



中国工程热物理学会

第十一届年会论文集

传热传质学（上册）

二〇〇五

北京

中国工程热物理学会编



中国工程热物理学会

第十一届年会论文集

传热传质学（上册）



Chinese Society of Heat and Mass Transfer

2005年 北京

传热传质学学术会议论文集(上册) 目录

一. 热传导

- 053011 含有内热源的球坐标变热物性非定常导热微分方程解析解..... 闫顺林 朱伟平 柳青 高大明(1)
- 053020 有机玻璃热物性准稳态法实验研究..... 周子民 曾文辉 叶良春 涂娟 王长宏(10)
- 053041 硬硅钙石型微孔硅酸钙绝热材料的有效导热系数研究..... 魏高升 张欣欣 于帆(14)
- 053059 树状分形分岔结构的热导率..... 徐鹏 郁伯铭(19)
- 053067 体点问题的优化方法研究..... 徐向华 任建勋 梁新刚(23)
- 053091 多孔固体复合材料热传导方程的多尺度计算..... 曹礼群 罗剑兰(29)
- 053092 不同目的热优化目标函数: 热容损耗与熵产..... 韩光泽 过增元(34)
- 053259 氩薄膜法向热导率的分子动力学模拟..... 刘其鑫 姜培学 向恒(38)
- 053263 两种边界条件下氩薄膜导热的 NEMD 模拟..... 向恒 姜培学 刘其鑫(42)
- 053285 纳米尺度金属导热系数的分子动力学研究..... 李静 戴景民(47)
- 053368 热质的运动与传递(4) — 热波..... 朱宏晔 过增元(52)
- 053383 热质运动与传递(1) — 热质和热子气..... 过增元(57)
- 053384 热质运动与传递(6) — 微尺度导热中的“热质动能效应”..... 曹炳阳 张清光 过增元(64)
- 053392 热质的运动和传递(3) — 热子气的守恒方程和傅立叶定律..... 过增元 朱宏晔(69)

二. 对流换热

- 053026 动量比对涡轮叶片气膜孔流量系数的影响..... 邓明春 朱惠人 许都纯(76)
- 053044 自然对流下含纳米 SiO_2 涂层表面抑霜研究..... 张新华 刘中良 王皆腾 勾昱君 孟声 马重芳(81)
- 053053 垂直矩形通道内混合对流的实验研究..... 种道彤 刘继平 严俊杰 周志杰(85)
- 053056 垂直放置平直翅片强制对流的实验研究..... 丁海燕 邢秦安 刘继平 种道彤(90)
- 053074 空气-混凝土圆管界面对流换热系数实验..... 张建荣 刘照球 刘文燕(94)
- 053076 船用增压锅炉对流管束结构特性及换热特性研究..... 曹占伟 姜任秋 李彦军 孙宝芝(101)
- 053096 部分充满内热源多孔介质的封闭方腔内自然对流的数值模拟..... 王刚 曾敏 黄自鹏 王秋旺 罗来勤(106)
- 053098 三种管内传热强化性能评价准则比较..... 谢公南 田林 王秋旺 罗来勤(110)
- 053101 矩形窄通道内纵向涡发生器安装形式对强化换热影响的试验研究..... 王令 陈秋炀 周砚耕 罗来勤 曾敏 王秋旺 黄彦平 肖泽军(114)
- 053107 三角形条纹面流动与传热特性研究..... 汪健生 汤俊洁 刘志毅(118)
- 053111 超临界二氧化碳对流换热特性实验研究..... 董彬 尹从绪 吕静 付萌(122)
- 053122 模式水冷壁管内外换热监测方法研究..... 张志正 孙保民 徐鸿 郭永红 刘国跃(127)
- 053128 一种求解飞机蒙皮内外耦合热效应的壁面热流函数法..... 艾青 夏新林 唐尧(133)
- 053176 半封闭通道射流冲击换热特性的实验研究..... 张泽远 张靖周 杨卫华(138)
- 053178 旋转条件下半受限单孔冲击射流局部换热特性的试验研究..... 毛军逵 白云峰 常海萍(142)
- 053179 旋转条件下半受限冲击射流流动和换热特性的数值研究..... 毛军逵 白云峰 常海萍(147)

- 053180 利用时间推进法和 QUICK 格式研究矩形方腔自然对流.....陈晓春 朱颖心 王 元(152)
- 053206 利用粒子溅射进行自由表面传热强化.....黄护林(159)
- 053216 涡轮叶片内部气膜孔局部换热特性实验研究.....徐 磊 常海萍 雍佳昊(165)
- 053226 压电驱动自耦合射流流动和换热特性的实验研究.....张靖周 谭晓茗(169)
- 053229 突片作用下气膜冷却特性的试验研究.....杨卫华 马国锋 张靖周(173)
- 053261 催化剂薄层内甲烷水蒸气重整反应强化管内对流换热的数值模拟.....刘 峰 姜培学 S. He (177)
- 053265 竖直微细圆管中超临界压力 CO_2 湍流对流换热实验研究.....张 宇 姜培学 石润富 邓建强(183)
- 053266 竖直圆管中超临界压力 CO_2 在低 Re 数下对流换热实验研究.....张 宇 姜培学 石润富 邓建强(187)
- 053274 蒸发式冷凝器管外水膜与空气传热系数的实验研究.....朱冬生 蒋 翔 徐 丽 沈家龙(191)
- 053278 不同磁致纵向涡形式对空气对流换热的影响.....杨立军 任建勋 杜小泽 刘登瀛(196)
- 053279 开孔矩形翅片椭圆管流动与换热特性的数值研究.....张 米 杜小泽 杨立军 冯丽丽 杨勇平(201)
- 053282 几何参数对锯齿形通道流动与换热的影响.....卢 玫 马 奇 杨 茉 李 凌 余 敏(206)
- 053287 侧壁传热对方腔内 Benard 对流的影响.....郑臻轶 杨 茉 王建刚 王治云 章立新(210)
- 053288 交错肋对复合肋套管流动和换热的影响.....郭海生 杨 茉 刘明会 单彦广 卢 玫 余 敏(214)
- 053312 自然对流型 PCR 芯片的优化设计.....薛 辉 王 玮 李志信 过增元(218)
- 053341 光催化反应器降解 VOCs 模型研究.....莫金汉 张寅平 杨 瑞(223)
- 053342 温度对干建筑 VOC 散发参数的影响机理和测定.....王新轲 张寅平 罗晓熹(227)
- 053346 新风进口位置对室内空气参数及房间热负荷的影响.....陈 群 任建勋 陈泽敬 过增元(234)
- 053347 封闭方腔热磁对流强化换热的实验研究.....杨昆仑 宋耀祖 任建勋(239)
- 053349 应用于狭窄通道湍流纵向涡强化换热的实验和数值研究.....刘 永 王军荣 宋耀祖(243)
- 053354 封闭圆内开缝圆自然对流换热的非稳态振荡.....黄夫泉 杨 茉 余 敏 单彦广 章立新(248)
- 053362 具有耦合壁面的开口腔体内的空气自然对流的数值模拟.....王治云 李子钧 章立新 施 健 杨 茉(252)
- 053385 层流对流换热中的势容耗散极值与最小熵产.....吴 晶 程新广 孟继安 过增元(256)

三. 相变换热

- 053004 水蒸气在超疏水表面上的冷凝传热.....宋永吉 任晓光 任绍梅 王 虹 江 雷 翟 锦(260)
- 053029 双组分混合工质沸腾换热的理论研究.....刁彦华 赵耀华 王秋良(264)
- 053046 直接甲醇燃料电池阳极流道两相流动的拟沸腾模型(1) 流动压力降的计算.....王 江 施明恒 蒋 杰 蔡 辉 陈 志(269)
- 053048 微囊化相变悬浮液层流强化传热的参数分析与模拟.....郝 睿 赵镇南(273)
- 053051 温差驱动下相变材料围绕水平圆柱接触熔化分析.....陈文振 朱 波 刘 峰 高 明 黎浩峰(277)
- 053052 滑动平板下相变材料接触熔化分析.....陈文振 陈志云 桂学文 刘 镇 孙丰瑞(281)

053077	R410A 和 R22 在水平强化管内的蒸发和冷凝性能·····	武永强	罗 忠	(285)
053079	液化石油气加热过程中的气化率确定·····	王皆腾	刘中良	刘恒伟
	·····	张新华	勾昱君	(292)
053080	冷凝锅炉凝结特性及经济性分析·····	李 朋	马其良	曹丽丽
053082	改善三水醋酸钠固液相变性能的实验研究·····	李 晶	刘中良	马重芳
053093	过冷池沸腾落塔短时微重力实验研究·····	赵建福	万士昕	刘 刚
053115	$C_{14}H_{30}C_{16}H_{34}$ 混合相变材料热物性及互溶性研究·····	陈斌娇	徐 慧	王 馨
	·····	张寅平	杨 睿	(310)
053132	梯度表面能材料表面上滴状凝结换热实验·····	廖 强	顾扬彪	朱 恂
	·····	王 宏		(315)
053135	MEMS 器件中微气泡控制生长研究进展·····	董 涛	杨朝初	张玉龙
053136	毛细管中液氮的沸腾传热特性实验研究·····	张 鹏	任 欣	王如竹
053144	非共沸混合工质分离特性传热传质研究·····	周 奕	马虎根	李长生
	·····	崔晓钰		(332)
053146	优化抑霜涂层的实验研究·····	勾昱君	刘中良	王皆腾
	·····	张新华	孟 声	马重芳
053151	DMFC 两相流及其对传质影响的研究·····	郭 航	贾杰林	汪茂海
	·····	刘 璿	马重芳	(341)
053163	液封液桥内振荡热毛细对流的三维数值模拟·····	李友荣	彭 岚	吴双应
053166	垂直矩形窄缝饱和流动沸腾换热实验研究·····	潘良明	蒲鹏飞	梁祥飞
	·····	辛明道	陈德奇	(351)
053167	竖直矩形狭缝内环状流沸腾换热分析·····	蒲鹏飞	潘良明	梁祥飞
	·····	辛明道		(355)
053170	滴状冷凝初始液滴形成机理的研究·····	刘天庆	穆春丰	孙相或
	·····	李香琴		(360)
053189	蒸汽喷射制冷系统中喷射器内特殊流动现象的研究·····	李海军	沈胜强	高洪涛
	·····	刘振华	秋雨豪	(369)
053210	圆柱形水喷流在超亲水表面的沸腾临界热流密度·····	刘志春	刘 伟	杨金国
053249	CPL 蒸发器毛细芯中流动与传热的场协同分析·····	邓芳芳		(373)
053250	新型平板式 CPL 系统的设计与实验研究·····	刘志春	刘 伟	宰 军
	·····	杨金国		(379)
053252	平板式 CPL 系统的动态仿真·····	邓芳芳	刘 伟	杨金国
	·····	刘志春	宰 军	(383)
053295	分割表面对蒸汽滴状冷凝传热特性影响的实验研究·····	马学虎	宋天一	兰 忠
	·····	周兴东		(389)
053296	液滴脱落运动影响含有不凝气的蒸汽凝结过程的实验研究·····	周兴东	马学虎	兰 忠
	·····	宋天一		(394)
053297	过渡状态冷凝传热模型·····	马学虎	兰 忠	周兴东
	·····	宋天一		(399)
053298	滴状冷凝过程液滴的脉动运动规律及其分形分布模型中相邻两代液滴半径 比参数·····	马学虎	兰 忠	周兴东
	·····	宋天一		(404)
053300	饱和液氮爆发沸腾初期性状特点分析·····	董兆一	淮秀兰	(409)
053306	相变蓄能建筑围护结构节能效果研究·····	林坤平	张寅平	肖 伟
	·····	张群力	王 馨	狄洪发
053308	强化相变换热性能的实验研究·····	李 莉	刘中良	马重芳
053321	一种新型相变高架地板实验及模拟研究·····	丁剑红	王 馨	张寅平
	·····	林坤平	杨 睿	张群力
053322	伞板上降落液膜破裂的实验研究·····	张立强	徐 烈	(426)
053332	液体散热在雾化喷射冷却中的影响·····	芦秋敏	雷树业	(430)
053335	Lattice-Boltzmann 方法计算固液相变问题·····	钱吉裕	李 强	宣益民
053339	自激振荡流热管脉冲加热强化传热实验研究·····	冼海珍	商福民	刘登瀛
	·····	杜小泽		(438)
053340	自激振荡流热管变截面强化传热实验研究·····	商福民	冼海珍	刘登瀛
	·····	杜小泽		(444)

053348	电场作用下气泡的变形分析	陈 凤 宋耀祖 陈 民	(449)
053358	相变蓄能式低温热水地板采暖系统传热性能模拟研究	张群力 狄洪发 林坤平 张寅平 王 馨	(453)
053359	表面特性对冷面结霜的影响	吴晓敏 李瑞霞 王维城 李 辉 唐黎明	(459)
053360	水平微肋管内蒸发及冷凝换热性能研究	吴晓敏 李 辉 龚 鹏 王维城 李瑞霞	(463)
053366	吸收器降膜和滴状吸收数值模拟研究	王照亮 唐大伟	(467)
053373	低压闪蒸液滴温度与相变过程的研究	刘伟民 毕勤成 杨 冬 齐方成 毕新刚	(472)
053374	混合工质过冷核化沸腾气泡行为特性	王 珍 彭晓峰 王晓东	(478)
053375	新型相变散热块设计与性能分析	韩 玮 彭晓峰	(482)
053376	非晶体物质融凝过程动态液固界面特性	徐 杰 王晓东 彭晓峰	(486)
053377	多孔介质内气液相变水分迁移的微 CT 分析	吴 迪 彭晓峰	(490)
053390	霜晶形态演变过程的实验研究	梁展鹏 彭晓峰 王晓东	(494)
053391	引入固体颗粒强化沸腾换热的机理分析	金建国 任吉堂 陈连生 田广志 徐树成 王翠苹 田志强	(498)
053398	高温固液相变蓄热器的流场分析	周建辉	(503)
053399	自然对流在融化传热中的强化作用试验研究	杜雁霞 程宝义 贾代勇 茅靳丰 袁艳平	(507)

四. 多孔介质传热传质

053021	非均匀多孔介质有效热导率分析	李小川 施明恒 张东辉	(512)
053022	含内热源可燃多孔介质热量传递及影响因素分析	梁森森 郝英立 施明恒	(516)
053028	固体有机膜的传湿系数测量	张明瑞 徐学利 张立志	(520)
053038	静电强化吸附的定性实验和理论分析	梁世强 陈 坚 徐靖中	(525)
053185	土壤自然温度场测试与分析	赵 波 刘晓燕 张兰双	(530)
053186	严寒地区土壤状态对自然温度场影响研究	刘立君 刘晓燕 宫克勤 赵 波	(534)
053193	使用转轮除湿设备来干燥粮食的方法	包 剑 罗会龙 代彦军	(539)
053194	等径颗粒圆柱填充床近壁区孔隙率分部规律新探	马 斌 雷树业 王良璧	(544)
053230	多孔材料强化管内对流换热的数值研究	杨卫卫 何雅玲 陶文铨	(548)
053253	土壤次生盐渍化之水盐运动规律研究	陈丽湘 刘 伟	(552)
053254	地下水水位及矿化度对土壤盐分运移的影响	范爱武 刘 伟 李光正	(557)
053255	不同盐分在土壤中运移的数值比较	范爱武 刘 伟 李光正	(562)
053258	多孔介质相变融化过程非热平衡研究	卢 涛 姜培学 邓建强	(566)
053260	微细多孔介质中对流换热实验研究	胥蕊娜 姜培学 宫 伟	(571)
053262	纳米金属颗粒与多孔结构热导率的研究	袁世平 姜培学	(575)
053267	超临界二氧化碳在烧结多孔介质中对流换热的实验研究	石润富 姜培学 邓建强 张 宇	(580)
053271	孔隙率的非均匀性对多孔介质中对流换热影响的数值模拟	吕晓辰 姜培学	(584)
053280	渗模型阈值附近的一些奇异特性	张东辉 施明恒 芮孝芳	(588)
053299	基于分形理论的多孔介质导热分析	王唯威 淮秀兰	(595)
053333	窄筛分水洗沙的气测和水测渗透率实验	雷树业 郝锦志 安珍彩	(599)
053334	筛分沙的渗透率, 流动滑移与气体粘度	雷树业 安珍彩	(605)
053343	多孔圆肋传热传质分析	赵 波 任建勋 陈 群	(610)
053370	多孔介质平板通道强迫对流中非局部热平衡对 Nusselt 数的影响	何录武 杨 骁	(615)
053389	疏松多孔介质渗透率—孔隙率关系的测量	梁 宇 黄 苍	(619)

含有内热源的球坐标变热物性非定常导热 微分方程解析解

闫顺林 朱伟平 柳青 高大明

(华北电力大学能源与动力工程学院, 河北 保定 071003)

(TEL:13582066592 EMAIL:ZWP781229@163.com)

摘要: 各种变系数(热传导系数, 密度与比热为坐标的函数)及非线性(上述系数为温度的函数)的非定常导热方程的解析解有其理论意义, 且在同等条件下, 可作为标准解来校核各种数值计算以及用来启发发展各种计算技巧例如差分格式、网格生成等。文献[1]和文献[2]分别给出了直角坐标系下和柱坐标系下变热物性非定常导热微分方程的解析解, 本文将继续给出含有内热源的球坐标系下变系数非定常导热微分方程的一元和二元解析解。在求解二元解时, 还用了一种新型的分离变量法, 即加乘混合分离变量法。

关键词: 解析解 导热 变热物性 非定常 非线性 球坐标 内热源

ANALYTICAL SOLUTIONS OF UNSTEADY CONDUCTION WITH VARIABLE THERMODYNAMIC PROPERTIES

Yan Shun-Lin Zhu Wei-Ping Liuqing GaoDaming

(North China Electric Power University (BaoDing) Energy and Power Department, 071003)

Abstract: Analytical solutions of unsteady conduction with variable thermodynamic properties are meaningful in theory. In addition, they are very useful to the computational heat conduction to check the numerical solutions and to develop numerical schemes, grid generation methods and so forth.

Key words: analytical solution; heat conduction; variable property; unsteady; non-linear; inner-source of heat.

1 前 言

各种常热物性导热方程的解析解曾经对导热理论的发展起到重要作用[3], 实际中各热物性(导热系数、密度与比热)都是变数, 过程也是非定常的, 但导出其解析解比较困难。据作折所知, 在公开文献中还极少有非定常变热物性的显式解析解发表, 考虑内热源的就更加少见。

解析解对近来飞速发展的计算流体力学与计算传热学有一定的理论价值, 在同等定解条件下它们可以作为标准解用来检验数值计算的准确性、收敛性与稳定性, 还可以借鉴其数学上的严格结果用来启发各种计算技巧例如差分格式、网格生成等。文献[4]就因为起到过这样的作用而被文献[5]引用来校验其数值计算的结果。

变热物性导热方程的解在不同坐标下会有所不同。所以, 本文继文献[1]和[2]之后, 导出了含有内热源的球坐标系下变热物性非定常几何一元及二元导热方程的一些代数显式解析解。

本文的目的在于找到导热控制方程在热物性有变化时可能有的代数显式解析解, 而非为

解决某一具体问题而导出其解析解。所以，所给出的各个解的初始条件与边界条件不是预先给定，而是在找到导热主控制方程的一种解析解之后再求定。为使有可能找到代数显式解析解，各热物性与内热源分布的变化规律要有一定的匹配性。还有是用蔡睿贤[1]推荐使用的加法分离变量法来代替常规的分变量法，即假定未知函数 $\theta(r, t) = R(r) + T(t)$ 来代替后者的假定 $\theta(r, t) = R(r) * T(t)$ ；另外本文还采用了一种新型分离变量法，既假定未知函数 $\theta(r, t) = R(r) \Phi(\theta) + T(t)$ 。

2 含有内热源的球坐标系下变热物性非定常导热基本方程

基本方程为：

$$\rho C_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) + q_v \quad (1)$$

密度 ρ ，比热 C_p 与导热系数 λ 可能是坐标 (r, ϕ, θ) 的函数，也可能是温度 v 的函数，也可能是温度 (r, ϕ, θ, v) 的函数，但肯定是正数。又，(1) 式中 t 是时间坐标。

当简化为几何一元问题，即认为温度分布只沿半径变化时，(1) 式简化为下面的 (1a) 式

$$\rho C_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + q_v \quad (1a)$$

对本文所得的所有解析解都可以回代验证其正确性。

3 热物性及内热源沿半径变化时的非定常几何一元导热解析解

当用加法分离变量法时，如设 $\rho C_p = f(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $q_v = q_v(r)$ ，且

$\theta = T(t) + R(r)$ ，将之代入 (1a) 式并分离变量，可得：

$$T'(t) = C_1 = \frac{d}{dr} \left(\lambda(r) r^2 R' \right) / \left[r^2 f(r) \right] + q_v(r) / f(r) \quad (2)$$

各 C_i 均为任意常数。由 (2) 式左边可得

$$T(t) = C_1 t \quad (3)$$

由 (2) 式左边可得：

$$R = \int \left[\int r^2 [C_1 f(r) - q_v(r)] dr / r^2 \lambda(r) \right] dr \quad (4)$$

于是由 (3) 与 (4) 式及加法分离变量法导出热物性沿径向有变化时的导热解为：

$$\vartheta = C_1 t + \int \left[\int r^2 [C_1 f(r) - q_v(r)] dr / r^2 \lambda(r) \right] dr \quad (5)$$

(5) 式是基本导热方程组 (1a) 的一族以积分形式表达的解析解，其共同规律是温度沿时间呈线性变化 (本文只讨论 $C_1 \neq 0$ 时的解，即非定常的情况)，升温过程 $C_1 > 0$ ，降温过程

$C_1 < 0$ 。对于不同的热物性及内热源分布，会有不同的解。但为了有更明显的物理表达及适宜作为标准解，以能积分出代数显式解析解为宜，关键在于 $f(r)$, $\lambda(r)$ 与 $q_v(r)$ 要有相应的匹配关系。具体例子如下：

3.1 $\rho C_p = C_2 / r^2, \lambda = C_3 / r^2, q_v = q_v(r)$ 条件下的解析解

按照物理要求， C_2 和 C_3 均应为大于 0 的正数，按照 (5) 式，本条件下的解析解可写成

$$\vartheta = C_1 t + \iint [C_1 C_2 - r^2 q_v(r)] dr dr / C_3 \quad (5a)$$

由于热物性关系式中分母为 r^2 ，此解只能用于空心区域，本文大多数解析解有此限制。应该说，可以有无限多种内热源 $q_v(r)$ 得到代数显式解析解，实际上就是有无限多个解，下面给出具体实例：

3.1.1 $q_v = q_v(r) = C_4 / r^2$ 时的解

将上述条件代入 (5a)，则有

$$\vartheta = C_1 t + (C_1 C_2 - C_4)(r^2/2 + C_5 r + C_6) / C_3 \quad (6)$$

放热时 $C_4 > 0$ ，吸热时 $C_4 < 0$ ， C_5, C_6 则无论放热还是吸热均可正可负。此解温度沿半径呈 2 次曲线变化，本解的初始条件和边界条件可由上式得为：

$t = 0$ 时， $\vartheta = (C_1 C_2 - C_4)(r^2/2 + C_5 r + C_6) / C_3$ ，即初始温度分布是不均匀的；

及 $r = r_1$ 处 $\vartheta = C_1 t + (C_1 C_2 - C_4)(r_1^2/2 + C_5 r_1 + C_6) / C_3$

与 $r = r_2$ 处 $\vartheta = C_1 t + (C_1 C_2 - C_4)(r_2^2/2 + C_5 r_2 + C_6) / C_3$

即边界条件是非定常的，随时间变化而变化。后面给出的各个解的初始条件与边界条件也可以类似得出，限于篇幅，不再逐一赘述，但每个解必然对应一定的初始条件与边界条件。

3.1.2 $q_v = q_v(r) = C_5 e^{C_4 r} / r^2$ 时的解

同上可以得到相应的解析解为：

$$\vartheta = C_1 t + (C_1 C_2 r^2/2 - C_5 e^{C_4 r} / C_4^2 + C_6 r + C_7) / C_3 \quad (7)$$

由解的形式可以看出当 C_4 的绝对值较大时（也就是内热源变化较快时），内热源将成为影响温度变化的主要因素，这是符合物理规律的，如地球内部温度变化很大，就是因为地热变化较大的缘故，太阳等恒星内部温度分布与内热源的变化更是密切相关。

3.1.3 $q_v = q_v(r) = C_4 / r$ 时的解

在这种情况下，应用加法分离变量法有：

$$\vartheta = C_1 t + (C_1 C_2 r^2 / 2 - C_4 r^3 / 6 + C_5 r + C_6) / C_3 \quad (8)$$

此解温度随半径成立方关系变化, 可仿照 3.1.1 来确定本解的初始条件和边界条件, 这仍然是个不定常解。

3.1.4 $q_v = q_v(r) = C_4 r^{m-2}$ 时的解

$$\vartheta = C_1 t + (C_1 C_2 r^2 / 2 - C_4 r^{m+2} / [(m+1)(m+2)] + C_5 r + C_6) / C_3 \quad (9)$$

当 $m = 0$ 及 $m = 1$ 时, 此解退化为上面 (6) 及 (8) 的式。

当 $m = -1$ 及 $m = -2$ 时, (9) 式不成立, 可另外推得两个解析解:

$$\vartheta = C_1 t + (C_1 C_2 r^2 / 2 - C_4 (r \ln r - r) / 6 + C_5 r + C_6) / C_3 \quad (9a)$$

$$\vartheta = C_1 t + (C_1 C_2 r^2 / 2 + C_4 \ln r + C_5 r + C_6) / C_3 \quad (9b)$$

3.2 $\rho C_p = k(r)/r^2, \lambda = g(r)/r^2, q_v = h(r)/r^2$ 条件下的解析解

与推导 (5a) 式相同, 可求得此时的解析解为:

$$\vartheta = C_1 t + \int \left(\int [C_1 k(r) - h(r)] dr / g(r) \right) dr \quad (10)$$

(5a) 式其实是 (10) 式的特例, 同样可以有无限多个 $f(r)$, $g(r)$ 和 $h(r)$ 可以使 (10) 式得到代数显式解析解, 下面再给出几个具体的示例:

3.2.1 $\rho C_p = C_3 e^{C_2 r} / r^2, \lambda = C_5 e^{C_4 r} / r^2, q_v = C_7 e^{C_6 r} / r^2$ 时的解

由于一般比热容沿半径变化不会太大, 所以通常 C_4 的绝对值不会太大, 按照物理要求 C_3, C_5 都是正数, 放热 $C_7 > 0$, 吸热 $C_7 < 0$ 。将上述条件代入 (14)

$$\begin{aligned} \vartheta = C_1 t + C_1 C_3 e^{[(C_2 - C_4)r]} / C_2 C_5 (C_2 - C_4) - C_7 e^{[(C_6 - C_4)r]} / C_6 C_5 (C_6 - C_4) \\ - C_8 e^{-C_4 r} / C_5 C_4 + C_9 \end{aligned} \quad (11)$$

从本解可以看出比热容, 热物性和内热源中变化较快的将成为影响温度变化的主要因素, 这是符合物理规律的。一般比热容变化不会太大, 所以导热系数和内热源中变化较快的就成为影响物体内部分布的主要因素。

当 $C_2 = C_4$ 或 $C_6 = C_4$ 或 $C_4 = 0$ 或 $C_2 = 0$ 或 $C_6 = 0$ 时式 (15) 不成立。 $C_2 = C_4$ 实际上是要求导热系数与比热容之间存在严格的正比关系, $C_6 = C_4$ 实际上是要求内热源与导热系数之间成严格的正比关系, 这两种情况实际上不大可能存在; 因此只讨论 $C_4 = 0, C_2 = 0$ 或 $C_6 = 0$ 时的解析解。

当 $C_2 = 0$ ($C_6 \neq C_4, C_6 \neq 0, C_4 \neq 0$) 时:

$$\vartheta = C_1 t - C_1 C_3 r e^{-C_4 r} / C_5 C_4 + C_1 C_3 e^{-C_4 r} / C_4 C_5 - C_7 e^{[(C_6 - C_4)r]} / C_6 C_5 (C_6 - C_4) - C_8 e^{-C_4 r} / C_5 C_4 + C_9 \quad (11d)$$

当 $C_6 = 0$ ($C_2 \neq C_4, C_2 \neq 0, C_4 \neq 0$) 时:

$$\vartheta = C_1 t + C_1 C_3 e^{[(C_2 - C_4)r]} / C_2 C_5 (C_2 - C_4) + C_7 r e^{-C_4 r} / C_4 C_5 - C_7 e^{-C_4 r} / C_4 - C_8 e^{-C_4 r} / C_5 C_4 + C_9 \quad (11e)$$

当 $C_4 = 0$ ($C_2 \neq 0, C_6 \neq 0$) 时:

$$\vartheta = C_1 t + (C_1 C_3 e^{C_2 r} / C_2^2 - C_7 e^{C_6 r} / C_6^2 + C_8 r + C_9) / C_5 \quad (11f)$$

当 $C_2 = C_4 = 0$ ($C_6 \neq 0$) 时, 式(7) 既是其解析解。

当 $C_6 = C_4 = C_2 = 0$ 时, 式(6) 既是其解析解。

当 $C_6 = C_4 = 0$ 及 $C_6 = C_2 = 0$ 时由于热物性与内热源之间存在严格正比关系, 实际上不大可能存在, 所以不再赘述其解析解。

3.2.2 $\rho C_p = C_2 r^{m-2}, \lambda = C_3 r^{n-2}, q_v = C_4 r^{k-2}$ 时的解:

此时有:

$$\vartheta = C_1 t + C_1 C_2 r^{m+2-n} / C_3 (m+1)(m+2-n) - C_4 r^{k+2-n} / C_3 (k+1)(k+2-n) + C_5 r^{1-n} / C_3 (1-n) \quad (12)$$

从(11)和(12)式可以看出热物性和内热源的变化规律可以定性的影响物体内部温度分布状态, 这是符合物理规律的。

当 $m = -1, k = -1, m = n - 2, k = n - 2, n = 1$ 时式(15)不成立。若 $m = -1$ 则 $\rho C_p = C_2 r^{-3}$ 此时比热容随半径变化太快, $m = n - 2$ 及 $k = n - 2$ 时要求的热物性之间及热物性与内热源之间的匹配关系过于严格, 这几种情况均实际上不大可能存在; 限于篇幅 $k = -1, n = 1$ 时的解析解也不再赘述。

3.3 温度为半径和时间的纯线性分布时的解析解

设比热容、导热系数和内热源三者满足如下关系:

$$\rho C_p = [C_2 (d\lambda/dr + 2\lambda/r) + q_v] / C_1 \quad (13)$$

则可导得一个温度是对时间和半径均为线性分布的及简单解

$$\vartheta = C_1 t + C_2 r + C_3 \quad (14)$$

由于 λ 和 q_v 的函数表达形式无限多,所以 ρC_p 的表达式也有无限多,式(13)中只有求导,所以本解的导出很容易找到热物性与内热源的匹配,它能使温度有关于时间和半径的纯线性分布。本解形式很简单,可能有利于作为校验计算流体力学的标准解。

4 非线性、非定常几何一元导热的解析解

当热物性是温度的函数时,主控方程(1a)就是非线性的,此时更要注意热物性和内热源匹配性。

如: $\rho C_p = 2p\vartheta, \lambda = 2k\vartheta, q_v = C_2/r^2$ 时,主控方程(1a)变为:

$$2p\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 2k\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + C_2 \right]$$

既为:

$$p \frac{\partial \vartheta^2}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left[k \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \vartheta^2}{\partial r} \right) + C_2 \right] \quad (15)$$

若令 $\vartheta^2 = R(r) + T(t)$ 则有:

$$T' = [k d(r^2 R')/dr + C_2]/pr^2$$

$$\text{令: } T' = [k d(r^2 R')/dr + C_2]/pr^2 = C_1 \text{ 则: } T = C_1 t + C_4$$

$$R = (C_1 pr^2/12 - C_2 \ln r - C_3/r)/k$$

$$\therefore \vartheta = (C_1 t + (C_1 pr^2/12 - C_2 \ln r - C_3/r)/k + C_4)^{1/2} \quad (16)$$

由于内热源的分母为 r^2 , 所以这个解仍只是用于空心球区域。本解的导热系数及比热容与温度成线性关系, 对于固体可能比上面的线性方程各解更接近实际情况。此外还有一些热物性(温度的函数)和内热源相匹配可以得到(1a)式所对应的非线性方程的代数显式解析解, 限于篇幅, 这里不赘。

5 非定常几何二元导热的解析解

当非定常温度场沿半径和某一方向角(如 θ)均有变化时既是几何二元问题, 这实际上已是数学上的三元问题, 因此求得代数显式解析解更为困难; 下面分别对变热物性(热物性为坐标的函数)与非线性(热物性为温度的函数)的情况给出一些代数显式解析解。

5.1 变热物性方程的解析解

仅以导热系数为常数 ($\lambda = \lambda_0 = \text{const}$) 时的解析解为例, 如

$\rho C_p = k_1 r \cos \theta$, $q_v = k_2 r \cos \theta$ 则方程(1)变为

$$k_1 r \cos \theta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_0}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) + k_2 r \cos \theta \quad (1b)$$

此时若用一种新型分离变量法, 即令: $\vartheta = R(r)\Theta(\theta) + T(t)$ 来代替经典的 $\vartheta = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot T(t)$ 和蔡睿贤[1]所推荐使用的 $\vartheta = R(r) + \Theta(\theta) + T(t)$ 则有:

$$k_1 r^3 \cos \theta T' = \lambda_0 \Theta \frac{d}{dr} (r^2 R') + \frac{\lambda_0 R}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta' \sin \theta) + k_2 r^3 \cos \theta \quad (17)$$

等式左边含有 $T'(t)$ 项, 而右端不含关于 t 的函数。

$$\text{所以必有: } T'(t) = C_1. \text{ 既: } T(t) = C_1 t + C_5 \quad (18)$$

将(17)式代回原式, 则有:

$$C_1 K_1 r^3 \cos \theta = \lambda_0 \Theta \frac{d}{dr} (r^2 R') + \frac{\lambda_0 R}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta' \sin \theta) + K_2 r^3 \cos \theta$$

若认为 $R = C_2 r^3$ 则:

$$C_1 K_1 \cos \theta = 12 C_2 \lambda_0 \Theta + \frac{C_2 \lambda_0}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\Theta' \sin \theta) + K_2 \cos \theta \quad (19)$$

通过观察可知其一个特解是余弦函数, 令: $\Theta = C_3 \cos \theta$ 则有:

$$C_1 K_1 \cos \theta = 12 C_2 C_3 \lambda_0 \cos \theta - 2 C_2 C_3 \lambda_0 \cos \theta + K_2 \cos \theta$$

$$\therefore C_3 = (C_1 K_1 - K_2) / 10 C_2 \lambda_0 \quad \Theta = (C_1 K_1 - K_2) \cos \theta / 10 C_2 \lambda_0 \quad (20)$$

$$\vartheta = (C_1 K_1 - K_2) r^3 \cos \theta / 10 \lambda_0 + C_1 t + C_5 \quad (21)$$

该解是非定常解, 初始温度分布也是非均匀的, 但物理上确是可以实现的。由于热物性和内热源不再有分母而温度的分母只是常数, 因此本解不再只适用空心区域。

5.2 非线性方程的解析解

当热物性是温度的函数时, 方程(1)就是非线性的。如果 $\rho C_p = 2k_1 r \vartheta$, $\lambda = 2k_2 r \vartheta$, $q_v = k_3 r \cos \theta$, 则(1)式变为:

$$k_1 r \frac{\partial \vartheta^2}{\partial t} = \frac{k_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \vartheta^2}{\partial r} \right) + \frac{k_2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \vartheta^2}{\partial \theta} \right) + k_3 r \cos \theta \quad (22)$$

令: $\vartheta^2 = R(r)\Theta(\theta) + T(t)$ 有:

$$k_1 r^3 T' = k_2 \Theta \frac{d}{dr} (r^2 R') + \frac{k_2 R}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k_3 r^3 \cos \theta \quad (23)$$

同 5.1 有: $T' = C_1$ 既: $T = C_1 t + C_2$ 代入(23)有:

$$k_1 r^3 C_1 = k_2 \Theta \frac{d}{dr} (r^2 R') + \frac{k_2 R}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k_3 r^3 \cos \theta \quad (24)$$

同 5.1 可令 $R = r^3$ 则有:

则可求得下面一个解析解:

$$k_1 C_1 = 6k_2 \Theta + \frac{k_2}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k_3 \cos \theta \quad (25)$$

当 $k_1 C_1 = 0$ 时, 观察知式 (25) 所对应的齐次方程的一个特解是余弦函数:

$\Theta^* = -k_3/4k_2 \cos \theta$, 根据 (25) 式的结构可知将 Θ^* 加上 $k_1 C_1/6k_2$ 既是 Θ , 所以 $\Theta = -k_3 \cos \theta/4k_2 + k_1 C_1/6k_2$ 故最终的解析解为:

$$\vartheta = \sqrt{(-k_3 \cos \theta/4k_2 + k_1 C_1/6k_2) r^3 + C_1 t + C_2} \quad (26)$$

同 5.1 本解适用于实心区域, 由于热物性随温度的变化, 因此可能比 5.1 的解更接近实际情况。但解的形式较复杂, 将其平方有:

$$\vartheta^2 = (-k_3 \cos \theta/4k_2 + k_1 C_1/6k_2) r^3 + C_1 t + C_2 \quad (27)$$

较之 (26) 式, (27) 式可能更有利于作为校验数值解的标准解。

6 结 论

本文导出了含有内热源的球坐标系下变热物性非正常导热微分方程的若干代数显式解析解, 包括一些几何一元和两个几何二元解, 这些解析解不但具有一定的理论意义; 而且由于其是数学上的严格结果, 可以作为校验同等边界条件下数值解的标准解。

参考文献:

1. 蔡睿贤, 张娜. 变热物性非正常导热方程的一些显式解析解 工程热物学报 2002, 23 (3): 327-329.
2. 蔡睿贤, 张娜. 柱坐标下变热物性非正常轴对称导热方程的解析解 自然科学进展 2002, 12 (11): 1155-1161.
3. 奥齐西克, M. N. 俞昌铭主译. 《热传导》. 北京: 高等教育出版社, 1983.
4. 蔡睿贤, 蒋洪德, 孙春林. 校验叶轮机械三维数值解的某些解析解 工程热物学报 1984, 5 (4): 348-353.

5. 朱士灿等, 离心泵叶轮叶片通流三元流场数值解法的一些研究(与解析解的对比), 工程热物理学报, 1988, 9(3): 242-244.
6. 江尚礼等《数学物理方程讲义》. 第2版 北京:高等教育出版社, 1996.
7. 蔡容贤, 张娜, 何咏梅. 球体内不定常非Fourier导热的一维代数显式解析解 自然科学进展, 1997, 9(1): 71-76.
8. Guo Z, Xu Y. Non-fourier heat conduction in IC chip[J]. ASME J Electronic Packagies, 1995, 117: 174-177.
9. Chester M. Second sound in solid[J]. Physical Review, 1963, 131: 2013-2016.
10. Maurer. M. J. Relaxation model for heat conduction in metal[J]. Journal of Applied Physics, 1969, 40: 5123-5127.
11. Shapiro A H. The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. The Ronald Press Co. New York, 1954.
12. 蔡容贤, 张娜. 生物导热基本方程的一维不定常解析解. 自然科学进展. 1998, 8(3): 331-336.
13. 蔡容贤. 非定常可压等熵流非线性方程显式解析解的推导. 工程热物理学报, 2001, 22(2): 159-162.

有机玻璃热物性准稳态法实验研究

周子民, 曾文辉, 叶良春, 涂娟, 王长宏

中南大学能源与动力工程学院, 湖南长沙, 410083

联系电话: 13203114826 E-mail: wyky2552@yahoo.com.cn

摘要: 基于准稳态法实验原理, 运用精密温度采集设备, 得到有机玻璃试件的热、冷端温升曲线及温差曲线, 由此计算出其导热系数和比热。应用数值方法对测试结果进行了修正。修正后的导热系数和比热均在相关文献推荐范围之内。

关键词: 准稳态法; 热物性; 导热系数; 比热; 数值方法

1 引言

导热系数是材料的重要热物性参数, 因此, 其测量就成为传热学的一个重要的研究方向, 测量方法也在不断发展。近年来, 随着新型材料的不断出现, 对其热物性(特别是导热系数和比热)的测试和研究就变得十分重要^[1]。测量介质热物性的准稳态法是哈工大热工教研室提出的, 被航天部确认为不良导热物质热参数的标准测量方法^[2]。准稳态法具有对热源的选择上要求较低、所需的测定时间短(不需要热稳定时间), 并可降低对试样的保温要求等优点。不足之处在于很难保证实验中的边界条件与理论分析中给定的边界条件相一致, 且难以精确获得所要求的温度变化规律。但由于该法的实用价值, 已经被广泛地应用于工程材料的测试上, 特别是在高温、低温或伴随内部物质传递过程时的材料热物性测试中具有显著的优势。本文采用精密的温度采集设备来记录数据, 很好的获得了采集点的温度规律, 并对实验数据采用了数值仿真的方法进行了修正, 修正后的数据具有较高的可靠性。

2 实验原理及装置

本实验是根据第二类边界条件, 无限大平板的导热问题来设计的。设平板厚度为 2δ , 初始温度为 t_0 , 平板两面受恒定的热流密度 q_c 均匀加热(见图1)。求任何瞬间沿平板厚度方向的温度分布 $t(x, \tau)$ 的导热微分方程式、初始条件和第二类边界条件如下:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\tau=0 \text{ 时: } t(x, \tau) = t_0 \quad (2)$$

$$\text{在平板的加热端, 即 } x=\delta \text{ 时: } \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} + \frac{q_c}{\lambda} = 0 \quad (3)$$

$$\text{在平板的中心面, 即 } x=0 \text{ 时: } \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

根据热平衡原理，在准稳态时，有下列关系：

$$q_c \cdot F = c \cdot \rho \cdot \delta \cdot F \cdot \frac{dt}{d\tau} \quad (5)$$

试样在准稳态时各处温度和时间成线性关系，热端和冷端的温差 Δt 为一定值，由此根据式 (1) ~ (5) 式可导出被测试样的导热系数及比热^[3]：

$$\lambda = \frac{q_c \delta}{2\Delta t} \quad (6)$$

$$c = \frac{q_c}{\rho \cdot \delta \cdot (dt/d\tau)} \quad (7)$$

在式 (1) ~ (7) 中： τ 为时间，s； a 为平板的导温系数， m^2/s ； q_c 为沿 x 方向单个加热器产生的恒定热流密度， W/m^2 ； λ 为被测试样的导热系数， $W/(m \cdot K)$ ； F 为试件的横截面积， m^2 ； c 为被测试样的比热， $J/(kg \cdot K)$ ； δ 为试样厚度，m； Δt 为准稳态时热端和冷端的温差，K； ρ 为试样的密度， kg/m^3 ； $dt/d\tau$ 为准稳态时温升速率， K/s 。

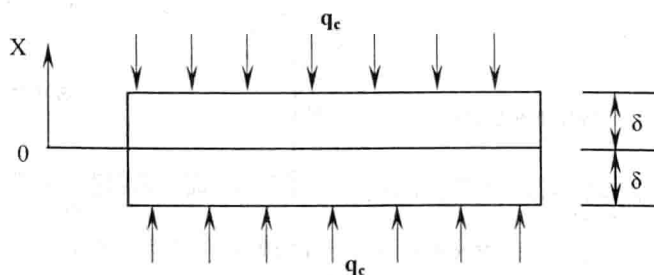


图1 第二类边界条件无限大平板导热的物理模型

按上述理论模型设计的实验装置见图2。有机玻璃试样共四块，尺寸完全相同。在加热过程中，可将试样视为无限大。在试样一、二之间和试样三、四之间采用两个阻值相等的电加热器加热，此时，一个加热器功率就等于稳压电源输出总功率的一半。这样试样二、三就受到两个恒定的热流密度 q_c 的均匀加热。由于电加热器的对称性，实验的精确性也得以较大提高。在绝热层的作用下，试样开始升温并最终至准稳态。在此过程中，在试样一、二之间（热端）和试样二、三之间（冷端）设置两路热电偶，由温度采集设备将热、冷端温度记录下来。