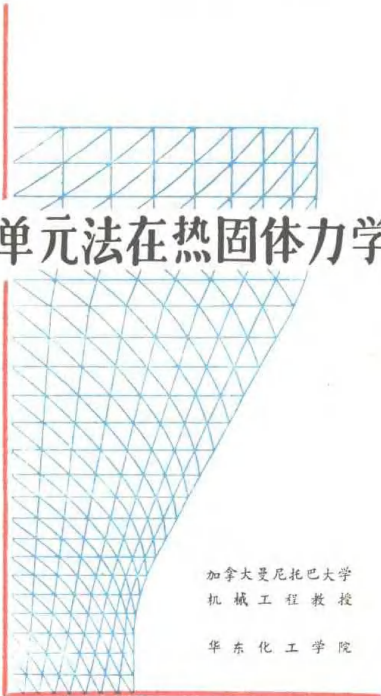


APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD IN THERMOMECHANICS



有限单元法在热固体力学中的应用

加拿大曼尼托巴大学
机械工程教授

徐泰然 编著

华东化工学院

王允昌 谢瑞绶 等合译

目 录

第一章 有限单元法基础	(1)
§ 1—1 离散化概念	(1)
§ 1—2 有限单元法实施步骤	(3)
参考文献	(11)
第二章 热传导中的有限单元分析	(12)
§ 2—1 基本公式述评	(12)
§ 2—2 有热源稳态热传导的有限单元公式	(13)
§ 2—3 三角形简单单元的面积坐标系	(18)
§ 2—4 二维稳态热传导——平面状态	(19)
§ 2—5 瞬态热传导问题中的有限单元法	(23)
§ 2—6 单元(热)容量矩阵	(24)
§ 2—7 时间区间内的瞬态热传导	(26)
§ 2—8 轴对称体内瞬态热传导的有限单元公式	(28)
§ 2—9 轴对称结构的求解步骤	(33)
§ 2—10 瞬态热传导问题——Galerkin法	(34)
§ 2—11 含相变的瞬态传热	(36)
参考文献	(37)
第三章 热弹塑性应力分析	(39)
§ 3—1 应力和应变定义	(39)
§ 3—2 应力——应变曲线图	(39)
§ 3—3 延性及脆性材料特性	(40)
§ 3—4 固体弹性及塑性变形的基本区别	(40)
§ 3—5 依赖于时间的塑性——蠕变	(41)
§ 3—6 线性弹性理论基本公式综述	(41)
§ 3—7 非线性弹性理论的基本公式	(45)
§ 3—8 基本塑性理论(与时间无关)	(47)
§ 3—9 多维状态下的屈服准则	(50)
§ 3—10 应变强化	(52)
§ 3—11 塑性势(屈服)函数	(53)
§ 3—12 Prandtl-Ruess 关系式	(53)
§ 3—13 塑性应力——应变关系式的一般推导	(54)
§ 3—14 线弹性应力分析中的有限单元公式	(55)

§ 3-15 热弹塑性应力分析的本构方程	(56)
§ 3-16 矩阵 (C_{ij}) 的推导	(59)
§ 3-17 材料刚度 (H') 的确定	(62)
§ 3-18 单元平衡方程	(63)
§ 3-19 卸载准则	(64)
§ 3-20 运动强化规律下的热弹塑性应力分析	(65)
§ 3-21 编制基本通用程序 (TEPSA) 所用的有限单元公式	(70)
§ 3-22 基本通用程序 TEPSA 的解题步骤	(75)
参考文献	(76)
第四章 运用 Fourier 级数的弹塑性应力分析	(77)
§ 4-1 引言	(77)
§ 4-2 非轴对称载荷作用下的弹性轴对称体单元方程	(77)
§ 4-3 非轴对称载荷作用下的弹性体刚度矩阵	(81)
§ 4-4 非轴对称载荷作用下的轴对称体弹塑性应力分析	(83)
§ 4-5 单元方程的推导	(85)
§ 4-6 混合模式刚度方程	(85)
§ 4-7 周向积分方法	(94)
§ 4-8 计算实例	(95)
§ 4-9 计算实例的讨论	(98)
参考文献	(99)
第五章 固体蠕变变形中的有限单元分析	(101)
§ 5-1 引言	(101)
§ 5-2 理论背景	(101)
§ 5-3 热弹塑性蠕变分析中的有限单元法	(104)
§ 5-4 积分方法	(107)
§ 5-5 求解演算步骤	(108)
§ 5-6 通用程序的验证	(109)
参考文献	(111)
第六章 弹性动应力分析中的有限单元法	(112)
§ 6-1 引言	(112)
§ 6-2 运动的离散方程	(112)
§ 6-3 运动方程的直接时间积分	(114)
§ 6-4 初始条件及加载	(114)
§ 6-5 方程求解中的矩阵分解法	(115)
§ 6-6 计算实例	(115)
参考文献	(120)
第七章 延性断裂分析中的有限单元法	(122)

第一部分	断裂力学概念述评	(122)
§ 7-1	引言	(122)
§ 7-2	线弹性断裂力学	(122)
§ 7-3	弹塑性断裂力学	(124)
§ 7-4	有限单元法在断裂力学上的应用	(127)
第二部分	稳定裂纹扩展的数值模型	(129)
§ 7-5	引言	(129)
§ 7-6	断裂准则	(129)
§ 7-7	“可裂单元”	(129)
§ 7-8	节点力的松弛	(131)
第三部分	I型断裂的有限单元分析	(132)
§ 7-9	引言	(132)
§ 7-10	I型试样的有限单元模型	(132)
§ 7-11	断裂准则计算	(133)
§ 7-12	稳定裂纹扩展的预测	(134)
§ 7-13	应变及应力分布的变化	(135)
§ 7-14	裂纹尖端参数的变化	(137)
§ 7-15	塑性区的发展	(139)
第四部分	混合型断裂的有限单元分析	(139)
§ 7-16	引言	(139)
§ 7-17	脆性材料中裂纹轨迹预测的述评	(140)
§ 7-18	延性材料中裂纹轨迹的预测	(142)
§ 7-19	稳定裂纹扩展的预测	(145)
§ 7-20	应变及应力分布的变化	(146)
§ 7-21	裂纹尖端参数的变化	(148)
§ 7-22	塑性区的发展	(148)
	参考文献	(150)
第八章	热弹塑性应力分析中的有限应变理论	(156)
§ 8-1	引言	(156)
§ 8-2	拉格朗日及欧拉坐标系	(157)
§ 8-3	Green 及 Almansi 应变张量	(158)
§ 8-4	拉格朗日及克希霍夫应力张量	(160)
§ 8-5	大范围的平衡	(161)
§ 8-6	小范围的平衡	(161)
§ 8-7	边界条件	(163)
§ 8-8	本构方程	(164)
§ 8-9	由虚功原理推出的平衡方程	(165)

§ 8-10 有限单元公式	(166)
§ 8-11 刚度矩阵(K_2)	(167)
§ 8-12 刚度矩阵(K_3)	(168)
§ 8-13 热弹塑性应力分析的本构方程	(170)
§ 8-14 有限单元公式	(171)
§ 8-15 计算机程序	(172)
§ 8-16 计算实例	(172)
参考文献	(176)
第九章 耦合热弹塑性应力分析	(178)
§ 9-1 引言	(178)
§ 9-2 能量平衡概念	(179)
§ 9-3 耦合热传导方程的推导	(181)
§ 9-4 耦合热弹塑性应力分析	(182)
§ 9-5 有限单元公式	(183)
§ 9-6 $\{\gamma\}$ 及 $\{\bar{\gamma}\}$ 矩阵	(185)
§ 9-7 热模量矩阵 $\{\beta\}$	(186)
§ 9-8 内耗因子	(186)
§ 9-9 计算方法	(187)
§ 9-10 结论	(188)
参考文献	(189)
第十章 大型程序的组织及管理——TEPSA 通用程序	(191)
§ 10-1 基本思路	(191)
§ 10-2 TEPSA 基本通用程序的范围	(192)
§ 10-3 结构组织	(192)
§ 10-4 子程序功能	(195)
§ 10-5 输入数据说明	(196)
§ 10-6 输出说明	(206)
§ 10-7 错误信息	(211)
第十一章 TEPSA 通用程序的应用	(212)

第一章 有限单元法基础

§ 1—1 离散化概念

许多工程分析都含有对某些物理量的求解,例如由外力(或压力)引起的固体内各处应力(或应变);由热源(或冷源)引起的固体内各点温度;由压头或压力差引起的流体不同位置处流速;由激振源引起的固体不同部位上振幅等等。当然,事实上这些物质(不论是固体,或是流体)都应视作连续介质或连续体。我们不难想象,在连续体内理应有无限多的“各处”,“各点”,“不同位置”和“不同部位”。因此,实际上要求我们解决的是一些含有无限个点,即含有无限个自由度的问题。常识告诉我们,求解一个问题的难度随所含自由度增加而流速增大。其结果对求解许多含有大量自由度的工程问题来说,即使非不可能,也是十分困难的。本质上基于离散化概念的有限单元法,是用以求解这类问题的一种富有生命力的方法。

离散化过程,首先将一连续体细分成有限个子域(称为单元)。这些单元彼此在角上(节点)相连,如图1—1所示。图中固体由边界 Ω 围成一定形状,并以 A 和 B 为支点。该固体承受一组指定的作用量(如力,热源等),可写成:

$$\{P\} = P_1, P_2, P_3, \dots$$

由于存在这些作用量,就产生一些所求的反作用量(如挠度,应变,应力,温度等),并可写成:

$$\{\phi\} = \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$$

对于大多数工程问题,都具有由下述定义的泛函 $X(\phi)$ 所表示的条件:

$$X(\phi) = \int_V f[\{\phi\}, \frac{\partial \{\phi\}}{\partial \vec{r}} \dots] dV + \int_S g[\{\phi\}, \frac{\partial \{\phi\}}{\partial \vec{r}} \dots] ds \quad (1-1)$$

其中 $\{\phi\}$ 为连续体内未知反作用量, $\vec{r}$ 为方位向量。

泛函 $X(\phi)$ 的极小值可满足平衡状态,或表示为

$$\frac{\partial X(\phi)}{\partial \{\phi\}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial X}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial X}{\partial \phi_2} \\ \vdots \end{array} \right\} = 0 \quad (1-2)$$

因为由边界 Ω 围成的固体内有无限个点,因此在这些点上就存有无限个 ϕ 值。

如果图1—1(a)中的固体原型被细分成有限个具有某种形状(此处为三角形和四边形平叛)的子域(即单元),而这些单元只在节点处相互连接。那么,经此离散化后的连续体就不再是连续性物体,而是包含若干个在角上相连的“碎”片。另一明显变化,是原有的连续曲线边界 Ω 已变为一段段直线。显然,此离散体与原型体仅系相似,而并不相等。当然,

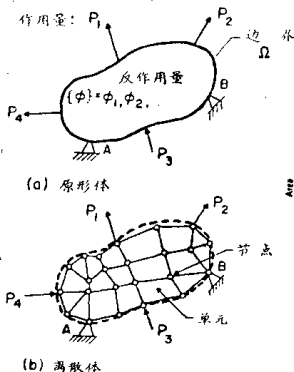


图 1-1 固体的离散化

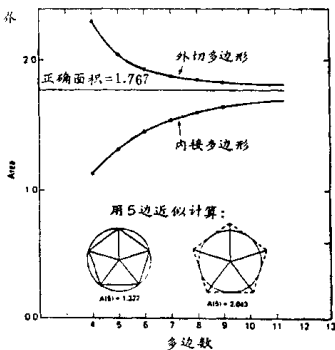


图 1-2 离散化近似值的收敛

者的相似程度取决于离散体(模型)所用的单元数。模型中所取单元越多,则越接近原型,正如图 1-2 所简示^{[1]*}。

离散化的独特优点,是在分析时只须针对各个几何形状简单的单元(如三角形平板),而不必针对复杂几何的整个固体。

单元内所求的物理量 $\{\phi\}$, 可从节点相应值,再经形函数(或称插值函数)求得,即

$$\{\phi\}^* = (N)\{\phi\}^o \quad (1-3)$$

式中: $\{\phi\}^*$, $\{\phi\}^o$ ——依次表示单元和节点物理量

(N) ——形函数或插值函数

因为只须对各个单元或全部节点求解,所以通过离散化过程,可使原来含有无限自由度的问题。简化成对离散模型中有限个单元和节点的有限自由度问题。于是就有可能求得 $\{\phi\}$ 的解。

根据离散化方程(1-3),由直观可知,整个连续体的总泛函 $X\{\phi\}$ 就等于全部单元所作贡献之总和,即

$$X(\phi) = \Sigma X^*(\phi)$$

因此,式(1-2)的求极小值就可简化为

$$\frac{\partial X\{\phi\}}{\partial \{\phi\}^*} = \Sigma \frac{\partial X^*(\phi)}{\partial \{\phi\}^*} = 0 \quad (1-4)$$

*方括号内数表示本章末的文献号,下均同。

§ 1-2 有限单元法实施步骤

当前有限单元法已被广泛应用于工程分析的各个领域。它可用来计算几何形状复杂的固体结构,在承受复杂载荷时的应力和温度分布。它也可用来预示在几何形状复杂的流动内流动的流体模型。对具有不寻常热物理和机械性能的物质,其工程特性通过有限单元法也能较易判定。要建立一套适用于上述各种问题的标准计算过程是不可能的。然而,作为一般准则,大多数有限元分析都是遵循以下八个步骤:

第1步 真实结构的离散化

根据结构的性质,可选用不同类型的单元。图1-3展示了几种常用的典型单元。杆单元通常用于桁架和刚架结构;板单元则适用于板类结构,或某些物理量只限于在平面内变化的情况(如平面应力情况)。对于轴对称结构,如圆筒体,压力容器,则用环单元。最后,对于几何形状极其复杂的结构、以及有必要建立三维模型者,通常选用四面体或六面体单元。此外,还发展了很多特殊用途的单元,如梁单元、壳单元。有些单元的边,可以直线,也可以曲线,边上还可有附加节点。很多等参数单元正是如此。近代有限单元计算程序,都允许不同类型单元能组合使用,从而使有限元模型的建立,具有高度的灵活性。

第2步 确立基本未知量及适当的插值函数(形函数或试探函数)

同样,根据问题的性质,在不同的情况下选择不同的基本未知量。在应力分析中,可选择位移分量;在热传导分析中可选择温度;而在流体流动问题中,则可取流速。

一旦分析中的基本未知量 $\{\phi\}$ 已被确定,就可按式(1-3)进行离散。此时必须选定一个合适的插值函数(或形函数、试探函数)形式。由式(1-3)知,该函数涉及单元内部与各有关节点间基本未知量的关系。

在选择插值函数时,需满足以下两个条件:

1. 式(1-4)中所出现的泛函 $X(\phi)$,必须在单元交界面上保持连续。若式(1-1)内被积函数,即 f 和 g ,所含各导数的阶数比插值函数中最低阶导数还要低一阶,则上述条件就能满足。
2. 得到的 $\{\phi\}$ 的解序列必须是收敛的。这就要求当单元体积 $V \rightarrow 0$ 时,泛函 $X \rightarrow$ 极限值。

简单单元的形状

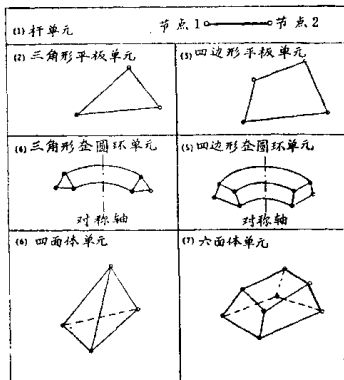


图1-3 典型单元的几何形状

在有限元分析中,有好多种形式的插值函数可供选用。现将最常用的两种形式介绍如下:

(1) 拉格朗日多项式^[2]

见图 1-4, 若在点 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 处的函数符合 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$, 则按照拉格朗日多项式可得下式:

$$\phi(x) = N_1(x) \phi_1(x_1) + N_2(x) \phi_2(x_2) + N_3(x) \phi_3(x_3) + \dots$$

式中:

$$N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}$$

$$N_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_3-x_n)}$$

或

$$N_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} \quad (1-5)$$

$$N_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x=x_n \\ 0 & \text{在其它各处} \end{cases}$$

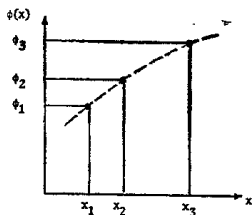
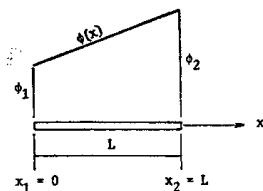


图 1-4 函数插值



例 1-1 示意图

(例 1-1) 一个杆单元在 $x_1=0$ 处, 函数值为 ϕ_1 , 在 $x_2=L$ 处, 则为 ϕ_2 , 其拉格朗日插值函数可表示为

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^2 N_i \phi_i(x) = N_1(x) \phi_1 + N_2(x) \phi_2$$

$$N_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-L}{0-L} = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{L-0} = \frac{x}{L}$$

故

$$\phi(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \phi_1 + \frac{x}{L} \phi_2 \quad (1-6)$$

对于二维插值, 可采用下式

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i(x) N_j(y) \phi_{ij} \quad (1-7)$$

式中: $m = x$ 轴上的节点总数

$n = y$ 轴上的节点总数

ϕ_{ij} 是在节点 (x_i, y_j) 处的 $\phi(x, y)$ 值

(例 1—2) 下图所示的矩形区域 (或单元) 内, 在 12 个节点处均有函数值。根据拉格朗日多项式所得的插值函数为:

参照式 (1—7) $m=3, n=4$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 N_i(x) N_j(y) \phi_{ij} = N_1(x) N_1(y) \phi_{11} + N_1(x) N_2(y) \phi_{12} \\ & + N_1(x) N_3(y) \phi_{13} + N_1(x) N_4(y) \phi_{14} + N_2(x) N_1(y) \phi_{21} \\ & + N_2(x) N_2(y) \phi_{22} + N_2(x) N_3(y) \phi_{23} + N_2(x) N_4(y) \phi_{24} \\ & + N_3(x) N_1(y) \phi_{31} + N_3(x) N_2(y) \phi_{32} + N_3(x) N_3(y) \phi_{33} \\ & + N_3(x) N_4(y) \phi_{34} \end{aligned}$$

式中:

$$N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

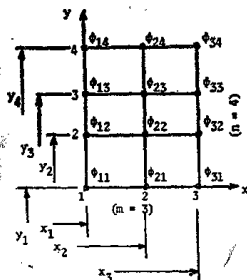
$$N_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$N_1(y) = \frac{(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)}$$

$$N_2(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_3)(y-y_4)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_2-y_4)}$$

$$N_3(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_4)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)(y_3-y_4)}$$

$$N_4(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_4-y_1)(y_4-y_2)(y_4-y_3)} \quad \text{等}$$



例 1—2 附 图

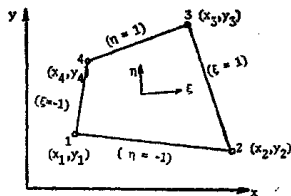


图 1—5 等参数单元的坐标定义

(2) 奇缘函数^[3] (Serendipity function)

这种函数用于通常所谓“等参数单元”, 即在单元边上也设置节点的情况。所选单元的基本形状为四边形, 其四条边均可扭曲成给定线型。

现将一个四边形单元置于整体坐标 x, y 系内, 并使用下述术语:

整体坐标: $\{x, y\}$

节点坐标: $\{x_n, y_n\}$

参数坐标: $\{\xi, \eta\}$

单元量: $u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)$

节点量: $\{u_n, v_n\}$

其中参数坐标是按下列方法选取的:

在边 1—2 上, $\eta = -1$; 在边 4—3 上, $\eta = +1$;

在边 1—4 上, $\xi = -1$; 在边 2—3 上, $\xi = +1$ 。

因此图示单元的节点参数坐标为

节点 1: $\xi = -1, \eta = -1$; 节点 2: $\xi = +1, \eta = -1$;

节点 3: $\xi = +1, \eta = +1$; 节点 4: $\xi = -1, \eta = +1$ 。

节点间的 ξ 和 η 数值, 可通过插值确定。

整体坐标 $\{x, y\}$ 与节点坐标 $\{x_n, y_n\}$ 间的关系则为

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = \{N_1 N_2 N_3 N_4\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \{N\}^T \{x_n\} \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \{N_1 N_2 N_3 N_4\} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \{N\}^T \{y_n\} \end{aligned} \quad (1-8)$$

其中等参形函数

$$N_i = N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{在节点 } i \text{ 处} \\ 0 & \text{在其它节点处} \end{cases}$$

因此有限单元离散化处理, 可按下述表达式进行:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 = \{N\}^T \{u_n\} \\ v(\xi, \eta) &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 = \{N\}^T \{v_n\} \end{aligned} \quad (1-9)$$

现将三种常见的等参数单元形函数的表达式分列如下:

① 线性单元

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta \\ N_i &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i)(1 + \eta_i) \end{aligned} \quad (1-10)$$

式中: $\xi_i = \xi_i$;

$\eta_i = \eta_i$;

例如, 节点 3 (即 $i=3$), $\xi_3 = +1, \eta_3 = +1$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

② 二次单元

$$x = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \eta \xi + a_5 \xi^2 + a_6 \eta^2 + a_7 \xi^2 \eta + a_8 \xi \eta^2$$

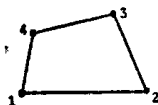
在角节点上

$$N_i = \frac{1}{4} (\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(\xi_0 + \eta_0 + 1) \quad (1-11a)$$

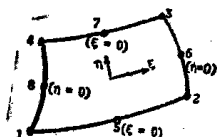
在边正中节点上

$$\xi_i = 0, \quad N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad (1-11b)$$

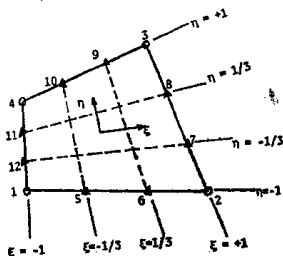
$$\eta_i = 0, \quad N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_0)(1 - \eta^2) \quad (1-11c)$$



附图 线性单元



附图 二次单元



附图 三次单元

例如, 节点 4 (即 $i=4$), $\xi_4 = -1$, $\eta_4 = +1$

$$N_4 = \frac{1}{4} (\xi \xi_4 + 1)(\eta \eta_4 + 1)(\xi \xi_4 + \eta \eta_4 + 1) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \eta - \xi)$$

节点 7 (即 $i=7$), $\xi_7 = 0$, $\eta_7 = +1$

$$N_7 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

节点 6 (即 $i=6$), $\xi_6 = +1$, $\eta_6 = 0$

$$N_6 = \frac{1}{2} (1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

③ 三次单元

如图所示, 在每条边的 $1/3$, $2/3$ 处, 附加节点。其坐标展开式为三次函数:

$$x = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \eta \xi + a_5 \eta^2 + a_6 \xi^2 + a_7 \xi^3 + a_8 \xi^2 \eta + a_9 \xi \eta^2 + a_{10} \eta^3 + a_{11} \eta^2 \xi + a_{12} \eta \xi^2$$

在角节点上

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(9(\xi^2 + \eta^2) - 10) \quad (1-12a)$$

在沿 $\xi_i = \pm 1$ 边而 $\eta_i = \pm 1/3$ 的各节点上 (即节点 7, 8, 11, 12)

$$N_i = \frac{9}{32}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2)(1 + \eta_0) \quad (1-12b)$$

在沿 $\eta_i = \pm 1$ 边而 $\xi_i = \pm 1/3$ 的各节点上 (即节点 5, 6, 9, 10)

$$N_i = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad (1-12c)$$

第 3 步 明确作用量与反作用量间的关系

物理定律常能对物体的作用量及其反作用量间提供某些关系。下表列出了常见工程分析中的某些物理量:

表 1-1 作用量与反作用量

	作用量 $\{P\}$	反作用量 $\{\phi\}$
应力分析	力 $\{F\}$	应力 $\{\sigma\}$, 应变 $\{e\}$, 位移 $\{u\}$
热传导	热载荷 $\{Q\}$	温度 $\{T\}$
流体流动	压力或压头 $\{P\}$	流速 $\{V\}$

有关在应力分析情况下, 反映 $\{F\}$ 与 $\{u\}$ 间关系的物理定律是最小势能原理。在第二, 章热传导分析中, 反映 $\{Q\}$ 与 $\{T\}$ 间关系的则为 Fourier 定律。

第 4 步 推导单元方程组

单元方程式反映了作为基本未知量的反作用量与作用量之间的关系。为了推导有限单元法中的这组方程式, 一般有两种不同方法, 即 Rayleigh-Ritz 法及加权残量法 (或称 Galerkin 法)。前者是以变分原理为基础, 有着更广泛的应用性。

1. Rayleigh-Ritz 法

该法应用于对一适当泛函 $X(\phi)$ 求取变分的过程中。其中泛函已在式 (1-1) 中定义过, 是以 ϕ 作为求解的基本未知量。对应力分析问题来说, 此泛函或者是处于平衡形状时的固体势能, 或者是下述示例中所列出的一些微分量。正如式 (1-4) 所述, 将离散形式的泛函对 $\{\phi\}$ 求变分时, 会导出一组描述系统中每个单元特性的联立方程组。这些方程组称为“单元方程组”。

(例): 某问题可用 Poisson 方程表示为

$$\text{在区域 } V \text{ 内} \quad \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial \phi}{\partial y} + Q = 0$$

$$\text{在边界 } S \text{ 上} \quad k \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} = 0$$

该问题的泛函可表达成*

*将在后面证明。

$$\chi(\phi) = \int_V \left[\frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - Q \phi \right] dV - \int_S \bar{q} \phi dS \quad (1-13)$$

对离散化系统,

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i \quad (1-14)$$

式中: N_i = 试探函数,

ϕ_i = ϕ 的离散值。

将式 (1-14) 代入 (1-13), 可得

$$\begin{aligned} \chi(\phi) = & \int_V \frac{1}{2} k \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i \right)^2 dV + \int_V \frac{1}{2} k \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i \right)^2 dV \\ & - \int_V Q \sum_i N_i \phi_i dV - \int_S \bar{q} \sum_i N_i \phi_i dS \end{aligned}$$

将泛函 χ 对 ϕ_i 取变分或微分, 则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \phi_i} = & \int_V k \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} dV + \int_V k \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} dV \\ & - \int_V Q N_i dV - \int_S \bar{q} N_i dS = 0 \end{aligned}$$

由于 ϕ_i 是 ϕ 的离散值, 与坐标无关 (即与 V 和 S 无关),

因此上式可改写成

$$\left[\int_V k \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dV \right] \phi_i = \int_V Q N_i dV + \int_S \bar{q} N_i dS$$

或简写为

$$\{K^*\} \{\phi_i\} = \{F_i\} \quad (1-15)$$

式中:

$$\{K^*\} = \int_V k \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dV$$

$$\{F_i\} = \int_V Q N_i dV + \int_S \bar{q} N_i dS$$

式 (1-15) 为系统内每个单元提供了求解离散值 ϕ_i 的方程组, 故称“单元方程组”。

2. Galerkin 法

该法有时称为“加权残量”法。

假设一物理问题能在数学上用微分方程的形式表示为:

在区域 V 内 $D(\phi) = 0$

同时, 其边界条件为

在边界 S 上 $B(\phi) = 0$

则该系统可用一积分方程来代替, 并写成

$$\int_V W D(\phi) dV + \int_S \bar{w} B(\phi) dS = 0 \quad (1-16)$$

式中 W 和 $\bar{w}$ 为任意加权函数。

对离散化系统, 由于 $\phi = \sum N_i \phi_i$, 故式 (1-16) 又可近似地表示为

$$\int_V W_j D(\sum N_i \phi_i) dV + \int_S \bar{w}_j B(\sum N_i \phi_i) dS = R \quad (1-17)$$

其中 W_i 和 $\bar{w}_i$ 为离散后加权函数, R 为残量。一个好的离散化系统将使 $R = \text{最小值}$, 或 $R \rightarrow 0$ 。

在有限元分析中, 作为 Galerkin 法的最普遍形式, 就是将加权函数等同于试探函数(即 $W_i = N_i = \bar{w}_i$)。于是

$$\int_V N_i D(\Sigma N_i, \phi_i) dV + \int_S N_i B(\Sigma N_i, \phi_i) dS \rightarrow 0$$

在以后例题中将指出上式也能导出与式(1-15)相似的单元方程组。

几乎所有能用有限元法求解的物理问题, 都可按下述通式表达其单元方程组:

$$(K^*) \{q\} = \{Q\} \quad (1-18)$$

式中: $(K^*) = \text{单元性质矩阵}$

$\{q\} = \text{节点上基本未知量向量}$

$\{Q\} = \text{单元节点上外加参数向量}$

第5步 推导整体结构刚度方程组

分析中的这个步骤是将所有各个单元方程组, 集合起来组成整个结构的刚度方程组, 或用数学式表示为

$$(K) \{q\} = \{R\} \quad (1-19)$$

其中: $(K) = \text{整体刚度矩阵} = \sum_{i=1}^M (K^*)$

$M = \text{离散模型的单元总数}$

$\{R\} = \text{节点上外加参数合成向量的集合}$

值得注意的是, 在集合过程中, 当 (K^*) 矩阵的各项元素, 为通过节点连接的不同单元所共有时, 必须将它们代散迭加。当 $\{q\}$ 或 $\{R\}$ 内有已知边界条件时, 也应在集合形成式(1-19)的过程中加以处理。

第6步 求解基本未知量

显然, 式(1-19)表示一组联立方程式。其方程总数正好等于基本未知量总数 $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。按照矩阵 (K) 的大小及对称度, 一般有两种方法可用来求解 $\{q\}$, 即

1. Gauss 消去法^[4]

2. 矩阵求逆法, 即

$$\{q\} = (K)^{-1} \{R\} \quad (1-20)$$

第7步 求解从属未知量

一旦基本未知量 $\{q\}$ 已被解出, 其它未知量就可从相应的关系式中计算求得。现举应力—应变分析为例, 其基本未知量为位移分量; 不难设想, 其应变分量可从“位移—应变”关系中求取; 而与此相应的应力分量, 则自然可由已求得的应变分量, 通过熟知的 Hooke 定律加以导出。

第8步 阐明计算结果

从有限元计算通用程序中所求得的结果, 通常以表格方式列出, 用以阐明在给定载荷条件下, 计算所得的各指定节点和单元处基本未知量及其从属物理量。然后, 分析人员可选取物体的危险截面, 并将其结果与已确立的设计准则相对照。有时计算结果也可用图象表示。图

1—6⁽²⁾所示为一钢质轮齿的有限单元网格图,以及反映两主应力差的等倾线。轮齿中危险点的部位,及其应力集中的大小均清晰可见。

另一种用来表示有限元分析结果的方法,是在不同载荷条件下形象地显示有限元模型。图1—7所示为一悬臂梁在两种不同载荷水平作用下的形状。这种综合输出法特别适用于动力分析。

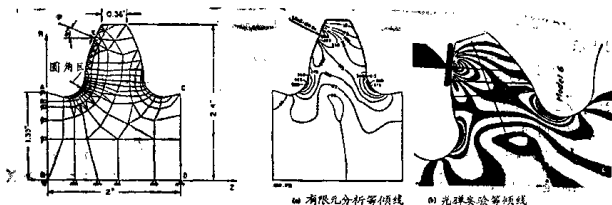
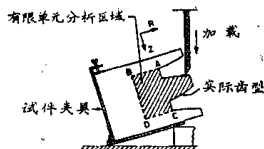


图 1—6 轮齿的有限元离散化及算出的应力分布

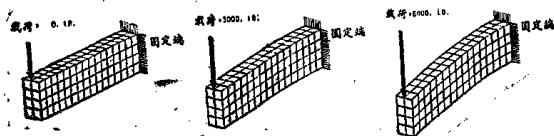


图 1—7 悬臂梁挠度的图象显示

参 考 文 献

- (1) Desai, C. S. "Elementary Finite Element Method" Prentice-Hall Inc., 1979.
- (2) Cook, R. D. "Concepts and Applications of Finite Element Analysis" John Wiley and Sons, Inc., 1974.
- (3) Ergatoudis, I., Irons, B. M., Zienkiewicz, O. C. "Curved, Isoparametric 'Quadrilateral' Elements for Finite Element Analysis", Int. J. Solids Structures, Vol. 4, 1968, pp. 31—42.
- (4) Zienkiewicz, O. C. "Why Finite Elements", Ch. 1 of 'Finite Elements in Fluids' Vol. 1, ed. by R. H. Gallagher, J. T. Oden, C. Taylor and O. C. Zienkiewicz, John Wiley and Sons, 1975.
- (5) Hsu, T. R. "Application of Finite Element Technique to the Technology Transfer Design" ASME Paper 76-DET-74, Sept., 1976.

第二章 热传导中的有限单元分析

§ 2-1 基本公式述评⁽¹⁾

(1) 热传导 Fourier 定律

参照图 2-1, 离开单位面积 dA 的热流可表示为

$$\vec{q}(\vec{r}, t) = -k \nabla T(\vec{r}, t) \quad (2-1)$$

式中: $\vec{r}$ = 方位向量

t = 时间

k = 材料的热导率

热流是一向量, 因此 $\vec{q}$ 可分解成:

$$q(x, y, z, t) = q_x(x, y, z, t)$$

$$+ q_y(x, y, z, t)$$

$$+ q_z(x, y, z, t)$$

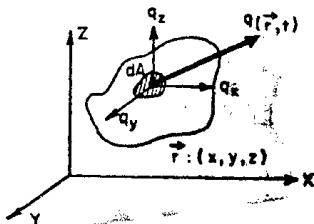


图 2-1 热流向量的分解

其中:

$$q_x(x, y, z, t) = -k_x \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \quad (2-2a)$$

$$q_y(x, y, z, t) = -k_y \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \quad (2-2b)$$

$$q_z(x, y, z, t) = -k_z \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \quad (2-2c)$$

式中: q_x, q_y, q_z = 依次为沿 x, y 和 z 方向的热流

k_x, k_y, k_z = 依次为沿 x, y 和 z 方向的热导率

(2) 流体的牛顿冷却定律

在流体介质中的热流可表示为

$$q \propto T_a - T_b$$

成:

$$q = h(T_a - T_b) \quad (2-3)$$

式中: T_a, T_b 分别为点 a 及 b 处温度

h = 传热系数

(3) Fourier 热传导方程式

在固体中温度场 $T(\vec{r}, t)$ 必须满足下列微分方程式

$$\rho c \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T(\vec{r}, t)) + Q(\vec{r}, t) \quad (2-4)$$