

中国工程热物理学会

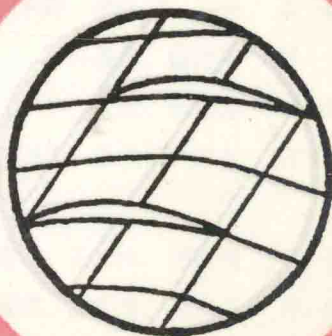
热机气动热力学学术会议

论文集

一九九五

宜昌

中国工程热物理学会编



气 动 目 录

一、无粘、二维、三维流动

叶栅远场条件的确定及其在透平三元设计中的应用	陈宏冀、王正明	I -1-6
二维翼型亚临界定常流动的有限元计算	吕文朝	I -7-6
汽轮机通流部分气动设计中的亚音或超音多级正问题计算方法		
..... 王文生、黄存魁、陈乃兴		I -13-6
Throughflow Model Using 3D Euler or Navjer-stolees Solvers		
..... Zheng Yao 、 Charles Hirsch		I -19-11

二、有粘、二维、三维流动

一种新的 LU 型隐式格式及其应用	袁新	II -1-6
叶轮机械中考虑气体粘性的激波关系	黄修乾、徐建中	II -7-9
应用隐式通量差分分裂格式求解透平叶栅跨音粘流	丰镇平	II -16-8
反弯曲扩压叶栅降低二次流损失的实验研究		
..... 钟兢军、王仲奇、苏杰先、王苇		II -24-6
旋涡的场特征与物质性 — 离散涡方法基础	吴文权	II -30-6
亚跨超音速喷管内流场的整体矢通量分裂算法	刘宇、张振鹏	II -36-6
张量形式的完全 N-S 方程在离心式叶轮机械的三维粘性计算中的应用		
..... 陈育迅、徐燕骥、陈乃兴		II -42-6
用格子 Boltzmann 的 BGK 模型仿真复杂流动	李士明、郑楚光、徐辉	II -48-6
一先进跨音速离心压机叶轮内部粘性流动数值模拟		
..... 赵晓路、温殿忠		II -54-8
关于叶轮机械多级流动模拟的模型讨论	孟庆国、季路成、周盛	II -62-6
迎风型 TVD 格式在高速进气道粘性流动模拟中的应用	刘晶昌、徐建中	II -68-6
渐缩 (扩) 直圆管中的发展流动	黄民、匡震邦	II -74-8
用低 Re 数 K- ϵ 双方程模型模拟跨音者流场	倪明玖、王尚锦、席光	II -82-6
用参数多项式方法求解叶轮机械三维粘性振荡流场		
..... 陈佐一、王若水、井有浩		II -88-5
有旋湍流场中湍流模型应用的研究	叶孟琪、陈义良、蔡晓丹	II -93-6

微重力条件下两不相溶混同轴液柱热毛细对流的渐近解及其数值模拟	李明伟、曾丹苓	II -99-8
考虑了湍流结构方向边界条件的自由射流计算研究	吕盘明	II -107-8
非结构网格在平面叶栅内湍流流动数值模拟中的应用	曾扬兵、沈孟育、王保国	II -115-7
关于反应堆棒束间二次流动的数值研究	蒋莉、沈孟育	II -122-7
用高阶隐式矢量通量分裂格式求解平面叶栅的跨音流动	刘仪、刘斌、向一敏 曹春丽	II -129-6
薄板坯连铸结晶器中钢液三维流动的数值模拟	杨秉俭、苏俊义	II -135-8
多重网格法在叶轮机全三维流场计算中的应用	周倩、陈乃兴	II -143-8
离心压气机级三元粘性计算	赵晓路	II -151-6
非绝热壁叶栅的粘性流动	王正明	II -157-8
用高精度紧致格式求解 NS 方程	陈波、柯红樱、徐建中	II -165-5
圆管内充分发展湍流流动湍流粘性系数 μ_t 的分布	郑珍平	II -170-7
块修正技术在空间三维圆柱坐标系中的应用	郑珍平	II -177-8
三维壁面函数法	郑珍平	II -185-10
采用低雷诺数 $K-\epsilon$ 湍流模型计算二维叶栅流动	朱斌、蔡睿贤、蒋洪德	II -195-6
透平叶栅二维流动特性的数值分析	朱斌、徐星仲、蒋洪德	II -201-5
完全气体一元变截面不定常有传热有摩擦流动的一些解析解	蔡睿贤	II -206-6
弯扭叶片对涡轮三维压力场的影响	冯国泰、刘凤君、顾发华、杨弘、王仲奇	II -212-7
非线性 $K-\epsilon$ 模型的力学实质探讨	赖焕新、张宏波、吴克启	II -219-7
The Analysis of Interrow Mixing Treatment in the Calculation of 3D How in Multistage Turbomachinery	Zheng Yao 、 Charles Hirsh	II -226-8
非轴对称喷管流场及特性数值计算	王新明、赵芝斌	II -234-8
基于曲线坐标系的轴对称湍流流场的数值研究	张靖周、李立国、姜卫星	II -242-6
各阶各向异性 $K-\epsilon$ 模型在二维直通道湍流流场的数值研究	刘正先、宋保军、谷传纲、苗永森、苏莫明	II -248-6

三、非定常流动

计算跨音速压气机 / 静叶排相干三维非定常流场的隐式算法	刘前智、宁卫、姚吉先、周新海	III -1-7
确定使用机匣处理条件的工程诊断技术	周亚峰、郭捷	III -8-7
数值模拟圆柱绕流旋涡运动及尾流稳定性分析	叶春明、吴文权	III -15-8
绕多体不稳定分离流动数值仿真	吴文权、陈有力	III -23-6
喘振主动控制模式的研究	聂超群、陈静宜	III -29-8
振荡旋转叶栅内全三维非定常跨声速流动的变分原理: [一] 势流	刘高联	III -37-4
涡轮静叶周向和轴向弯曲对其气动性能影响的研究	陈乃兴、黄伟光、周倩	III -41-8

四、设计及优化

可控扩散叶型的优化分析	吕文灿、王基	IV -1-6
汽轮机末级弯扭静叶的工程设计方法与实验研究	刘凤君、王仲奇	IV -7-7
叶尖间隙对压缩系统稳定性的影响	曹人靖、陶德平、周盛	IV -14-6
一种“后部加载”型透平静叶的设计	俞斌、谭春青、张伟、蒋洪德、徐星仲、朱斌	IV -20-5

五、实验研究

变截面叶片倾斜及后置叶列对静叶出口流场的影响	韩万今、王仲奇	V -1-6
轴流式弯掠动叶稳定工况气动 - 声学性能的实验研究	蔡娜、钟芳源	V -7-8
轴流式弯掠动叶旋转失速前后变工况气动 - 声学性能的实验研究	蔡娜、钟芳源	V -15-6
方形分离器三维流场的测定	由长福、岳光溪、叶大均、Jens Doerk	V -21-6
IET 跨音速透平平面叶栅风洞调试试验	俞斌、庄平、蒋洪德、谭春青、张伟	V -27-14

六、其他

动态压力畸变下压缩系统稳定性分析	吴虎、廉小纯、陈辅群	VI -1-5
饱和水蒸汽凝结对高炉煤气透平性能影响的研究	黄存魁、厉树廉、葛满初	VI -6-5
热重油管道工艺参数的数值解法	吴明、陆钟武、蔡九菊、张亚明	VI -11-6
轴流式压气机部件气动匹配问题 ^①	章石波、王存诚、蔡可军	VI -17-8

多级轴流压气机内部流场诊断问题的数值解法 张增产、刘杰、叶大均 VI -25-8

轴系扭振与流体激振的关联研究 陈佐一、段源远、井有浩、索沂生 VI -33-6

用谱方法计算超音速反应流 赵烈、潘力均、王发民、于欣 VI -39-7

多级离心压气机变工况性能预估及 S_2 流面矩阵解 秦立森、赵晓路 VI -46-6

冷却透平变工况性能预测 葛满初、齐宗敏、徐进、黄忠明、胡松岩 VI -52-7

叶栅远场条件的确定及其 在透平三元设计中的应用

陈宏冀 王正明
中国科学院工程热物理所

摘 要

在一个透平的可控涡三元设计中,对于一个 S_2 流面计算后确定 S_1 回转流面计算所需孤立叶片排上、下游远场条件的问题和常用方法进行了分析、思考,采用了另一种做法,放弃了一些非必要、非本质的要求,能够更好地满足本质的、有用的要求。计算试验表明该方法简便可行。

一、引 言

在叶轮机三元设计中一个 S_2 流面与多个回转 S_1 流面的迭代计算有着重要地位。由于 S_2 反问题计算中可以不用受过去等环流型、等反动度流型等的约束而方便地采用所谓可控涡流型,就有了更大的自由度去综合地、全面地优化叶片间隙站气流参数的分布,即使在某些按传统流型无法设计的苛刻条件下也可能做出较好的设计。而将 S_1 流面近似为回转面则在大为方便和简化了设计工作的同时,一般仅带来与准确的翘曲 S_1 流面相比不大的、工程上可接受的误差。一个 S_2 流面与多个回转 S_1 流面的迭代既可单独构成既符合当前技术发展水平、又能达到良好性能的、应用广泛的准三元设计方法,又可作为全三元设计的一个组成部分。

像在平面叶栅情况一样,在回转面叶栅的情况,不论是计算还是实验,通常处理的都是带有上、下游相当远处均匀气流条件的单排叶片,而包含了动静交错多排叶片的 S_2 反问题计算只能给出每排叶片前、后间隙站的气流条件(首、末排除外),因此如何确定所需的孤立叶片排上、下游远场条件是工作中一个不可缺少的环节。过去有的作法显得粗糙、简陋,如直接就把 S_2 计算得到的前、后间隙站的气流状态当作孤立叶片排远处的进、出气条件,相当于将流线从间隙站平行于轴线向前、后方延伸。自文献[1]开始对问题加以了认真考虑和对待,它提出了一种较为准确的方法。在其影响、启发下,后来又出现了几种有所不同的具体处理方法^[2,3,4],其中包括文献[1]作者之一参与的对原方法的改动。

我们在完成一项透平设计任务中,再次对问题作了深入思考,发现若采用另一种颇简单的处理方法,放弃一些非必要、非本质的要求,能够更好地满足本质的、有用的要求。

二、分析思考

直接把间隙站的气流状态平直地拉到远方的进、出口,因为根本不进行什么计算,方法是最简单了。但试用表明误差相当大^[1,4]。原因可能是这样几个:第一除了上、下游的流线是平直地延伸的外,延伸段回转面流片厚度的值也须正确地由间隙站取得,否则进、出气状态是不对的;第二在间隙站本来倾斜的流线与延伸的平直流线的连接处有突然折转,会对回转流面的流场产生较大扰动;第三若如文献[4]所试验的那样再用上述进、出气条件进行一次包含单排叶片及上、下游延伸段的 s_2 计算,则流线消除了不光滑,但在叶片段和间隙站将与原来的有较大的不同,流动参数也就变了。

文献[1]中远方进、出口气流状态是以叶片前、后间隙站的气流状态为边界条件分别对上、下游原流道拿掉了其他叶片排形成的空段进行 s_2 计算得到的(图1),这种推算当然是可靠的;而后再进行包含单排叶片和前、后空段的 s_2 计算以提供回转 s_1 流面计算或实验要用的流面形状和流片厚度,这时的在叶片段及间隙站的流线及其他流动参数与原来相比,在压气机的情况可以说基本不变^[1],但在透平的情况,据文献[2—4]说,变化就嫌大了。为此文献[2,4]将空段中本应等于1的叶片周向角厚度对通流截面的影响系数 f 改为可任意调整的量,作为使流线恢复原位的手段,不过此法似乎很不便利。文献[3,4]中的一个较好的办法是不进行最后的叶片段加空段的统一 s_2 计算,而把叶片段中原来多排 s_2 计算结果与空段 s_2 计算结果拼接起来提供给 s_1 流面。这个办法可作为说明用比较简单的方法取得较好效果的可能性的例子。

这几种方法各有特点,然而由于属于 s_2 计算本身特性的原因,却总是有人们希望满足的要求不能满足。假定求解的是流函数方程,流速的子午面分量也不超声速,则根据定解问题的适定性应在边界上处处规定流函数的一个条件。当对间隙站上、下游的空段做 s_2 计算时,尽管希望多排叶片 s_2 计算时得到的间隙站的所有流动参数都被保持不变,却是做不到的;因为若在此处给定了流函数的第一类边界条件就不能同时给定第二类边界条件了,结果是流线的位置正确了,斜率就不能同时保证;反之若不给定第一类边界条件而给定别的条件,则流线的位置就不能保证了。由此可知若要将空段计算的流线与叶片段原来的流线在间隙站拼接起来,则保证了流线的连续就保证不了其光滑。还可知由于流函数在间隙站不是本身不连续就是导数不连续,三段中流函数的值拼起来肯定不是整个区域上的微分方程的解;而对叶片段加空段做统一的 s_2 计算得到的流函数分布却是这样的解,必与前者不同,因此叶片段内和间隙站的气流参数就变掉了。当然所述这些不连续、不光滑、参数差异等的存在是原则上的,其程度并不总是严重的,且与具体问题如是压气机还是透平有关,程度轻时亦可接受,因此几种方法均有一定适用场合。

从所有这些情况可以看到的一件事是,能够得到满足的要求的个数有限,过多了则不能全部满足。但是下面几个最基本的要求我们认为是不应放弃追求的:第一是多排叶片 s_2 计算得到的叶片段中的流线和间隙站的气流状态保持不变,第二是子午面上延伸的空段中的流线与叶片段中的流线在间隙站光滑、自然地过渡, s_1 流片厚度分布也是光滑过渡,第三是对这样的延伸段正确推算上、下游远方的气流状态。

三、采用方法

我们采用的方法看起来相当简单,但却全部满足了三条基本要求。具体如下:叶片段内至间隙站严格采用多排 S_2 计算所得的流线形状、位置和 S_1 流片厚度,将所要处理的 S_1 流面所对应的流线自间隙站分别向上、下游光滑地延伸至足够远处,其斜率由间隙站的值逐渐变化到零, S_1 回转面的流片厚度也从间隙站的值逐渐过渡到远方的值,这样就确定了计算或实验用的孤立叶片排的 S_1 回转流面的全部几何数据。上、下游远方进、出气边界上的均匀气流参数利用间隙站的参数及下列关系推算得出:

$$\text{流量不变,即 } \rho W_l f r \tau = \text{常数} \quad (1)$$

$$\text{总焓不变,即 } H = \text{常数} \quad (2)$$

$$\text{动量矩不变,即 } V_\theta r = \text{常数} \quad (3)$$

$$\text{熵不变,可表示为 } \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{H_2 - V_2^2/2}{H_1 - V_1^2/2} \right)^{1/(k-1)} \quad (4)$$

其中 W_l 是速度的子午面分量,间隙站的 f 是 S_2 计算时采用的叶片周向角厚度对通流截面的影响系数, $f r$ 则为线厚度系数,在无叶片的上、下游远方 f 等于 1。按通常作法,在远方进、出口若 τ 已知,则 ρ, W_l 需在式(1)、(4)间迭代求解;本方法既然以简单为一特点,索性连此迭代也予以避免,这就是先给定 W_l 在适当范围内的一个值,然后依次用式(4)求 ρ 、用式(1)求 τ 即可。

本方法的一个明显特点是延伸的流线不是经 S_2 计算而得出、叶片段中的流线也不经过 S_2 重新计算,这既是本方法非常简单的原因,也恰是因此才没有什么困难地同时满足了第一、二条基本要求。那么因此而使我们少得到的是什么呢? S_2 计算除了给出沿流线气流参数的变化外,给出流线的分布的实质是满足径向平衡;而 S_1 流面的几何数据取自 S_2 这样的计算结果,则最后得到的就不仅是每个 S_1 流面上满足叶片到叶片方向的平衡的流场,而且是相互之间满足动力学平衡的这些 S_1 流场组成的三元流场了。在对 S_1 流面上单独一排叶片进行计算或实验时,实际是用了经过无叶区——叶片区——无叶区的另一个流动代替原来前、后都要经过其他叶片的那个流动,只是要尽量使叶片区的流动与原来的流动相同。我们方法中之所以让叶片区的子午面流线和 S_1 流片厚度不变、让远处进出气参数与间隙站气流参数能够互推就是为此。对每排叶片都这样做了,多排 S_2 计算得到的整个机器从进口到出口的径向平衡就得以保持了。而假想的无叶区中的流线等与此事无关,因此可以径向平衡也可以不径向平衡,只用考虑怎样能使叶片区的流动与前后有其他叶片时更为符合,比如使其与叶片区衔接光滑、过渡自然从而避免额外的扰动。顺便指出,在其他方法里无叶空段的 f 任意变动后 S_2 计算也不是得到真实的径向平衡,空段 S_2 解与叶片段 S_2 解在间隙站的不完全光滑的拼接处也局部地不满足径向平衡。我们明确地放弃了无叶区的径向平衡,于是可以一个个互不相干地以方便的方式对每个 S_1 流面进行处理。至于无叶区的任意性,本是存在的,多种不同方法得到有所不同的无叶区不也是任意性吗?其实它本来就是假想的,怎能确定哪种是唯一正确的呢?

四、应用实例

我们使用上述方法是在一个二级燃气动力透平的设计中。该透平流量 66.5 kg/s , 透平进口总温 838°K , 总压 225 kPa , 转速 3000 转/分 。以一个尺寸可比的国外某著名型号透平的设计水平为对照、参考。热力计算得透平总焓降约 154 千焦/kg , 而对照机型(带出口导叶)的平均级焓降约 75 千焦/kg , 考虑到我们的转速比对照机型的 3600 转/分 低, 实际上负荷高于对照机型。尤其是我们所做的一个不带出口导叶的方案, 为了动叶后排气方向和内径处反动度较好, 第二级的作功能力受到很大限制, 第一级的负荷就更高了。但是由于充分发挥 S_2 反问题中使用可控涡流型的潜力, 通过多次精心调整几个间隙站环量的分配和沿径向分布(图 2), 达到了第一级内径处作功 94.2 千焦/kg 、反动度为 0.17 、第二级内径处作功 59.5 千焦/kg 、反动度为 0.12 (图 3)、二级总作功量沿径向不变、末级排气很接近轴向的较满意结果。此外与对照机型相比, $V_{\theta}r$ 沿径向变化较小, 动叶顶部前后压差较小(有利于减少漏气), 叶片出气角较大, 叶片扭转小得多(图 4)。考虑到 M 数稍高、间隙站有两点超过 0.8 (有流量比对照机的大的因素)和内径处反动度较低, 又设计了带出口导叶的方案供选择。由于第二级的作功能力提高了, 条件就较宽松了, 设计结果是两级负荷近似平均分配, 内径处反动度提高到 0.41 以上, 叶片出气 M 数不大于 0.7 (图 5), 其他各方面也有进一步改善。

(图 7)是使用本文方法确定上、下游远场条件后进行的一系列 S_1 流面问题计算的结果中的一个, 是带出口导叶方案中第一级静叶偏内径处的截面的叶面 M 数, 该回转面有较大的扩张角(图 6), 气流折转角为 57° , 叶面马赫数最高为 0.9 。为了看看延伸回转面的不同对计算结果的影响, 也为了增强对使用本方法的信心, 在上面计算(以“a”标记)的基础上又作了如下试验(图 7): 计算 b 是将原来 a 的流线延伸 8 站后变为水平改为延伸 13 站才变为水平, 因而无叶区回转面形状不同, S_1 计算结果只有很微小的差别。计算 c 是将延伸段的 S_1 流片厚度改变了约 10% , 从图中也看不出计算结果的差别, 实际上所有的点最大的 M 数之差为千分之几量级。这个试验进一步说明了合理延伸的回转面的几何参数有些差别, 对计算结果的影响很小, 本方法是一种简便可行的方法。

参考文献

- [1] 吴仲华、朱根兴: “去掉上、下游叶片排后‘孤立’叶片排的叶栅实验和 S_1 流面计算中, 上、下游条件的确定”, 工程热物理学报, 4, 1, (1983)。
- [2] 葛满初、于政惕、楼一平: “透平三元理论及其设计方法”, 工程热物理所科研报告, (1983)。
- [3] 楼一平、于政惕、朱根兴、汪庆桓、张英华、王斌: “6000HP 级动力透平准三元设计的验算”, 工程热物理所科研报告, (1984)。
- [4] 楼一平、葛满初: “透平准三元设计中 S_2 流面计算探讨”, 工程热物理学报, 7, 4, (1986)。

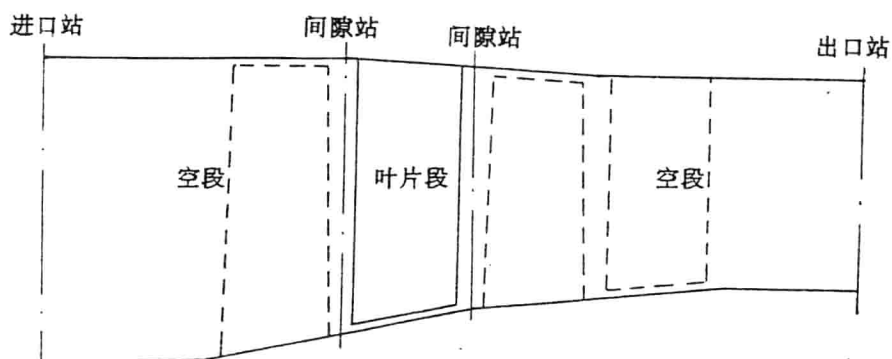


图1 孤立叶片排示意图

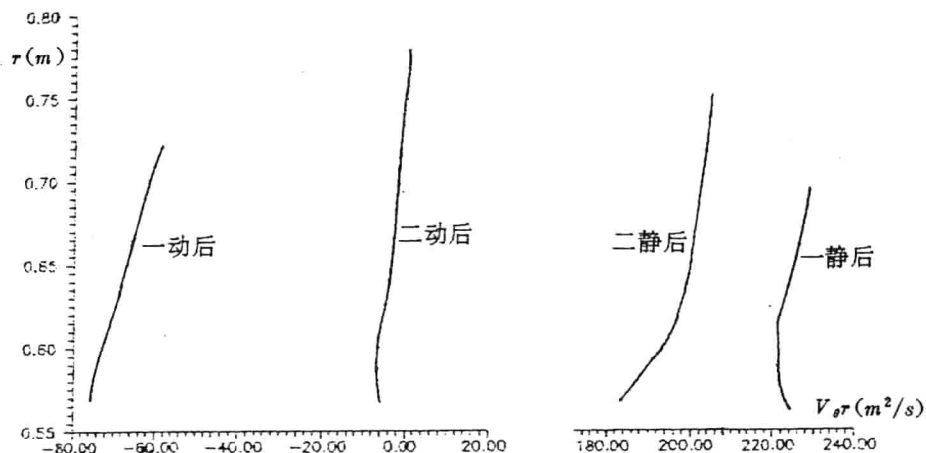


图2 间隙站的 $V_{\theta}r$ (无导叶方案)

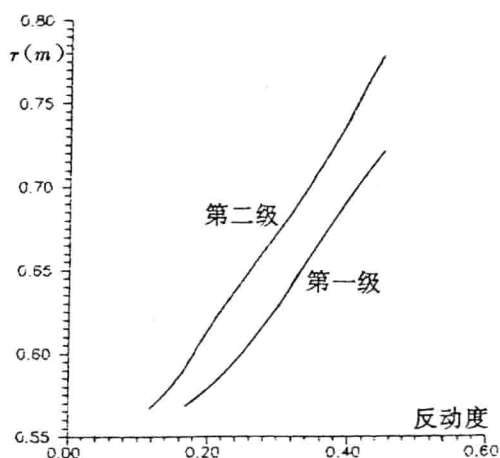


图3 反动度沿径向的变化(无导叶方案)

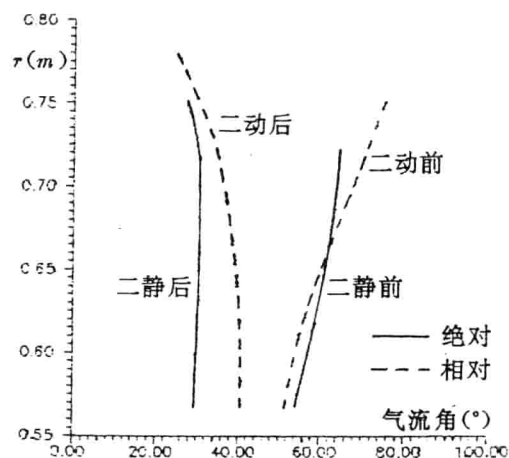


图4 气流角沿径向的变化(无导叶方案)

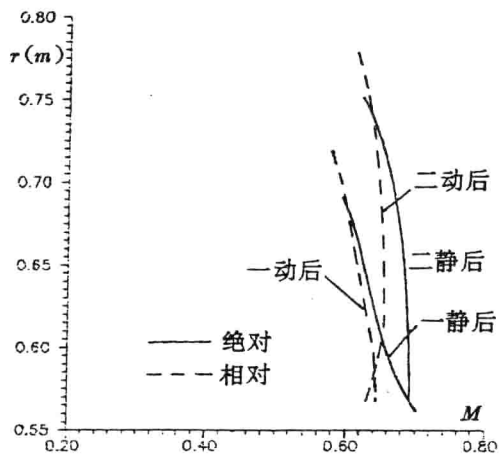


图 5 气流 M 数沿径向的变化(有导叶方案)

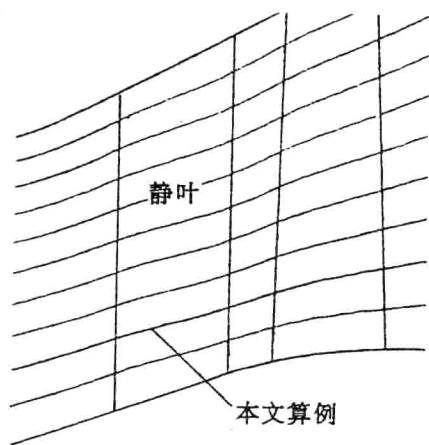


图 6 第一级静叶及流线在子午面上的投影

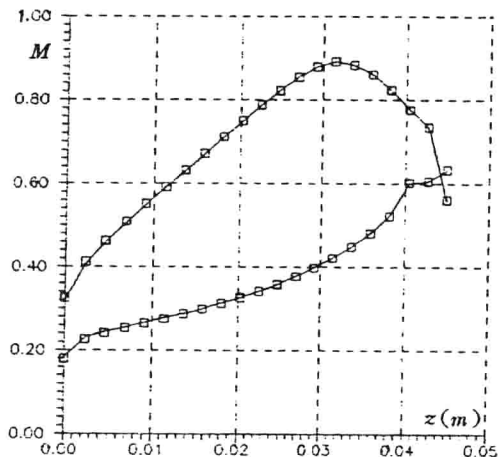
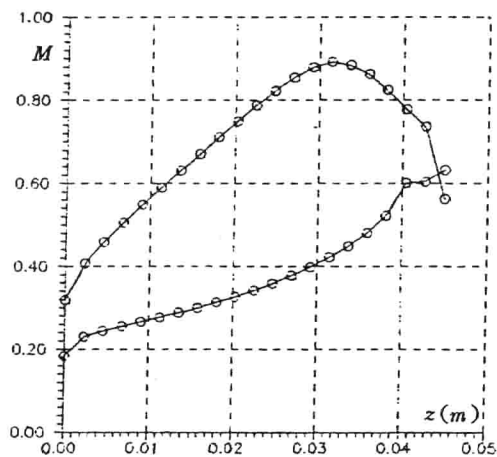


图 7 回转面上单排叶栅的 S_1 计算结果

—— 计算 a $\circ$ 计算 b $\square$ 计算 c

二维翼型亚临界定常流动的有限元计算

吕 文 朝

中国科学技术大学热科学和能源工程系

[摘要] 本文使用了曲四边形 Hermite 等参元,通过变分有限元法,计算了二维翼型亚临界定常位势流动中的压力分布,数值计算结果与试验结果符合较好。文中还使用了有限元法中的局部线性化理论,插值出元素中心点密度去处理迭代过程中元素系数阵的计算,其结果与通常的有限元法计算相一致,但计算时间却大大减少了。

关键词: Hermite 等参元,元素中心点密度,变分有限元法,有限元法局部线性化理论

一、理论分析

二维翼型定常跨音流场的有限元计算,大都基于小扰动理论导出的位势方程。文献[1]计算了跨音流场,文献[2]使用矩形 Hermite 元素计算了亚临界流动,本文基于全位势理论,使用了文献[3]提出的 Hermite 等参元进行了亚临界流动计算。

1.1 二维可压缩位势流场的变分原理

在二维流场中,理想气体作定常、绝热、无粘流动时,在求解域 Ω 上,气体微分方程组的解等价于下列泛函取驻值,即

$$I(\phi) = \iint_{\Omega} \bar{P}/K dx dy + \int_{C_1+C_2+C_3} (q_n)_{pr} \phi ds \quad (1)$$

式中 ϕ 为位势函数, K 为比热比, $\bar{P} = P/P_0 = [1 - \frac{K-1}{2}(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)]^{\frac{1}{K-1}}$, $\lambda_x = \phi_x =$

u/a_0 , $\lambda_y = \phi_y = v/a_0$, u 和 v 为速度分别在 x 、 y 轴上的分量, $a_0 = \sqrt{KRT_0}$, $q_n = \rho\lambda_n$, λ_n 为边界法向无量纲速度分量, P 、 ρ 、 T 分别表示压力、密度和温度。角标“0”表示滞止参数, pr 表示规定值。

所满足的边界条件是(图1): C_1 上,由于进出口流动均匀,则 $(q_n)_{pr1} = -\bar{\rho}_1\lambda_{1x}$, $(q_n)_{pr2} = \bar{\rho}_2\lambda_{2x}$; C_2 上, $\lambda_n = 0$, $q_n = 0$; C_3 上, $\lambda_n = 0$ 即为 $\lambda_y = 0$, $q_n = 0$ 。 C_2 和 C_3 上为自然边界条件,计算过程中将自动满足,这是有限元法在计算这类流场时的优越性之一。

1.2 变分公式的有限元展开

双圆弧翼型为对称的,且来流为零攻角,计算区域只考虑上半平面,今取长为 $31C$,高为 $15C$ (C 为翼型弦长)的矩形为求解域 Ω (图1),对于矩形域取用四边形元素较为有利(图2)。计算使用了两类网格,一类是除了边界 C_2 外,其余 x 向分割线都是与坐标轴 x 平行的直线,这类网格用 ms 表示;另一类是紧挨 C_2 边界的一条 x 向分割线与 C_2 边界平行(图1),其余 x 向分割线仍为直线,这类网格用 mc 表示。两类网格 y 向分割线都与 y 轴平

行。

Hermite 等参元的形状函数 N_i^* 的形式及与此有关的计算请参阅[4]。

式(1)经过适当数学推导即可得到元素上的有限元表达式为

$$[K]^e \{\emptyset\}^e = \{F\}^e \quad (2)$$

式中

$$[K]_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_j^*}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_j^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^*}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^*}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_j^*}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_j^*}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^*}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^*}{\partial \xi} \right) \right] \bar{\rho} / J d\xi d\eta \quad (2a)$$

$J = \partial(x, y) / \partial(\xi, \eta)$ 为雅可比矩阵

$$\{F\}^e = \int_{-1}^1 (q_n)_{nn} N_i^* \left(\sum_{j=1}^{12} \frac{\partial N_j^*}{\partial \eta} y_j \right) d\eta \quad (2b)$$

当元素的边界不落在 C_1 上时, (2b) 式为零。

从式(2a)可以看出, 如果密度 $\bar{\rho}$ 取为元素中心点的密度 $\bar{\rho}_0$, 视为常数提到积分号外, 则有^{[5], [6]}

$$[K]^e = \bar{\rho}_0 [A]^e \quad (3)$$

由式(2a)可以得出, 元素系数阵 $[A]^e$ 只与几何参数有关, 对固定网格, 它是不变的, 由于 $[A]^e$ ($[K]^e$ 也一样) 是对称的, 在迭代之前首先计算出每个元素的上三角阵并储存起来, 在迭代过程中, 每个元素节点参数在变, 插值出的 $\bar{\rho}_0$ 值也在变, 由式(3)求出 $[K]^e$, 这样就避免了元素系数阵式(2a)在迭代过程中的重复计算, 因此就可大大减少了计算时间, 迭代次数越多, 这种优越性越突出。

然后对整个求解域上的元素系数阵进行汇集, 并记 $[K] = \sum_e [K]^e$, $\{F\} = \sum_e \{F\}^e$, 最终得到方程组

$$[K] \{\emptyset\} = \{F\} \quad (4)$$

$[K]$ 为一带状稀疏阵, 用块迭代法可同时解出节点未知数 $\emptyset$, λ_x 和 λ_y , 进而求出节点密度 $\bar{\rho}$ 及 $\bar{\rho}_x$ 和 $\bar{\rho}_y$, 就可插值出元素中心点 ($\xi = \eta = 0$) 的密度 $\bar{\rho}_0$ 。

1.3 边界条件的处理

Hermite 元素增加了节点未知数, 这给边界条件的处理带来灵活性。 C_2 上按自然边界条件处理, 对于 C_1 和 C_3 上使用了下面几种处理方法。

BC₁ C_3 上同 C_2 ; C_1 上用式(2b)计算给定。

BC₂ 按本质边界条件用强加办法给定。进口截面各节点为 $\lambda_{ix} = \lambda_{1x}$, $\lambda_{iy} = 0$, $\emptyset_i = x_1 \lambda_{1x}$, x_1 为进口站坐标值; 出口站各节点为 $\lambda_{ix} = \lambda_{1x}$, $\lambda_{iy} = 0$, $\emptyset_i = x_2 \lambda_{1x}$, x_2 为出口站坐标值; C_3 上各节点为 $\lambda_{ix} = \lambda_{1x}$, $\lambda_{iy} = 0$, $\emptyset_i = x_i \lambda_{1x}$, x_i 为各节点的坐标值。

BC₃ C_3 上同 C_2 ; C_1 上同 BC₂。

BC₄ 对于 λ_x 和 λ_y , 在 C_1 和 C_3 上同 BC₂, 对于 $\emptyset$, 在 C_1 上用式(2b)计算给定, 在 C_3 上不与处理而求解出来。

二、计算结果和讨论

为了检验本方法的精度和效率,本文以有实验结果的 6% 相对厚度的对称双圆弧翼型亚临界流动进行了试算^[7]。使用式(2a)的通常有限元法计算结果用字母 L 表示,使用式(3)的元素中心点密度法计算结果用字母 Q 表示。

首先用 L 法对同一网格同一 M_∞ 值取用不同处理边界条件的方法进行了计算,结果列在表 1 中,比较 BC_1 和 BC_2 的结果可知,在边界上如果知道了节点未知数的值,应尽量采用赋值的办法来处理, BC_2 的精度比 BC_1 的精度高,迭代次数 ν 反而少了,计算时间也短了;比较 BC_2 、 BC_3 和 BC_4 结果可知,迭代次数和计算时间相差不多,但从压力系数 C_p 值的分布看, BC_4 更好些,特别对于高 M_∞ 数,本文计算的是亚临界流动,在计算中用 BC_4 的办法处理边界条件。

在计算中使用了下面几种网格: ms_1 24×47 (11)节点,括号中的数表示翼型区 x 向站数(包含前后驻点站); ms_2 24×51 (13)节点,在 ms_1 网格的驻点前后各加一站; mc_1 24×51 (13)节点,由 ms_2 网格变来,这样使翼型上的元素在 y 向尺寸比直线分割可取得更小些; mc_2 24×55 (17)节点。

在迭代过程中,精度用节点密度来判别即 $|\bar{\rho}^\nu - \bar{\rho}^{\nu-1}| / \bar{\rho}^{\nu-1} \leq \epsilon$, $\epsilon = 0.001$;取松弛因子 $\omega = 0.5$,L 法中对节点密度进行松弛,而 Q 法中则对元素中心点密度进行松弛。

对同一流场分别用 L 法和 Q 法去计算,其结果的吻合程度也进行了分析比较,结果列在表 2 中,衡量标准为同一节点上两种方法计算出的 M 数的相对差值即 $\Delta M = |1 - M_Q/M_L|$,Q 法用 ms_1 和 ms_2 网格计算中与 L 法 ms_1 网格节点全能重合上, $\Delta M_{\max}$ 是重合点上求出的 ΔM 最大值,它都位于驻点上, $\Delta \bar{M}_{\max}$ 是除去驻点后其余重合点上的 ΔM 最大值,它都位于挨着驻点上面的这一节点上, $\Delta \bar{M}_{\max}$ 比 $\Delta M_{\max}$ 有明显降低,这一结果表明,只要控制住驻点上 ΔM 满足要求,L 和 Q 法对同一流场的计算结果被认为是一致的,而且随着网格加密, $\Delta \bar{M}_{\max}$ 是在减小的。对于 Q 法使用 mc 网格的计算,与 L 法网格不重合节点较多,根据 ms 网格计算的结果,取前、后驻点上 ΔM 较大值为 $\Delta M_{\max}$ 。

表 3 给出了两个高 M_∞ 来流和 L、Q 法计算对比,计算结果表明,在翼型上出现了超音区,但还没有出现激波,由于流场性质的变化,在 L 法计算中精度降低了, $\epsilon = 0.003$ 都达不到,计算中取用 $\epsilon = 0.0045$,但是当 $\epsilon = 0.004$ 时计算出的 C_p 值在翼型顶点处比 $\epsilon = 0.0045$ 的 C_p 值还要稍微小一点。而 Q 法中仍能收敛到 $\epsilon = 0.001$ 。

图 3 中,L 法结果用 ms_1 网格计算出,图 3 和图 4 中 Q 法结果用 mc_2 网格计算出,各种 M_∞ 数下计算出的翼型上压力系数 C_p 值都和实验结果符合较好,相比之下,Q 法结果较之 L 法结果符合的更好些。

图 5 给出了 $M_\infty = 0.861$,Q 法(mc_2)计算出的翼型上的超音区。

从表 2 可以看出,对于全亚音流场,Q 法(mc_2)计算时收敛快,迭代次数少,对于不同 M_∞ 数,计算时间 L 法是 Q 法的 4 倍多,而 $\Delta M_{\max} < 0.022$ 。

从表 3 可以看出,在翼型上出现了超音区的情况下,尽管 L 法的收敛精度低了,但计算时间仍为 Q 法的两倍以上,而 $\Delta M_{\max} < 0.029$ 。

从这些计算结果充分说明,尽管可压缩流场中在不同空间位置上气流密度是不相同的,同一空间位置上在迭代过程中密度也在变化;但是,只要把网格划分的合理而且足够

密,元素上的密度趋于均匀是能够满足的。网格越密,元素上密度的均匀性越好,计算结果就越精确,这是有限元法分析可压缩流场时所具有的局部线性化理论的处理方法。

三、结论

1、基于有限元法局部线化理论,在位势流场,通过变分法导出了一种比通常的有限元法较快的计算方法,结果表明该方法简便实用。但 Q 法需把全部元素[A]^{*}的上三角阵储存起来,存储量要比 L 法的大些。

2、在流场分析中使用 Hermite 等参元,计算表明是可行的,结果是满意的。本文计算可用于内、外流动中分析物面气流参数分布和流场内部流动分析,可用到超音区带有微弱激波的流场计算,对于机翼可用于有攻角的情况。

3、使用 Hermite 等参元,节点上待求函数及其对坐标的一阶偏导数将同时解出,给流场求解带来方便,并保证了导数项在节点上是连续的;在同样网格下,较之通常的高阶等参元(节点未知数只有待求函数)可减少节点数。

4、使用 Hermite 等参元,节点未知数增多了,给边界条件的处理带来灵活性,边界上的各种要求更容易满足和处理,使计算结果准确而且省时。

参考文献

[1] Chan, S. T. K. et al., AIAA paper 75-79, 1975.
 [2] 徐守栋,安长发,中国科学技术大学学报,Vol. 16, No. 1, 1986.
 [3] 刘高联,力学学报,4, 1979.
 [4] Webster, W. D., An Isoparametric Finite Element With Nodal Derivatives, J. of Applid Mechanics, Vol. 48, 1981.
 [5] 吕文朝,陈月林,申学宪,中国科学技术大学学报,增刊 I, 1985.
 [6] 吕文朝,上海力学,Vol. 16, No. 2, 1995.
 [7] Kenchtel, E. D., NASA TN D-15, 1959.

表 1

	BC ₁	BC ₂	BC ₂	BC ₃	BC ₄
M _∞	0.704	0.704	0.817	0.817	0.817
ε	0.0005	0.0004	0.001	0.001	0.001
ν	20	18	22	22	23
CPU	1 : 48 : 37.36	1 : 37 : 31.71	1 : 57 : 23.76	2 : 01 : 01.94	2 : 02 : 14.56

表 2

M _∞	0.707					0.817				
	L	Q				L	Q			
	ms ₁	ms ₁	ms ₂	mc ₁	mc ₂	ms ₁	ms ₁	ms ₂	mc ₁	mc ₂
ν	12	7	7	7	8	23	14	16	23	16
CPU	1 : 13 : 46.50	12 : 28.29	13 : 51.07	14 : 37.25	17 : 55.16	2 : 20 : 13.57	27 : 11.56	27 : 38.68	40 : 53.32	32 : 23.70
ΔM _{max}		0.03446	0.01684	0.00624	0.00727		0.05647	0.03007	0.01957	0.02164
ΔM̄ _{max}		0.01866	0.01345				0.03628	0.02397		

表 3

L				Q			
ms_1				mc_2			
M_∞	ν	CPU	ϵ	ν	CPU	ϵ	$\Delta M_{\max}$
0.858	21	2 : 07 : 58.17	0.0045	33	1 : 05 : 00.90	0.001	0.02619
0.861	22	2 : 14 : 50.02	0.0045	31	1 : 02 : 09.12	0.001	0.02897

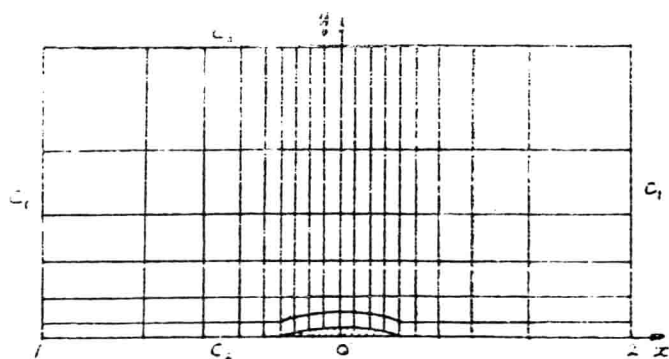


图 1

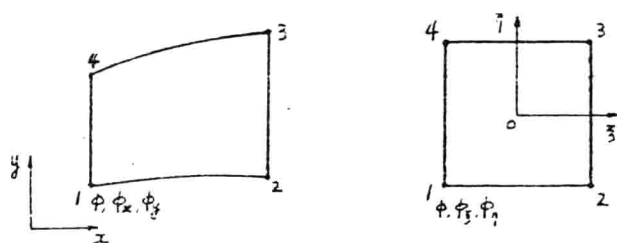
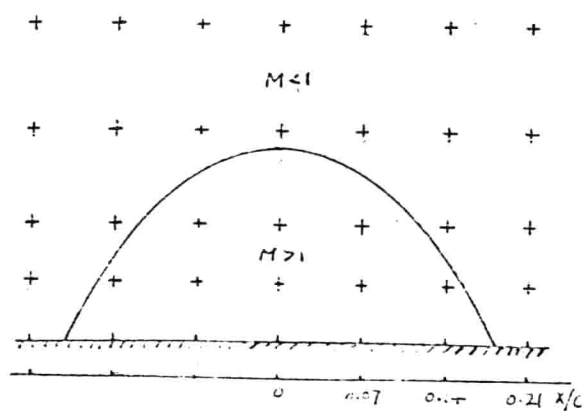


图 2 四边形元素

图 5 翼型表面局部超音区
($Q, mc_2, M_\infty = 0.861$)

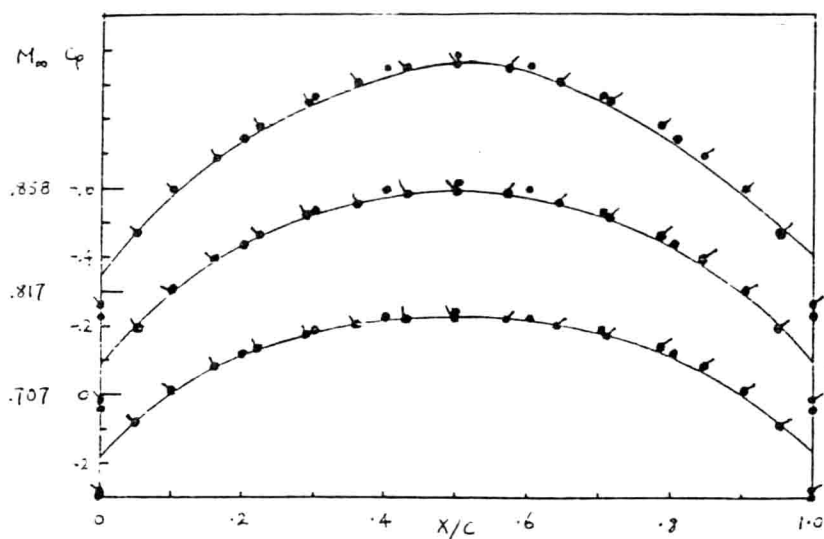


图3 压力系数比较

— Kentchel 实验[7]
 • 本文计算(L, ms_1)
 / 本文计算(Q, mc_2)

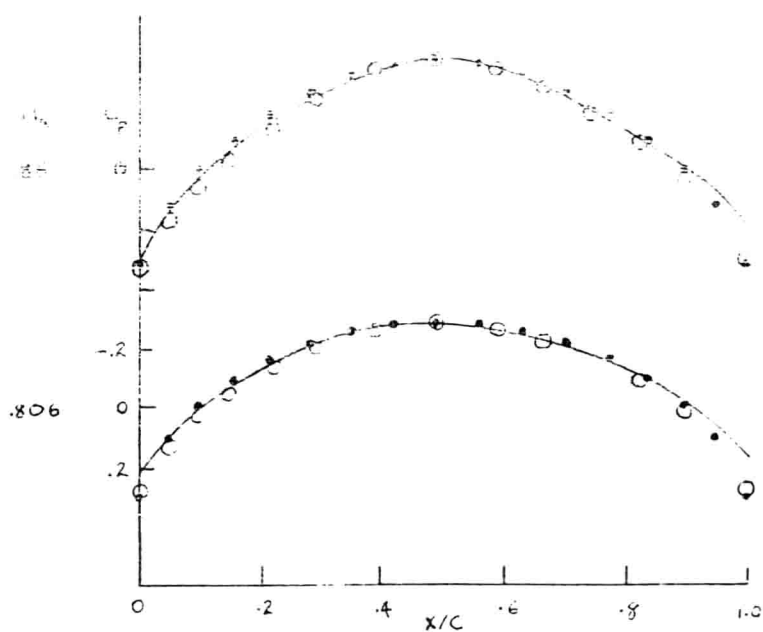


图4 压力系数比较

— Kentchel 实验[7]
 • 本文计算(Q, mc_2)
 ⊙ Chan 计算[1]