多元函数微积分

北京大学数学系高等数学教研室编

1 9 8 0 年3月

前　言

本讲义是在我校数学系高等数学教研室1964年编的“数学分析”基础上修订而成，是继第二分册“一元函数积分学”后的第三分册“多元函数微积分”，它作为我校理科物理类各专业的高等数学试用教材。原讲义是在董怀允同志主持下与高等数学教研室部分同志一起编写而成。在这次修订中，除对多元微分学和重积分修改补充外，增加了空间解析几何和曲线积分、曲面积分与场论两章。本分册由吴良大同志执笔修订，修订过程中，冷生明、邵士敏、戴中维、方企勤、文丽、刘西垣同志分别审阅了部分或全部修订稿。由于我们水平不够和时间仓促，讲义中定有不少缺点和错误，请使用教员和读者批评指正。

1980年 3 月

目　录

第十二章　空间解析几何

空间解析几何与平面解析几何相仿，也是用代数做工具来研究几何图形。也就是说，通过建立空间坐标系，把空间的几何图形用图形上点所满足的代数方程来表示，从而由代数方程的一些性质来研究图形的性质。

本章在建立空间直角坐标系的基础上，先讨论向量代数，然后应用向量代数讨论空间的平面与直线，最后介绍空间的曲面与曲线。

§12.1　空间直角坐标系

我们知道，直线上一个点的位置可以用一个数来刻划，若把此直线作为数轴，这个数就是数轴上该点的坐标；而平面上一个点的位置也可以用平面坐标系上该点的坐标来刻划。由此类推，空间中点的位置可以用空间坐标系中该点的坐标来刻划。

一、空间直角坐标系

在空间中选取一定点O，过O点引三条互相垂直的数轴Ox、Oy、Oz，这就构成了空间直角坐标系。其中O称为坐标原点，Ox、Oy、Oz称为坐标轴，两个坐标轴决定的平面称为坐标平面，分别记作xy、yz、zx平面。

对于空间直角坐标系，我们作如下的规定：如图1.1，将右手沿Ox轴正向到Oy正向握住Oz轴，如果姆指伸开正对Oz轴正向，则称这个坐标系为右手直角坐标系。否则称为左手直角坐标系。习惯上，我们都使用右手直角坐标系。

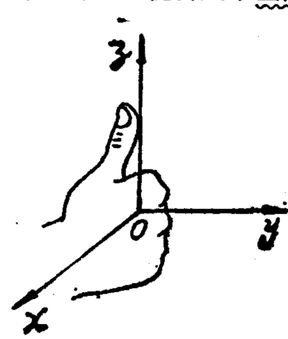

图　1.1

二、点的坐标

在空间建立了直角坐标系后，空间中的任一点就可以用它的三个坐标来表示。设P为空间的一点，过P作分别垂直于x轴、y轴、z轴的三个平面，分别交x、y、z轴于A、B、C三点（图1.2），如果A、B、C三点分别在x、y、z轴上的坐标是x_0、y_0、z_0，则称此有序数组(x_0, y_0, z_0)为P点在所取坐标系的坐标，记作$P(x_0, y_0, z_0)$。其中x_0，y_0、z_0分别叫做P点的x坐标、y坐标、z坐标。反过来，任意给定一有序的三个数(x_0, y_0, z_0)，可以证明，在此坐标系中，以(x_0, y_0, z_0)为坐标的点是唯一的。事实上，在三个坐标轴上分别取x_0、y_0、z_0为坐标的三个点A、B、C，过A、B、C三点分别作垂直于坐标轴的三平面，显然，这三个平面只有一个交点，这个点正是以(x_0, y_0, z_0)为坐标。这样，空间中的点就与一个有序数组(x_0, y_0, z_0)之间建立了一一对应关系。

在建立了空间直角坐标系后，整个空间就被 xy、yz、zx 平面分成八个部分（图1.3）。每一部分称为一个卦限，共有八个卦限。每一卦限中的点，坐标的符号相同。

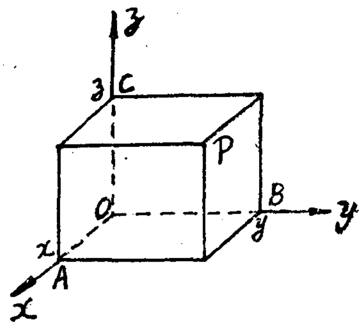

图 1.2

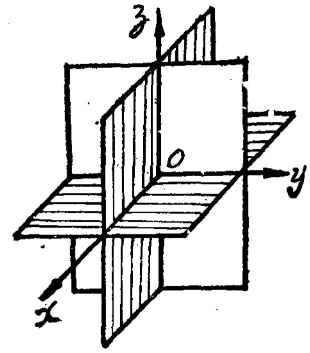

图 1.3

思考题：

1. 坐标原点的坐标是什么？
2. 设 A、B、C 分别在 x、y、z 轴上，问其坐标有何特点？
3. 设 A'、B'、C' 分别在 xy、yz、zx 平面上，问其坐标有何特点？

习　题　一

1. 指出下列各点位置的特殊性质：

1）(4, 0, 0)，　　2）(0, −7, 0)

3）(0, −7, 2)，　　4）(−5, 0, 3)

2. 设空间任意一点 P 的坐标为 (x, y, z)，求由 P 点引至各坐标平面的垂足之坐标，和由 P 点引至各坐标轴的垂足之坐标。

3. 给定空间直角坐标系 $Oxyz$，试在图上标出下列各点的位置：

$$(3, -1, 0),\quad (-1, 2, 1),\quad (0, -2, 3).$$

（提示：在空间直角坐标系中的平行线，在平面图上也要画成平行。画点时，可先在坐标面上找出相应的垂足，再平移一距离。）

4. 已知一个四面体的四个顶点坐标为：

$$(1, -2, 1),\quad (2, 3, -2),\quad (-1, 3, 1),\quad (1, 2, 3)$$

作出这个四面体的图形来。

§12.2　向　量　代　数

一、向量及其表示

在实际问题中，有一种量只有大小，没有方向；例如时间、质量、长度等。它们在取定一个单位后，可以用一个数来表示，这种量叫做数量。另外还有一种量，例如作用在一点的力、位移、速度、加速度等，它们都是既有大小，又有方向的量，为了研究它们共同的特征，

我们把它们抽象出来，就形成向量的概念。

既有大小又有方向的量叫做向量。

向量的两个特征是大小和方向。为了刻划这两个特征，我们用一个有向线段 AB 来表示（图2.1），AB 的长度表示向量的大小，由起点 A 到终点 B 的指向表示方向，记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$

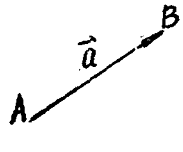

图 2.1

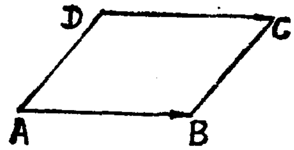

图 2.2

对于向量，我们只考虑大小和方向，因此，凡是大小相等，且方向相同的两个向量，我们叫做相等的。如图 2.2，$ABCD$ 为平行四边形，我们认为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$。因此，一个向量在保持长度和方向的条件下可以自由平移。这样的向量叫做自由向量。

向量 $\vec{a}$ 的长度也叫做它的模，记作 $|\vec{a}|$。与向量 $\vec{a}$ 有相同长度而方向相反的向量叫做 $\vec{a}$ 的反向量，记作 $-\vec{a}$。模为 0 的向量叫做零向量，记作 $\vec{0}$。零向量没有确定的方向，或者说它的方向是任意的。

二、向量的加减法

力、速度都是向量的物理模型。我们知道，力与速度的合成是按平行四边形法则，即三角形法则进行，为了使向量的运算能反映力、速度运算的特性，我们采用同一个法则。

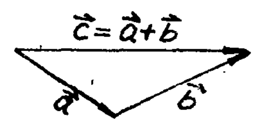

图 2.3

将向量 $\vec{b}$ 的起点放到向量 $\vec{a}$ 的终点，则以 $\vec{a}$ 的起点为起点，以 $\vec{b}$ 的终点为终点的向量 $\vec{c}$，叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和（图2.3）.记作 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。

向量的加法，可推广到多个向量求和的情形，如 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$，可以将第一个向量放好，然后依次把下面一个向量的起点放在前一个向量的终点上。最后，从第一个向量的起点到最末一个向量终点的有向线段就是这些向量的和（图2.4）。这个求和法叫做向量加法的多边形法则。

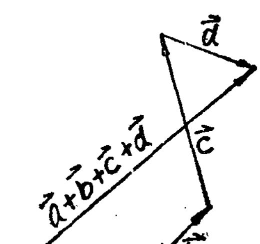

图 2.4

由作图，容易验证，向量的加法有下列运算规律：

1° $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$（交换律），

2° $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$（结合律），

3° $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$，

4° $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$。

这些是向量加法的基本规律。它说明，向量加法可以象实数加法那样去演算。

在作向量运算时，经常用到加法的逆运算。因此引进向量的减法。

向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的反向量之和叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记作$\vec{a}-\vec{b}$，即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

因为$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(-\vec{b})+\vec{a}$，由加法的三角形法则可作出向量$\vec{a}-\vec{b}$，从图2.5看出，把$\vec{a}$、$\vec{b}$的起点放在一起，以$\vec{b}$的终点为起点、$\vec{a}$的终点为终点的向量$\vec{c}$，就是$\vec{a}-\vec{b}$。

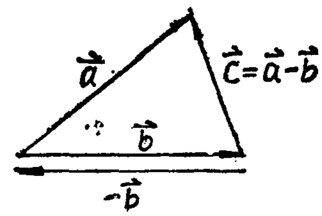

图 2.5

三、向量的数乘

假设一个物体受到两个相等的力$\vec{F}$作用，求这两个力的合成时，自然有$\vec{F}+\vec{F}=2\vec{F}$。由此可以引出数和向量相乘（简称数乘）的概念。

实数λ和向量$\vec{a}$的积是一个向量，记作$\lambda\vec{a}$。当$\lambda>0$时，它与$\vec{a}$同向；当$\lambda<0$时，它与$\vec{a}$反向。而它的模为$|\vec{a}|$的$|\lambda|$倍，即$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$。

由上述规定可知：

$$0\cdot\vec{a}=\vec{0},\quad \lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}.$$

图2.6表示向量数乘的几何意义。

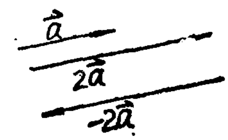

图 2.6

设$\vec{b}$为非零向量，若$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，把它们移到同一个起点，则它们是共线的，于是$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，其中λ为数量。反之，若$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，即共线。因此，我们得到：向量$\vec{a}$与非零向量$\vec{b}$共线的充要条件是$\vec{a}=\lambda\vec{b}$。零向量与任一向量共线。

向量的数乘有下列运算规律：

1° $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$,

2° $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$,

3° $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

这里λ、μ为任意实数，$\vec{a}$、$\vec{b}$为任意向量。前两个规律从数乘的定义容易推得。至于规律3°，可用相似图形（图2.7）来证明。

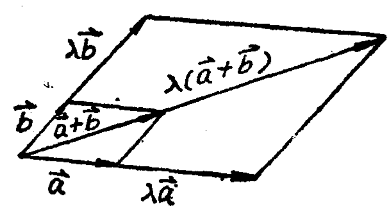

图 2.7

若一向量$\vec{a_0}$的模为1，且方向与非零向量$\vec{a}$相同，则称$\vec{a_0}$为$\vec{a}$的单位向量。从向量数乘的定义，我们有

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a_0}.$$

从而

$$\vec{a_0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

上式说明，一个非零向量$\vec{a}$除以它的模，就得到$\vec{a}$的单位向量。$\vec{a}$的方向与其单位向量是一一对应的，所以我们常用单位向量来表示方向。

四、向量的坐标表示

在讨论向量的概念与运算时，我们是用几何方法引进的，这个方法比较直观，但计算不方便。现在我们来引进向量的坐标，把向量用一个数组表示出来，这样，向量的运算就可化

为数的运算。

我们先来定义空间一点在轴 u 或平面 π 上的投影。

设 A 为空间一点，过 A 作垂直于轴 u 的平面 α，则 α 与轴 u 的交点 A' 叫做 A 在轴 u 上的投影（图2.8）。设 B 为空间一点，过 B 作垂直于平面 π 的直线 l，则 l 与平面 π 的交点 B' 叫做点 B 在平面 π 上的投影（图 2.9）。

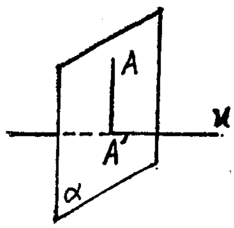

图 2.8

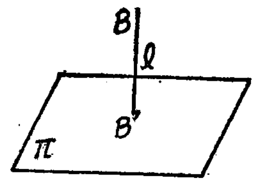

图 2.9

任取一直角坐标系 $Oxyz$，在 x、y、z 轴的正方向上分别取三个单位向量，记作 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$，并叫做坐标向量。

设空间直角坐标系中有一向量 $\vec{a}$，把它平移，使起点移到坐标原点，P 为向量 $\vec{a}$ 的终点，则 P 的坐标 (x,y,z) 也叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标。这时向量记作

$$\vec{a}=\{x,\ y,\ z\}. \tag{1}$$

记号 $\{x,\ y,\ z\}$ 也表示向量，它叫做向量的坐标表示。

设点 P 在 x、y、z 轴上的投影分别为 A、B、C，在 xy 平面上的投影为 M（图2.10），由向量的加法知

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}$$

而
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OC}.$$

所以
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

即
$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}. \tag{2}$$

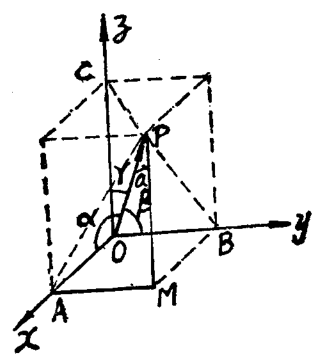

图 2.10

其中 $x\vec{i}$、$y\vec{j}$、$z\vec{k}$ 分别叫做 $\vec{a}$ 在 x、y、z 轴上的分向量。（2）式表示，向量 $\vec{a}$ 可分解成三个分向量之和。所以（2）式右端叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标分解式。

由（1）、（2）式得

$$\vec{a}=\{x,\ y,\ z\}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

设 $\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$、$\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ 为两向量，利用向量加法的运算规律，我们有

$$\begin{aligned}&\{x_1,\ y_1,\ z_1\}+\{x_2,\ y_2,\ z_2\}\\&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\&=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}\\&=\{x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2\}\end{aligned}$$

这就是说，两个向量之和的坐标等于它们对应的坐标之和。

对于向量的数乘运算，则有

$$\begin{aligned}&\lambda\{x_1,\ y_1,\ z_1\}=\lambda(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\\&=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}+\lambda z_1\vec{k}\\&=\{\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1\}.\end{aligned}$$

自然地，对减法法则有

$$\{x_1,\ y_1,\ z_1\}-\{x_2,\ y_2,\ z_2\}=\{x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2\}.$$

这样，向量的加减运算与数乘运算就化为它们相应坐标的运算，也就是化为数的运算。

思考题：设$A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$为两点；求向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$的坐标。

五、向量的模和方向余弦

我们知道，向量有两个特征：长度和方向。现在引进了向量的坐标，那么如何用向量的坐标来表示它的长度和方向呢？

任给一向量$\vec{a}=\{x,\ y,\ z\}$，从图2.10看出：

$$|\vec{a}|=\sqrt{(OA)^2+(OB)^2+(OC)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

这就是模的坐标计算公式。

向量$\vec{a}$的方向可以由这向量与三个坐标轴正向的夹角α、β、γ完全确定（图2.10）。α、β、γ称为向量$\vec{a}$的方向角，并且规定

$$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\gamma\leqslant\pi.$$

从图2.10所示，A、B、C为点P分别在x、y、z轴上的投影，所以$PA\perp OA$、$PB\perp OB$、$PC\perp OC$，于是α、β、γ与模$|\vec{a}|$及向量$\vec{a}$的坐标x、y、z有关系式：

$$x=|\vec{a}|\cos\alpha,\quad y=|\vec{a}|\cos\beta,\quad z=|\vec{a}|\cos\gamma.$$

我们称$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$为向量$\vec{a}$的方向余弦。当方向余弦确定后，角α、β、γ就确定了，因而向量的方向也就确定了。由上式可得方向余弦的表示式为

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}\tag{3}$$

或

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\tag{4}$$

这就是方向余弦的坐标计算公式。

由（3）式得

$$\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}=\left\{\frac{x}{|\vec{a}|},\ \frac{y}{|\vec{a}|},\ \frac{z}{|\vec{a}|}\right\}$$

$$=\frac{1}{|\vec{a}|}\{x,\ y,\ z\}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

上式说明，$\vec{a}$的方向余弦组成的向量$\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$就是$\vec{a}$的单位向量。

例 1 已知$\vec{a}=\{2,\ 3,\ -6\}$，求其方向余弦。

解
$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{2}{7}$$
$$\cos\beta=\frac{3}{7},\quad \cos\gamma=\frac{-6}{7}.$$

例 2 设向量$\vec{a}$与三个坐标轴的夹角相等，即$\alpha=\beta=\gamma$，求它的方向余弦。

解 由于$\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$为单位向量，所以$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，而$\alpha=\beta=\gamma$，我们有
$$3\cos^2\alpha=1,$$
从而
$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$
因此$\vec{a}$的方向余弦为
$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad 或\quad \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

习　题　二

1 空间中三个点A、B、C的坐标如下
$$A(2,\ -1,\ 1),\ B(3,\ 2,\ 1),\ C(-2,\ 2,\ 1)$$
求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}$的坐标，并求AB、BC、AC的长度。以及说明$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$的模与方向之间的关系。

2 设$ABCD$为平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$。试用$\vec{a}$和$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{MA}$。（$M$为平行四边形对角线的交点。）

3 设$\vec{a}=\{2,\ -2,\ 1\}$，$\vec{b}=\{4,\ -2,\ 2\}$，$\vec{c}=\{6,\ -3,\ -3\}$，求向量$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$，$\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$的坐标。

4 设一向量与x轴、y轴的夹角相等，而与z轴的夹角是前者的两倍，求这向量的方向余弦。

5 设向量的方向余弦满足条件：$\cos\alpha=\cos\beta=0$，指出此向量与坐标轴及坐标平面的关系。

6 设$\vec{a}=\{3,\ 5,\ -4\}$，$\vec{b}=\{2,\ 1,\ 8\}$。求出$\vec{a}$、$\vec{b}$的单位向量，并选择λ、μ使$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$与$z$轴垂直。

7 在空间直角坐标系$Oxyz$中，A、B两点的坐标分别为$(a_1,\ a_2,\ a_3)$、$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，求线段AB的中点之坐标。

8 已知两力$F_1=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$，$F_2=2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$作用于同一点，问要用怎样的力才能与它们平衡？

六、向量的投影向量与投影

设空间给定一向量$\vec{a}$与轴u，如果向量$\vec{a}$的起点与终点在轴u上的投影分别为A与B（图2.11），则向量$\overrightarrow{AB}$叫做向量$\vec{a}$在轴u上的投影向量，类似地可以定义向量$\vec{a}$在平面π上的投影向量（图2.12）。

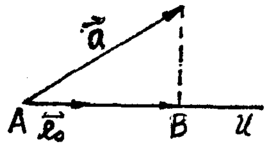

图 2.11

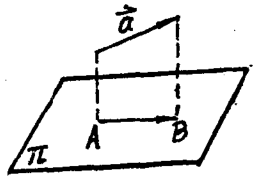

图 2.12

如果在轴u上又给定一非零向量$\vec{e}$，其单位向量为$\vec{e}_0$，因$\overrightarrow{AB}\parallel\vec{e}_0$，故有唯一的实数$\lambda$，使得

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{e}_0$$

这时称λ为向量$\vec{a}$在方向$\vec{e}$上的投影或分量，记作$\prod_{\vec{e}}\vec{a}$。

若记$<\vec{a},\ \vec{e}>$为向量$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角（我们规定：$0\leqslant<\vec{a},\ \vec{e}>\leqslant\pi$），由余弦的定义，我们有

$$\prod_{\vec{e}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos<\vec{a},\ \vec{e}> \qquad (5)$$

在直角坐标系$Oxyz$中，如果向量$\vec{a}$的坐标分解式为

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

这时，$x\vec{i}$就是向量$\vec{a}$在x轴上的投影向量，而坐标x就是$\vec{a}$在坐标向量$\vec{i}$上的投影，即

$$x=\prod_{\vec{i}}\vec{a}.$$

显然，$\vec{e}$的单位向量$\vec{e}_0$恒可看作某一直角坐标系的坐标向量，由向量坐标的性质，我们有

$$\prod_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b})=\prod_{\vec{e}}\vec{a}+\prod_{\vec{e}}\vec{b}, \qquad (6)$$

$$\prod_{\vec{e}}(\lambda\vec{a})=\lambda\prod_{\vec{e}}\vec{a}. \qquad (7)$$

七、向量的点乘

在力学中，我们知道，一个质点在力$\vec{a}$的作用下经过位移$\vec{b}$，则力$\vec{a}$所作的功等于$\vec{a}$在位移$\vec{b}$上的投影$|\vec{a}|\cos<\vec{a},\ \vec{b}>$乘上位移的距离$|\vec{b}|$，即

$$功=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos<\vec{a},\ \vec{b}>.$$

以力作功为实际背景，我们得到向量点乘的概念。

定义1 设$\vec{a}$、$\vec{b}$为任意两个向量，我们以下式左端的记号代表右端的数

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos<\vec{a},\ \vec{b}> \qquad (8)$$

它称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的点乘（或数量积）。若有一向量为$\vec{0}$，则点乘规定为$\vec{0}$。

由（5）式知

$$|\vec{b}|\cos<\vec{a},\ \vec{b}>=\prod_{\vec{a}}\vec{b},\quad |\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=\prod_{\vec{b}}\vec{a}.$$

代入（8）式得

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\prod_{\vec{a}}\vec{b}\quad 或\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\prod_{\vec{b}}\vec{a}.$$

这就是说，两向量的点乘等于一向量的模乘以另一向量在这向量（设非零）上的投影。

从两向量的定义可看出，当$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$时，则或者有一向量是零向量，或者$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，因为零向量的方向是任意的，可看作与任意向量垂直。因此，可以说，当$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$时，则$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直。反过来，$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直（$\vec{a}$或$\vec{b}$可以是零向量），显然有$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。于是，我们得到

定理1 两向量$\vec{a}$、$\vec{b}$互相垂直的充要条件是$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

向量的点乘有下列运算规律：

1° $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ （交换律） （9）

上式从点乘定义直接可得。

2° $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ （10）

（与数乘的结合律）

$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ （11）

在公式（10）中，当$\lambda>0$时，公式显然成立，当$\lambda<0$时，只要注意到：$<\lambda\vec{a},\ \vec{b}>=<-\vec{a},\ \vec{b}>=\pi-<\vec{a},\ \vec{b}>$，也立即可得。公式（11）可利用公式（9）与（10）得到。

3° $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ （12）

（分配律）

$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}$ （13）

证公式(12)，当$\vec{c}=\vec{0}$时，等式显然成立，当$\vec{c}\neq\vec{0}$时，我们有

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=|\vec{c}|\prod_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|(\prod_{\vec{c}}\vec{a}+\prod_{\vec{c}}\vec{b})\\&=|\vec{c}|\prod_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\prod_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

公式（13）可由公式（9）与（12）得到。

设$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$为直角坐标系的坐标向量，显然有

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

利用上式和上面几条性质，我们可以得到向量点乘的坐标计算公式。

设在直角坐标系$Oxyz$下，已知

$$\vec{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\},\ \vec{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$$

则 $$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$=a_1b_1\vec{i}\cdot\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\cdot\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\cdot\vec{k}$$
$$+a_2b_1\vec{j}\cdot\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\cdot\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\cdot\vec{k}$$
$$+a_3b_1\vec{k}\cdot\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\cdot\vec{j}+a_3b_3\vec{k}\cdot\vec{k}$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \qquad (14)$$

即两向量的点乘等于它们对应坐标的乘积之和。

从（14）式立即得到，两向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 垂直的充要条件可用坐标表成为

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

利用点乘的坐标计算公式能得到两向量夹角的余弦之坐标表示式。由于

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

所以 $$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

例 3 已知三点 $A(1,1,1)$、$B(2,2,1)$、$C(2,1,2)$，求 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角 θ。

解 由于 $\overrightarrow{AB}=\{1,1,0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1,0,1\}$

所以 $$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$$

故 $$\theta=\frac{\pi}{3}.$$

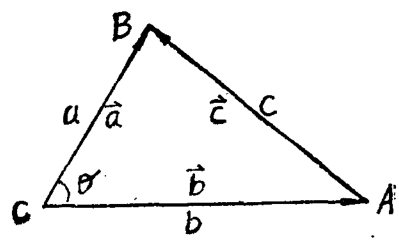

图 2.13

例 4 在 $\triangle ABC$ 中(图2.13)，$CB=a$，$CA=b$，$AB=c$，求证余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

证 设 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，

则 $$\vec{c}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b}$$

从而 $$\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

显然 $$\vec{c}\cdot\vec{c}=c^2,\quad \vec{a}\cdot\vec{a}=a^2,\quad \vec{b}\cdot\vec{b}=b^2$$

所以 $$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

例 5 求向量 $\vec{a}=\{4,-1,2\}$ 在 $\vec{b}=\{-3,1,0\}$ 上的投影。

解 因为 $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\prod_{\vec{b}}\vec{a}$$

所以 $$\prod_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{4\cdot(-3)+(-1)\cdot1+2\cdot0}{\sqrt{(-3)^2+1^2+0^2}}=-\frac{13}{10}\sqrt{10}.$$

思考题：对向量的点乘而言，结合律：$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$成立吗？

八、二阶、三阶行列式

为了讨论向量的叉乘，我们先介绍二阶、三阶行列式的概念。

定义 2 设 a_1、a_2、b_1、b_2 为四个数，我们用下式左端的记号代表右端的数

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

此记号叫做二阶行列式，行列式中的数叫做它的元素，横的排叫做行，从上到下依次为第一行第二行，竖的排叫做列，从左至右依次为第一列第二列。

从上面的定义可看出，二阶行列式代表的数是它的对角线元素之积的代数和，其中a_1b_2取正号，a_2b_1取负号。

利用二阶行列式，我们可以引进三阶行列式的概念。

定义 3 设 a_i，b_i，c_i $(i=1,2,3)$ 为九个数，我们用下式左端的记号代表右端的数：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

此记号叫做三阶行列式，它含有三行三列。

上式右端叫做三阶行列式按第一行的展开式，展开成三项之和，每项的符号是正负相间，第一项的因子 $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 刚好是把 a_1 所在的行与列划去，余下元素组成的行列式，第二、第三项也有类似的特性。

例 6 试形式地计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}.$$

有了三阶行列式的概念，按定义 3 的方式可定义四阶行列式，一般有了 $n-1$ 阶行列式，可用它来定义 n 阶行列式。

定义4* 设 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$ 为 n^2 个数，我们用下式左端的记号代表右端的数：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}\cdots a_{3n} \\ & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24}\cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34}\cdots a_{3n} \\ \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32}\cdots a_{3n-1} \\ \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

定义 4 与线性代数中 n 阶行列式的概念是一致的。上式叫做 n 阶行列式按第一行的展开式。

九、向量的叉乘

在力学中，已经学过力矩的概念。一根短棍，一端 O 固定，另一端 A 受到力 $\vec{F}$ 的作用，力的作用使 OA 绕 O 点转动(图2.14)，转动的大小与方向用力 $\vec{F}$ 作用在向量 $\overrightarrow{OA}$ 所产生的力矩 $\vec{M}$ 来表示，它是一个向量，其模等于

$$|\overrightarrow{OA}|\cdot|\vec{F}|\sin\langle\overrightarrow{OA},\ \vec{F}\rangle$$

其方向垂直于 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\vec{F}$，且当右手自 $\overrightarrow{OA}$ 至 $\vec{F}$ 的方向握住拳时，大姆指伸开的指向就是 $\vec{M}$ 的方向。这时，我们称($\overrightarrow{OA}$，$\vec{F}$，$\vec{M}$)成右手系。

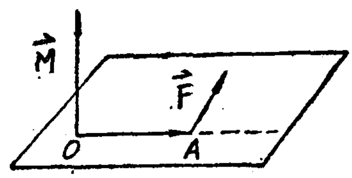

图 2.14

象力矩这样由两个向量确定另一个向量的关系，其他物理现象中也常遇到，因此，我们把它抽象出来形成向量叉乘的概念。

定义 5 两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的叉乘(又叫向量积)是一个向量，记作 $\vec{a}\times\vec{b}$，它的模为

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle$$

它的方向垂直于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，且使($\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$)成右手系，$\vec{a}$、$\vec{b}$ 中有一个零向量时，其叉乘规定为零向量。

这样，上面作用在 A 点上的力 $\vec{F}$，对于点 O 的力矩就是

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA}\times\vec{F}$$

从图2.15容易看出，$\vec{a}$、$\vec{b}$ 叉乘的模 $|\vec{a}\times\vec{b}|$，是由 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边所成的平行四边形的面积，这就是叉乘的模之几何意义。

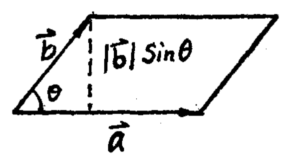

图 2.15

从向量的点乘可判别两向量垂直与否，我们将看到，从向量的叉乘可判别两向量平行与否。事实上，从定义可看出，当两向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之一为零向量或互相平行时，则 $\vec{a}\times\vec{b}=0$；反过来，当 $\vec{a}\times\vec{b}=0$ 时，如果 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 都不是零向量，则必有

$$\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = 0$$

即 $\vec{a}\parallel\vec{b}$。

由于也可认为零向量与任意向量平行，从而可得下面的定理。

定理 2 两向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 相互平行的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$。

向量叉乘有下列运算规律：

1° $$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \quad \text{(反交换律)} \qquad (15)$$