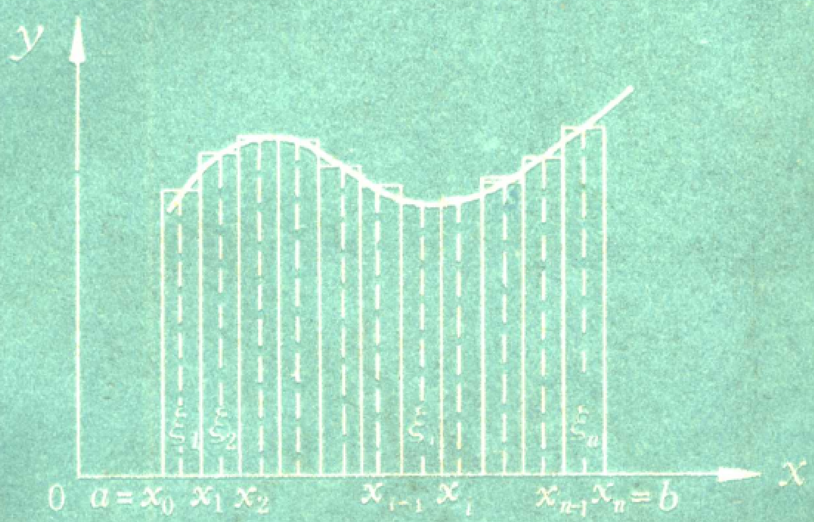
高等数学题解

（上　册）

金延年 张桂芝 黄厚三　编



空军工程学院训练部

高 等 数 学 题 解

上　　册

《高等数学题解》对同济大学数学教研室主编的《高等数学》（1981年修定本）中的全部习题作出了解答。

编写这本《题解》的目的，是为了使读者在独立思考和独立演算的基础上，可以与《题解》进行比较，总结自己的解法优缺点。如果某些习题经反复思考仍有困难，即可从《题解》中找到解答。但是，一定不要过分依赖《题解》，而忽视独立思考。

本《题解》由金延年、张桂芝、黄厚三编写。

目　　录

第一章 函数与极限

习 题 1—1

1．用区间表示变量的变化范围：

（1）$2<x\leqslant 6$；（2）$x\geqslant 0$；（3）$x^2<9$；（4）$|x-3|\leqslant 4$。

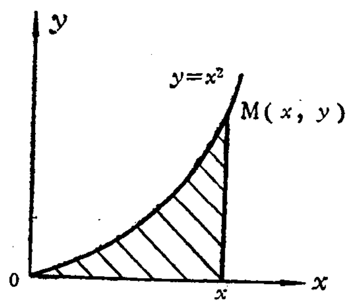
解（1）$(2,6]$；（2）$[0,+\infty)$；

（3）$(-3,3)$；（4）$[-1,7]$。

2．$M(x,y)$是曲线$y=x^2$上的动点，如图所示。

（1）弧$\widehat{OM}$的长度是不是x的函数？

（2）图上阴影部分的面积是不是x的函数？



1—1

解（1）弧$\widehat{OM}$的长度是x的函数。

（2）图1-1阴影部分的面积也是x的函数。

3．下列各题中，函数$f(x)$和$g(x)$是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；（2）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$。

解（1）$f(x)$和$g(x)$不相同。

因为$f(x)$和$g(x)$的定义域不相同。$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$，而$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$。

（2）$f(x)$和$g(x)$不相同。

因为当$x<0$时$f(x)\neq g(x)$。

（3）$f(x)$和$g(x)$相同。

因为$f(x)$和$g(x)$的对应规律及定义域皆相同。

4．求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{1-x}$；（2）$y=\sqrt{3x+2}$；（3）$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

（4）$y=\sqrt{x^2-4}$；（5）$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；（6）$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

（7）$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；（8）$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$。

解（1）$x\neq 1$的全体实数；（2）$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$；

（3）$|x|\neq 1$；（4）$(-\infty,-2]$与$[2,+\infty)$；

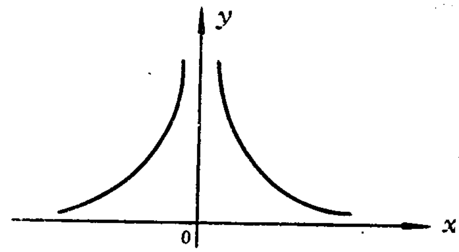
（5）$[-2,-1)$、$(-1,1)$与$(1,+\infty)$；（6）$[-1,0)$与$(0,1]$；

（7） $(-2,2)$；

（8）$(-\infty,1)$、$(1,2)$与$(2,+\infty)$。

5．用描点法作出函数$y=\dfrac{1}{x^2}$的图形。

解



1—2

6．设$f(x)=\sqrt{4+x^2}$。求下列函数值：

$f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$。

解 $f(0)=2$；　　$f(1)=\sqrt{5}$；　　$f(-1)=\sqrt{5}$；

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{|a|}\sqrt{4a^2+1}；\qquad f(x_0)=\sqrt{4+x_0^2}；$$

$$f(x_0+h)=\sqrt{4+(x_0+h)^2}。$$

7．若$f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$，证明$f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$。

证

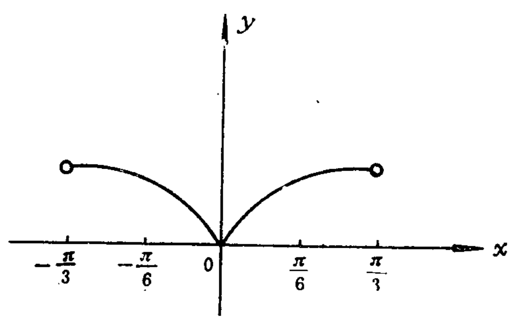
因为　$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{2}{\dfrac{1}{t^2}}+\dfrac{5}{\dfrac{1}{t}}+\dfrac{5}{t}=\dfrac{2}{t^2}+2t^2+5t+\dfrac{5}{t}=f(t)$，

所以　　$f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$。

8．设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数$y=\varphi(x)$的图形。

解　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(-2)=0$。



1—3

9．下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

（1）$y=x^2(1-x^2)$；　（2）$y=3x^2-x^3$；　（3）$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

（4）$y=x(x-1)(x+1)$；　（5）$y=\sin x-\cos x+1$；　（6）$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$。

解（1）$y=x^2(1-x^2)$是偶函数；　（2）$y=3x^2-x^3$是非奇非偶函数；

（3） $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$是偶函数；　　（4） $y=x(x-1)(x+1)$ 是奇函数；

（5） $y=\sin x-\cos x+1$是非奇非偶函数；　　（6） $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$是偶函数。

10．设$f(x)=2x^2+6x-3$，求$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$及 $\phi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并指出$\varphi(x)$及$\phi(x)$中哪个是奇函数哪个是偶函数？

解　$\varphi(x)=\frac{1}{2}[(2x^2+6x-3)+(2x^2-6x-3)]=2x^2-3$，

$\phi(x)=\frac{1}{2}[(2x^2+6x-3)-(2x^2-6x-3)]=6x$，

$\phi(x)$是奇函数，$\varphi(x)$是偶函数。

11．设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$ 上的。证明：

（1） 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

（2） 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数；

（3） 定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

证　设$f_1(x)$和$f_2(x)$是定义在$(-l,l)$上的偶函数，$g_1(x)$和$g_2(x)$是定义在$(-l,l)$上的奇函数。

（1） 设$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，　　$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$。

由于$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=f(x)$

则$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$是偶函数。

由于$g(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-g(x)$

则$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$是奇函数，所以(1)的结论得证。

（2） 设$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，　　$G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$，　　$P(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$。

由于$F(-x\ =f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x)$

则$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$是偶函数。

由于$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x)$，

则$G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$是偶函数。

由于$P(-x)=f_1(-x)\cdot g_1(-x)=-f_1(x)\cdot g_1(x)=-P(x)$，

则$P(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$是奇函数，所以(2)的结论得证。

（3） 设$f(x)$是定义在$(-l,l)$上的任意函数。$f(x)$可以分解成如下两个函数之和，即

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

而函数$\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$是偶函数，函数$\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$是奇函数，所以(3)的结论

得证。

12. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

（1）$y=x^2$，$(-1,0)$；　（2）$y=\lg x$，$(0,+\infty)$；　（3）$y=\sin x$，$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。

解（1）对于$(-1,0)$内任意两点x_1及x_2，且$x_1<x_2$，

有　$x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)<0$，即$x_2^2<x_1^2$。

所以$y=x^2$在$(-1,0)$内是单调减少。

（2）对于$(0,+\infty)$内任意两点x_1及x_2，且$x_1<x_2$，

有　$\lg x_2-\lg x_1=\lg\dfrac{x_2}{x_1}$。

由于$\dfrac{x_2}{x_1}>1$，则$\lg\dfrac{x_2}{x_1}>0$，即$\lg x_2>\lg x_1$，

所以$y=\lg x$在$(0,+\infty)$内是单调增加。

（3）对于$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内任意两点$x_1$及$x_2$，且$x_1<x_2$，

有　$\sin x_2-\sin x_1=2\cos\dfrac{x_2+x_1}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$，即$\sin x_2>\sin x_1$，

所以 $y=\sin x$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内是单调增加。

13. 设$f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数，若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加，证明$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加。

证　设在$(-l,0)$内有任意两点x_1及x_2，且$x_1<x_2$。于是$x_1=-|x_1|$，$x_2=-|x_2|$，则$|x_1|>|x_2|$，并都在$(0,l)$内。

$$f(x_2)-f(x_1)=f(-|x_2|)-f(-|x_1|)=-f(|x_2|)+f(|x_1|)>0,$$

即$f(x_2)>f(x_1)$。

所以$f(x)$在$(-l,0)$内是单调增加。

14. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

（1）$y=\cos(x-2)$；　（2）$y=\cos 4x$；　（3）$y=1+\sin\pi x$；

（4）$y=x\cos x$；　（5）$y=\sin^2 x$。

解（1）$y=\cos(x-2)$是周期函数，周期是2π；

（2）$y=\cos 4x$是周期函数，周期是$\dfrac{\pi}{2}$；

（3）$y=1+\sin\pi x$是周期函数，周期是2；

（4）$y=x\cos x$不是周期函数；

（5）$y=\sin^2 x$是周期函数，周期是π。

15．求下列函数的反函数：

（1） $y=\sqrt[3]{x+1}$；（2） $y=\frac{1-x}{1+x}$；

（3） $y=\frac{ax+b}{cx+d}$，$(ad-bc\neq0)$。又问当 a、b、c、d 满足什么条件时，这反函数与直接函接相同？

解（1）由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得 $x=y^3-1$，
则所求的反函数为 $y=x^3-1$。

（2）由 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 得 $x=\frac{1-y}{1+y}$，

则所求的反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$。

（3）由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$，得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$，

所求的反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$。

要使反函数与直接函数相同，应满足如下条件：

$$a+d=0 \text{ 或 } b=c=0,\ a=d\neq0。$$

习　题 1—2

1．求下列函数的定义域：

（1） $y=\sin\sqrt{x}$；（2） $y=\mathrm{tg}(x+1)$；（3） $y=\arcsin(x-3)$；

（4） $y=\sqrt{3-x}+\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$；（5） $y=\ln(x+1)$；（6） $y=e^{\frac{1}{x}}$。

解（1） $x\geqslant0$，即 $[0,+\infty)$；（2） $x\neq K\pi+\frac{\pi}{2}-1$ $(K=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

（3） $2\leqslant x\leqslant4$，即 $[2,4]$；（4） $x\neq0$ 且 $x\leqslant3$，即 $(-\infty,0)$，$(0,3]$；

（5） $x>-1$，即 $(-1,+\infty)$；（6） $x\neq0$，即 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。

2．设 $f(x)=\arcsin x$。求下列函数值：

$f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f(1)$。

解 $f(0)=0$，$f(-1)=-\frac{\pi}{2}$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$，$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$，$f(1)=\frac{\pi}{2}$。

3．设 $G(x)=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{2}$。求下列函数值：

$G(0)$，$G(1)$，$G(\sqrt{2})$，$G(-\sqrt{3})$，$G(-2)$。

解 $G(0)=\frac{\pi}{4}$，$G(1)=\frac{\pi}{6}$，$G(\sqrt{2})=\frac{\pi}{8}$，$G(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{12}$，$G(-2)=\frac{\pi}{2}$。

4．设$F(x)=e^x$。证明：

（1）$F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$；　　（2）$\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$。

证（1）因为

$$F(x)\cdot F(y)=e^x\cdot e^y=e^{x+y},$$

$$F(x+y)=e^{x+y},$$

所以　$F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$。

（2）因为

$$\frac{F(x)}{F(y)}=\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y},$$

$$F(x-y)=e^{x-y},$$

所以　$\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$。

5．设$G(x)=\ln x$。证明：当$x>0$，$y>0$，下列等式成立：

（1）$G(x)+G(y)=G(xy)$；　　（2）$G(x)-G(y)=G\left(\frac{x}{y}\right)$。

证（1）

因为　$G(x)+G(y)=\ln x+\ln y=\ln(xy)$，

$$G(xy)=\ln(xy),$$

所以　$G(x)+G(y)=G(xy)$。

（2）

因为　$G(x)-G(y)=\ln x-\ln y=\ln\left(\frac{x}{y}\right)$，

$$G\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(\frac{x}{y}\right),$$

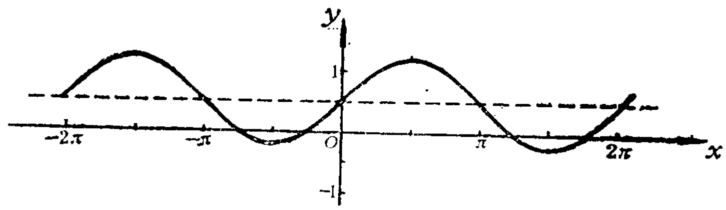
所以　$G(x)-G(y)=G\left(\frac{x}{y}\right)$。

6．利用$y=\sin x$的图形，作出下列函数的图形：

（1）$y=\frac{1}{2}+\sin x$；　　（2）$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；　　（3）$y=3\sin x$；

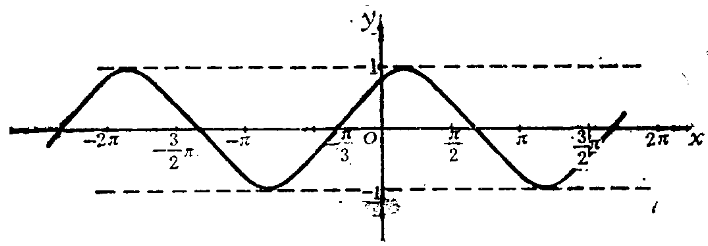
（4）$y=\sin 2x$；　　（5）$y=3\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)$。

解（1）$y=\frac{1}{2}+\sin x$，



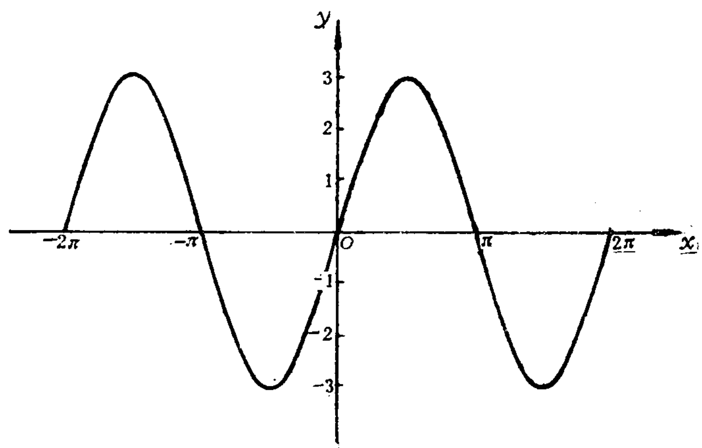
1—4

（2） $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，



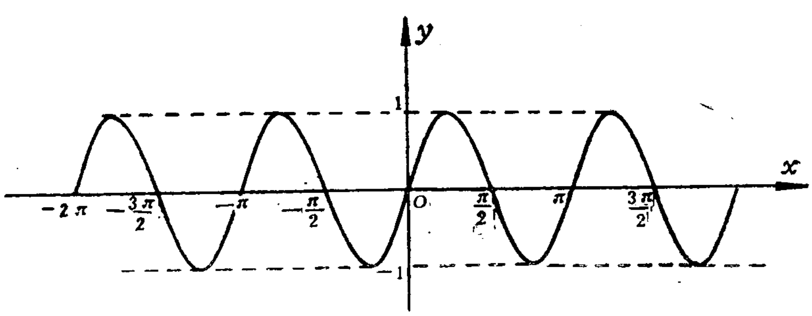
1—5

（3） $y=3\sin x$，



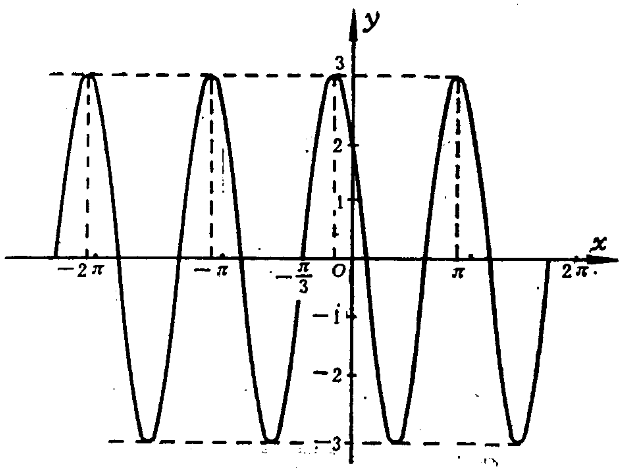
1—6

（4） $y=\sin 2x$，



1—7

（5） $y=3\sin\left(2x+\dfrac{2}{3}\pi\right)$，



1—8

7．利用图形的“叠加”，作下列函数的图形：

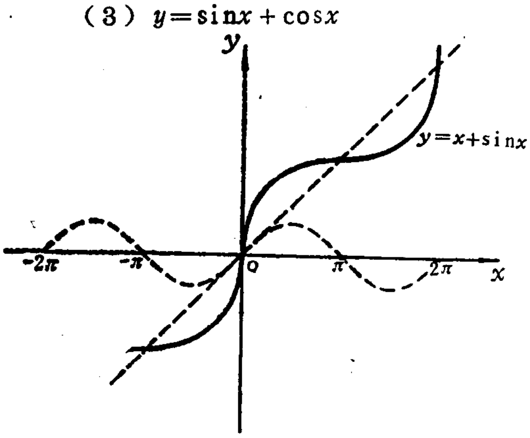
（1） $y=x+\dfrac{1}{x}$；　　（2） $y=x+\sin x$；　　（3） $=\sin x+\cos x$。

解

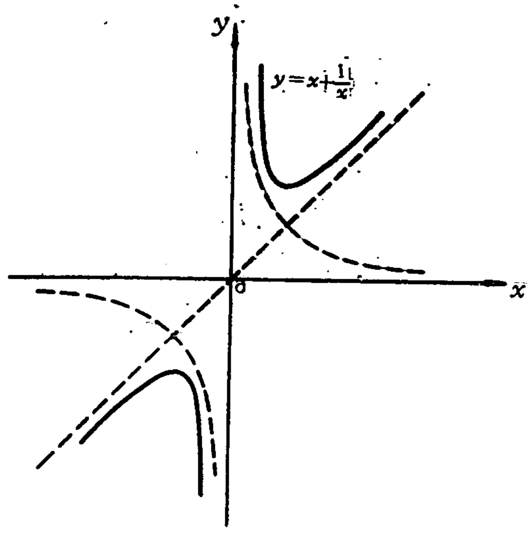
（1） $y=x+\dfrac{1}{x}$，

（2） $y=x+\sin x$

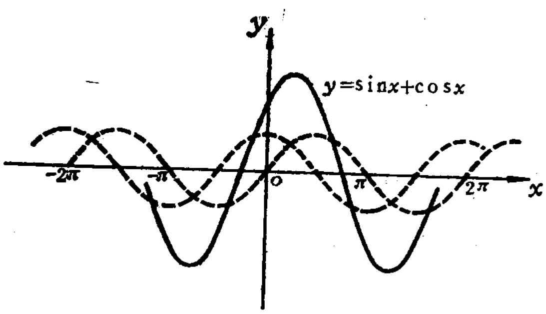
（3） $y=\sin x+\cos x$



1—10



1—9



1—11

8．求下列函数的反函数：

（1）$y=2\sin 3x$；　　（2）$y=1+\ln(x+2)$；　　（3）$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$。

解（1）由$y=2\sin 3x$，得$x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，

所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$；

（2）由$y=1+\ln(x+2)$，得 $x=\dfrac{e^y}{e}-2$，

所求的反函数为 $y=\dfrac{e^x}{e}-2$；

（3）由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，得$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，

所求的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$。

9．在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求这函数分别对应于给定自变量值x_1和x_2的函数值：

（1）$y=u^2, u=\sin x$，$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$；　　（2）$y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\dfrac{\pi}{8}$，

$x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

（3）$y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$；（4）$y=e^u$，$u=x^2$，$x_1=0$，$x_2=1$；

（5）$y=u^2$，$u=e^x$，$x_1=1$，$x_2=-1$。

解（1）$y=\sin^2 x$，$y_1=\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，$y_2=\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2=\dfrac{3}{4}$；

（2）$y=\sin 2x$，$y_1=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；

（3）$y=\sqrt{1+x^2}$，$y_1=\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{5}$；

（4）$y=e^{x^2}$，$y_1=1$，$y_2=e$；

（5）$y=(e^x)^2=e^{2x}$，$y_1=e^2$，$y_2=e^{-2}$；

10．设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，问（1）$f(x^2)$，（2）$f(\sin x)$，（3）$f(x+a)$，$(a>0)$，（4）$f(x+a)+f(x-a)$，$(a>0)$ 的定义域各是什么？

解（1）因为$f(x)$的定义域是$[0,1]$，那末对于函数$f(x^2)$，其定义域应满足$0\leqslant x^2\leqslant 1$，即$-1\leqslant x\leqslant 1$，所以$f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$；

（2）对于函数$f(\sin x)$，其定义域应满足$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，即$2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$，（$n=$

0，±1，±2，…），所以$f(\sin x)$的定义域是$[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

（3）对于函数$f(x+a)$，$(a>0)$，其定义域应满足$0\leqslant x+a\leqslant 1$，即$-a\leqslant x\leqslant 1-a$，所以$f(x+a)$的定义域是$[-a,1-a]$；

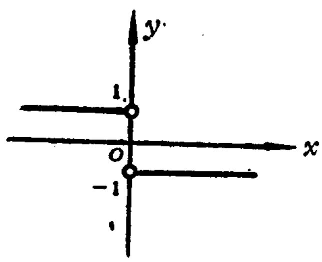
（4）对于函数$f(x+a)+f(x-a)$，$(a>0)$，其定义域应满足$0\leqslant x+a\leqslant 1$及$0\leqslant x-a\leqslant 1$，即$-a\leqslant x\leqslant 1-a$及$a\leqslant x\leqslant 1+a$，所以当$a>\frac{1}{2}$时该函数不存在定义域，当$0<a\leqslant\frac{1}{2}$时该函数定义域是$[a,1-a]$。

11．设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1;\end{cases}$ $\qquad g(x)=e^x$，

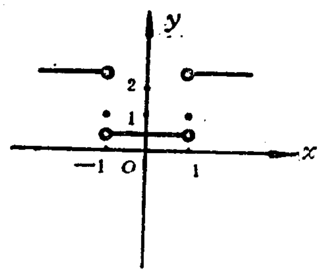
求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形。

解

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0,\end{cases}\qquad g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>0。\end{cases}$$



1—12



1—13

12．证明本节公式（4）、（5）、（6）。

证 现在证明公式（4）$\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y-\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y$。

$$\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y-\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$=\frac{e^{x-y}-e^{-(x-y)}}{2}=\mathrm{sh}(x-y),$$

所以公式（4）成立。

同理可证公式（5）、（6）成立。

13．证明：

（1）$\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}y=2\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\mathrm{ch}\frac{x-y}{2}$；

（2）$\mathrm{ch}x-\mathrm{ch}y=2\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\mathrm{sh}\frac{x-y}{2}$。

证（1） $2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}$

$$=2\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}$$

$$=\frac{e^{x}-e^{-x}+e^{y}-e^{-y}}{2}=\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y,$$

所以（1）式得证。

（2） $2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}$

$$=2\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}-e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}$$

$$=\frac{e^{x}-e^{y}-e^{-y}+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y,$$

所以（2）式得证。

14．已知一物体与地面的摩擦系数是μ，重量是P。设有一与水平方向成α角的拉力F，使物体从静止开始移动（见教材图1-34）。求物体开始移动时拉力F与角α之间的函数关系式。

解 由于$F\cos x=\mu(P-F\sin\alpha)$，

所以$F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$。

15．已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角$\varphi=40^{\circ}$（见教材图1-35）。当过水断面$ABCD$的面积为定值S_0时，求湿周$L(L=AB+BC+CD)$与水深h之间的函数关系式，并说明定义域。

解

$$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos40^{\circ}}{\sin40^{\circ}}h,$$

定义域为 $0<h<\sqrt{S_0\operatorname{tg}40^{\circ}}$。

16．一球的半径为r，作外切于球的圆锥（见教材图1-36），试将其体积表示为高的函数，并说明定义域。

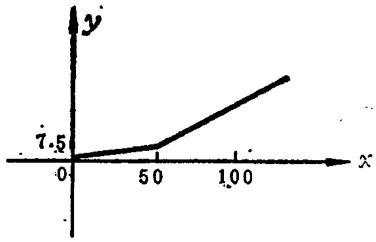
解 $$V=\frac{\pi r^2h^3}{3[(h-r)^2-r^2]},$$

定义域为 $2r<h<+\infty$。

17．火车站收取行李费的规定如下：

当行李不超过50公斤时，按基本运费计算，如从上海到某地每公斤收0.15元。当超过50公斤时，超重部分按每公斤0.25元收费。试求运费y（元）与重量x（公斤）之间的函数关系式，并画出这函数的图形。

解 $y=\begin{cases}0.15x, & x\leqslant 50,\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50。\end{cases}$



1—14

习　题　1—3

1．观察下数列的变化趋势，写出它们的极限：

（1）$x_n=\dfrac{1}{2^n}$；　（2）$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；　（3）$x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$；

（4）$x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；　（5）$x_n=n(-1)^n$。

解（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=2$；　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$；

（5）不存在极限。

2．设$x_n=\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$。问$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$？求出$N$，使当$n>N$时，$x_n$与其极限之差的绝对 值小小正数$\varepsilon$。当$\varepsilon=0.001$时，求出数$N$。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

为了确定N，使当$n>N$时，$|x_n-0|<\varepsilon$，只须 从$\left|\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，解出$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取正整数$N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$即可。

当$\varepsilon=0.001$时，$N=1000$。

3．根据数列限的定义证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$；　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$。