 虽然主体部分大体上都符合, 但  $S=3.33$  比  $S=1.67$  时符合得明显更好些。

图 4 是雷诺剪应力  $\overline{uv}$  的预测与实验的比较, 图 5 是雷诺剪应力  $\overline{uw}$  的预测 (实验只有  $S=3.33$  的数据) 与实验的比较。它们的具体计算公式是

$$-\overline{\rho uv} = -\gamma_{12} \rho K + \mu_t [U_1|_2 + U_2|_1] = -\gamma_{12} \rho K + \mu_t \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] \quad (8)$$

$$-\overline{\rho uw} = -\gamma_{13} \rho K + \mu_t [U_1|_3 + U_3|_1] = -\gamma_{13} \rho K + \mu_t \left[ \frac{\partial W}{\partial x} \right] \quad (9)$$

考察这些雷诺剪应力的计算和实验的比较,我们发现这儿有一个共同的特点,不管是 $\overline{uv}$ 还是 $\overline{uw}$ ,也不管是 $S = 1.67$ 还是 $S = 3.33$ ,在右边半个, LAEVM 表现得比 EVM 明显好得多,但是在左边,两者相比之下差不多, LAEVM 没有明显的改进,其原因是与本程序的交错网格有关?或者与计算公式(9)中用了速度 $U$ 的轴对称条件有关?还是与本程序的定常流的假定有关?这些有待于今后进一步研究。

#### 四、结束语

本文对径向湍流旋转射流作了计算研究,考察了边界条件的不同取法对计算结果的影响,并与过去国外学者发表的实验结果作了比较讨论,再次证明边界条件的适当改变,对射流的渐近扩张速率有明显的影响,也有助于流场其它参数(如雷诺应力,脉动速度)预测的改善。这将有助于进一步评估作者先前提出的湍流模型 $k-\varepsilon$  LAEVM。同时我们也看到,由于实验数据的误差,由于边界条件是大概估计的,由于模型 $k-\varepsilon$  LAEVM 还(不可避免地)比较简单,湍流应力的预测总的来讲还不理想。另外径向湍流旋转射流是否能合理地假定为对称的和定常的是一值得进一步深入研究的问题。

#### 参考文献

- [1] Muhe, H., The swirling radial jet, Structure of complex turbulent shear flow, in *IUTAM Symposium*, Marseille Springer-Verlag, Berlin(1982).
- [2] Naji, H., The prediction of turbulent swirling jet flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 29, NO. 2, pp. 169-182, 1986.
- [3] 吕盘明: 喷管出口处初始湍流结构对自由射流渐近扩张速率的影响, *工程热物理学报*, (1996), VOL. 17, NO. 2, p184-187.
- [4] 吕盘明: 边界条件对径向湍流射流的影响的计算研究, *工程热物理学报* (将发表), (2002), VOL. 23, NO. 1.
- [5] 吕盘明: 湍流应力输运方程中 $\Pi_{ij}$ 和 $\varepsilon_{ij}$ 的模型在旋转流动中的应用研究, *工程热物理学报*, (1999) VOL. 20, NO. 4, p421-425.
- [6] 吕盘明: 能加入湍流结构的方向性特征的边界条件的 $k-\varepsilon$  涡粘性模型, *工程热物理学报*, (1993), VOL. 14, NO. 4, P390-393.
- [7] Leschziner, M. A., Rodi, W., Computation of Strongly Swirling Axisymmetric Free Jets, *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 12, 1984, p. 1742-1747.

# 不可压湍流的控制方程

高歌\* 北京航空航天大学 gegao@etang.com

熊焰\* Florida Atlantic University, USA Yong@oe.fau.edu

## 摘要

使用侧偏统计平均方法理性推导了不可压湍流的封闭方程组。侧偏统计平均提供了湍流脉动量的一阶统计信息,在引入加权漂移速度对称性及正交各向异性后,导出了漂移流的连续方程、动量方程及机械能方程,最后依据湍流物理的唯象论,使用动量传输链概念模化封闭了整个方程组。方程组不含任何经验系数,不使用壁面函数,保留了 NS 方程的均化的非线性特性。其级数形式的能量方程与非线性现象多尺度层次现象相对应,具备了描述湍流统计平均流动及拟序结构流动的双重功能。用平面射流,圆射流,层流-湍流转捩及后向台阶流等算例初步验证了方程对真实湍流的适用性。

关键词: 湍流、侧偏平均、正交各向异性、理性控制方程、

\*两位作者对该研究工作做了均等贡献

## §1. 引言

作为当代未解的重大科学与概念问题之一,湍流涉及了航空、航海、工业生产过程、海洋、气象、天文及生物等广泛领域。湍流的有序与随机特性的研究在数学与理论物理上也具有重要价值。在工程上,对湍流的深入理解有助于加强对湍流的利用、控制及提高 CFD 的预测精度。

湍流同时兼有随机特性及拟序结构现象,这导致了湍流研究的二大学派:统计学派与结构学派。自 1883 年 Reynolds 提出其平均方法并引出著名的封闭问题之后,一个多世纪来特别是近 10~20 年,形形色色复杂程度各异的统计平均范畴的湍流模型回避了 NS 方程的非线性特性引起的极度困难,在引入依赖实验的经验系数及不同封闭方式后,可以近似估算高 Reynolds 数的复杂流动并具有不同程度的通用性。“但是,湍流预测的可信度及通用性问题仍未得到解决,经验系数不具备通用性,系数的数学物理基础尚未得到探索”[1]。Reynolds 平均方法导致平均方程中完全丧失湍流扰动的一阶统计信息,迫使研究者只能对高阶矩进行模化,这是统计平均模型困难的根本原因之一。结构学派 30 多年来的试验结果展示了令人眼花缭乱的湍流结构,但未能从间歇结构现象中引伸出相应的基础理论。现在湍流研究的现状是“Structures exist without any theory at place where theories do not allow the existence of structures”。

NS 方程在连续介质概念成立的最小尺度网格上无需模化即可准确模拟湍流,但在稀疏网格上则必须引入湍流应力项。这表明,能全面反映湍流的随机与拟序综合特性的湍流方程一定可以从 NS 方程框架内导出。作者在本文中采用侧偏平均方法以保留湍流脉动的一阶统计平均信息。依据一定的原则将一点处湍流脉动划分为二组,每组的

统计平均量均不为零，将各组的概率权重引入侧偏平均值之后获得了加权漂移速度的对称性，从而明确了各组侧偏平均量及其方程的对称性，为进一步引入加权漂移速度的正交各向异性奠定了基础[2]。多尺度层次结构特性是非线性现象的共性，无限多层次结构意味着单纯数学平均推导无可避免的总是引出不封闭的高阶关联项。但从物理唯象论来看，无限多层次结构现象只是流体动能因有效粘性作用从平均流传输到扰动漂移流，再经由涡团级联散裂过程(cascade~down)及分子粘性作用最终变为分子热的确定论过程的表象。既在湍流的分维、混沌特性引出的视在的不确定性——不封闭性背后，隐藏着能量传递过程的确定论实质。这正是赖以封闭湍流方程的动量传输链的唯象物理学实质。准确反映物理实质的封闭方法将无需引入经验系数，并保留 NS 方程的均化非线性特征。湍流的多尺度现象对应于能量从低阶到高级级联传递的过程，各种阶次的运动都会形成相应尺度的视在结构。基于这种认识，作者推导了独立的级数形式的漂移流机械能方程。该方程提供多尺度时空离散解，恰与湍流多尺度现象相对应。数值计算表明，采用不同的阶次计算，即可精确获得统计平均流或拟序结构流。

## § 2. 统计侧偏平均

尽管湍流极为复杂，但在连续介质概念成立的最小尺度上满足 Navier~Stokes 方程。NS 方程的非线性特性在高 Reynolds 数时通常导致无穷多解。假定  $u_i$  是其解空间随机抽样值，则相应的脉动速度可以定义为：

$$u'_i = u_i - \bar{u} \quad (1)$$

以上速度不管有无附标，均为矢量。式中平均速度由系综平均获得：

$$\bar{u} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \quad (2)$$

式中  $N$  是 NS 方程可能的解的数目。将所有的解依照一定的划分标准分为二组，其第一组占有  $N_I$  个解，第二组为剩余的  $N_{II}$  个解。二组相应的脉动值表示为  $u'_i$  及  $u''_i$ ，第一组脉动值的系综平均为

$$\bar{u}' = \lim_{N_I \rightarrow \infty} \frac{1}{N_I} \sum_{i=1}^{N_I} u'_i \quad (3)$$

该值称之为二组漂移速度。相似的

$$\bar{u}'' = \lim_{N_{II} \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{II}} \sum_{i=1}^{N_{II}} u''_i \quad (4)$$

称之为二组漂移速度。因为所有脉动的总系综平均

$$\bar{u}' = \lim_{N, N_I \rightarrow \infty} \frac{N_I}{N} \frac{\sum_{i=1}^{N_I} u_i'}{N_I} + \lim_{N, N_{II} \rightarrow \infty} \frac{N_{II}}{N} \frac{\sum_{i=1}^{N_{II}} u_i''}{N_{II}} \quad (5)$$

等于零, 则有

$$M_I \bar{u}' + M_{II} \bar{u}'' = 0 \quad (6)$$

式中  $M_I = N_I / N$  及  $M_{II} = N_{II} / N$ , 且有

$$M_I + M_{II} = 1 \quad (7)$$

$M_I$  及  $M_{II}$  作为  $t$  与  $x$  的慢变化函数不参与微分运算, 可看作是二股漂移流的无量纲质量密度或权重系数。(6) 式表明, 二股漂移速度并非一定要对称。但它们的加权漂移速度  $\tilde{u}' = M_I \bar{u}'$  及  $\tilde{u}'' = M_{II} \bar{u}''$  则是对称的, 因为

$$\tilde{u}' + \tilde{u}'' = 0 \quad (8)$$

图 1 可形象的说明加权漂移速度的对称性。为简单起见, 只取有限时间间隔并令正负脉动各自具有定常波幅。可以看出, Reynolds 平均导致  $\bar{u}' = 0$  不能给出任何一阶脉动信息; 而侧偏平均可得漂移速度  $\bar{u}'$ 、 $\bar{u}''$  既不为零, 也不对称, 但加权漂移速度  $\tilde{u}'$  及  $\tilde{u}''$  则具有对称性。

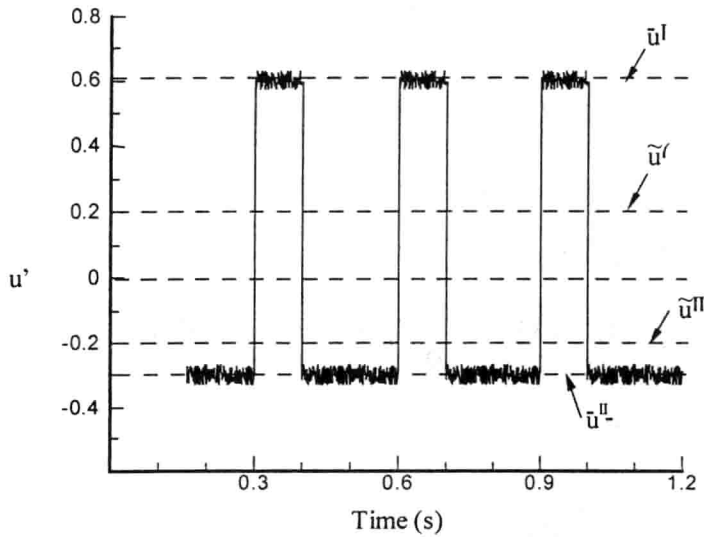


图 1. 加权漂移速度的对称性

因为压力脉动  $p'_i$  的平均值为零, 则一、二组的加权平均脉动压力也是对称的, 即

$$\tilde{p}' + \tilde{p}'' = 0 \quad (9)$$

将以上加权侧偏平均方法分别应用于一、二组的 Navier-Stokes 方程, 则可得出[3]:

$$\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \tilde{u}' = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}' + \nu_L \nabla^2 \tilde{u}' - (\tilde{u}' \cdot \nabla) \bar{u} - M_I M_{II} \left( \overline{(u' \cdot \nabla) u'} - \overline{(u'' \cdot \nabla) u''} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}''}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \tilde{u}'' = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}'' + \nu_L \nabla^2 \tilde{u}'' - (\tilde{u}'' \cdot \nabla) \bar{u} + M_I M_{II} \left( \overline{(u' \cdot \nabla) u'} - \overline{(u'' \cdot \nabla) u''} \right) \quad (11)$$

值得注意的是, 以上二个方程唯一的区别在于右侧最后一项符号相反。这就再次肯定了  $\tilde{u}'$  及  $\tilde{u}''$  的对称性。因之, 只需求解其中之一方程, 例如 (10), 即可。

### § 3. 模化封闭

按照模化惯例, 令

$$\overline{(u' \cdot \nabla) u'} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\tau}_T \quad (12)$$

作为单位质量湍流应力的散度。对 (10) 式右侧最后一项的模化为:

$$M_I M_{II} \left( \overline{(u' \cdot \nabla) u'} - \overline{(u'' \cdot \nabla) u''} \right) = \nu_L \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{\rho} \left( \nabla \cdot \bar{\tau}_T - \frac{\nabla \cdot \tilde{\tau}_T'}{2} + \frac{\nabla \cdot \tilde{\tau}_T''}{2} \right) \quad (13)$$

$$\text{可以证明} \quad \tilde{\tau}_T' = -\tilde{\tau}_T'' \quad (14)$$

由此, 可得出平均流及加权漂移速度的连续方程及动量方程如下 (因为  $\tilde{u}'$ ,  $\tilde{u}''$  的对称

性, 今后只讨论  $\tilde{u}'$  并以  $\tilde{u}$  表示之):

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu_L \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\tau}_T \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \tilde{u} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \tilde{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \nu_L \nabla^2 (\tilde{u} - \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\tau}_T - \bar{\tau}_T) - (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} \quad (18)$$

以上模化应用了动量传输链概念, 即平均流因层流粘性及湍流粘性作用损失的动

量传输给加权漂移流，而加权漂移流的动量又因为以上两种粘性作用，最终变为分子杂乱运动。该链首先起始于平均流的层流粘性应力项。在漂移流动量方程(18)中除了  $\nu_L \nabla^2 \bar{u}$  外，其余项都与脉动项有关，如果漂移速度初始值为零并缺少  $\nu_L \nabla^2 \bar{u}$  项，漂移速度则永远为零。本文平板边界层转换的计算表明，如缺少该项，则不可能发生层流向湍流的转换。动量传输过程首先由平均流经由层流及湍流粘性力项传向漂移流，成为漂移流动量方程的源项。这一传输过程对  $\tilde{u}^I$  及  $\tilde{u}^{II}$  具有同等效果，不仅驱使两组漂移流在相反方向运动，也保证了两股漂移流的对称性及相互间的确定关系。传输链的下一环节是漂移流的动量经由漂移流的粘性力项引起的涡团散裂项  $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tilde{\tau}_T$  及粘性

耗散项  $\nu_L \nabla^2 \tilde{u}$  最终变为分子杂乱运动。事实上，湍流场的每一个时空点上  $I$ ， $II$  两组漂移流的划分准则，是由模化方式(12)，(13)唯一的确定的。

#### § 4. 正交各向异性本构关系式

为决定湍流应力张量，首先观察应力与应变率的下述本构关系式：

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

对于各向异性湍流，36个本构系数  $C_{ij}$  是独立的，并随坐标系而变动。因为漂移流的特性受平均流操控，可以认为漂移流场构造了一个以平均流为主轴方向的正交各向异性环境。在正交各向异性湍流中，同样拥有36个非零本构系数。如果正交各向异性坐标系的主轴方向  $n_1$  与平均流方向一致，次轴  $n_2, n_3$  位于平均流法平面上[4]，则有：

$$\begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

为了模化各向异性湍流粘性，引入脉动场的平均位移矢  $\lambda$ ，并定义涡团粘性张量为

$$\xi_{ij} = \lambda_j \tilde{u}_i \quad (21)$$

假定平均流及漂移流具有同样的对称性的本构关系

$$\tau_{ij} = 2\mu_{IJ}\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\mu_{KK}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (22)$$

$$\mu_{IJ} = |\xi_{ij}| \quad (23)$$

式中 I、J、K 是伴随下标, 与 i、j、k 取向一致, 但在求和约定中不计入哑指标。利用 (21) (22) 式, (20) 式便可改写为

$$\begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}|\xi_{11}| & -\frac{2}{3}|\xi_{22}| & -\frac{2}{3}|\xi_{33}| & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}|\xi_{11}| & \frac{4}{3}|\xi_{22}| & -\frac{2}{3}|\xi_{33}| & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}|\xi_{11}| & -\frac{2}{3}|\xi_{22}| & \frac{4}{3}|\xi_{33}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(|\xi_{23}|+|\xi_{32}|) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(|\xi_{13}|+|\xi_{31}|) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(|\xi_{12}|+|\xi_{21}|) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

式中工程应变率  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{ij}$ 。可以看出, 正交各向异性湍流共有 6 个

独立本构系数。各向异性主轴坐标系 1 2 3 与非主轴坐标系 xyz 关系见图 2。

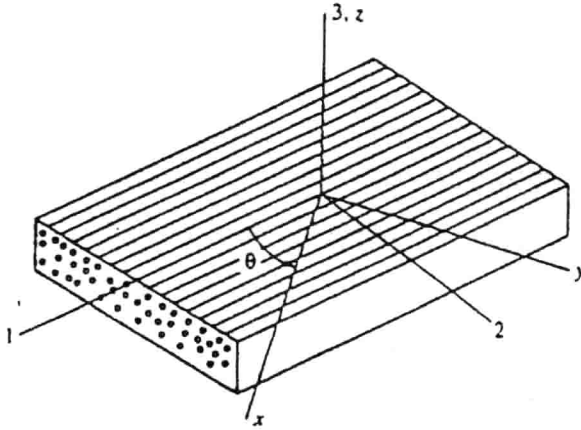


图 2. 正交各项异性主轴坐标系 123 与非主轴坐标系 xyz 的关系

xyz 笛卡尔坐标系下应力——工程应变率关系为:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}|\xi_{11}| & -\frac{2}{3}|\xi_{22}| & -\frac{2}{3}|\xi_{33}| & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}|\xi_{11}| & \frac{4}{3}|\xi_{22}| & -\frac{2}{3}|\xi_{33}| & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}|\xi_{11}| & -\frac{2}{3}|\xi_{22}| & \frac{4}{3}|\xi_{33}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(|\xi_{23}|+|\xi_{32}|) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(|\xi_{13}|+|\xi_{31}|) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(|\xi_{12}|+|\xi_{21}|) \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

式中 (T) 是笛卡尔坐标系与正交各向异性主轴坐标系之间的变换矩阵。该方程与 (19) 一样, 具有 3 6 个非零粘性系数。

## § 5. 机械能方程

脉动场的平均位移矢  $\lambda$  的方向与平均流最大拉伸应力方向一致,  $\lambda$  的量值则由描述平均流动能因漂移流作用而变化的机械能方程确定。漂移流在固定坐标系的实际速度是  $\bar{u} + \tilde{u}$ , 在  $x + \lambda$  点及  $x$  点该运动的动能差按泰勒级数展开后为:

$$\frac{1}{2}(\bar{u}(x+\lambda) + \tilde{u}(x+\lambda))^2 - \frac{1}{2}(\bar{u}(x) + \tilde{u}(x))^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot \nabla)^j \bar{u}^2}{j!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot \nabla)^j (\bar{u} \cdot \tilde{u})}{j!} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot \nabla)^j \tilde{u}^2}{j!} \quad (26)$$

上式中的右侧第一, 三项分别是平均流及漂移流在  $\lambda$  距离内因其自身运动而引起的动能变化。第二项则是平均流及漂移流在  $\lambda$  距离内相互作用引起的动能变化, 其中平均流动能因漂移流的作用而产生变化为:

$$((\lambda \cdot \nabla) \bar{u}) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot \nabla)^{j-1} \tilde{u}}{j!} \quad \text{应当指出, 漂移流动量方程 (18) 左侧是漂移流被平均}$$

流以流速  $\bar{u}$  输运时的加速度, 方程的右侧则是单位质量漂移流被平均流输运时所承受的力。该力在脉动场的平均位移  $\lambda$  距离上所做的功, 恰应等于平均流动能在  $\lambda$  距离内因漂移流的作用而引起的变动值, 即:

$$((\lambda \cdot \nabla) \bar{u}) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot \nabla)^{j-1} \tilde{u}}{j!} = \lambda \cdot \left[ -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu_L \nabla^2 (\tilde{u} - \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\tau}_T - \bar{\tau}_T) - (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right] \quad (27)$$

该机械能方程是一独立方程, 它表达了平均流动能变化与漂移流所做功之间的动平衡关系。方程 (27) 左侧的级数的不同阶次项, 代表了湍流中不同阶次的拟序结构的动能变化。如在方程左侧略去高阶项而只取最低阶项, 即令  $j=1$ , 则有

$$\xi : \nabla \bar{u} = \lambda \cdot \left[ -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu_L \nabla^2 (\tilde{u} - \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\tau}_T - \bar{\tau}_T) - (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right] \quad (27a)$$