

中国工程热物理学会

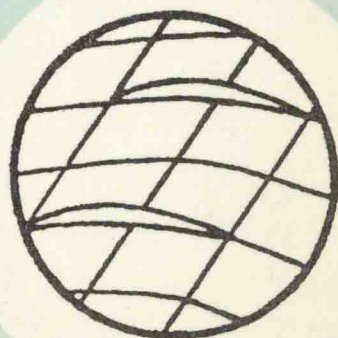
热机气动热力学学术会议

论文集

一九九六

武夷山

中国工程热物理学会编



气动目录

一、无粘、二维、三维流动

二维非结构网格无粘流场计算方法研究	韩振学、刘志坚	I -1-8
高精度 TVD 有限差分格式的自由梯度条件		
..... 顾发华、刘凤君、王松涛、王仲奇		I -9-6
在并行网络上实现叶轮机械内部流动两类流面准三元迭代并行计算		
..... 赵晓路、秦立森		I -15-6
Chakravarthy-Osher TVD 格式中音速点的处理及二维欧拉方程的求解		
..... 刘凤君、顾发华、王仲奇		I -21-7
A Navier-Stokes simulation of Flow Round Circular Cylinders by Viscous Vortex Method		
..... Jing-Chang Liu 、 Kit Lam 、 Jian-Zhong Xu		I -28-8

二、有粘、二维、三维流动

具有粘性效应的离心叶轮内部完全三元流场的数值模拟		
..... 王宁、汪庆桓		II -1-6
非正交网格下扩散项的处理方式及比较	赖焕新、吴克启	II -7-5
非正交曲线坐标下三维粘性流动数值分析	王正明	II -12-6
在冷气干扰下的叶栅绕流的控制方程及求解方法		
..... 杨弘、陈浮、王仲奇		II -18-6
高精度高分辨率迎风格式应用于不同速度范围内粘性流动	袁新	II -24-6
离心泵叶轮流场有限元计算	叶小兵、张义霞、张义同	II -30-6
小流量条件下汽轮机多级三维粘性流场的数值分析		
..... 王继宏、陈佐一		II -36-6
叶栅二维粘性流场的分区数值分析		
..... 顾发华、刘凤君、冯国泰、王仲奇		II -42-6
高超音速进气道粘性流场的分块计算	刘晶昌、徐建中	II -48-6
旋转系统内流动分离的渐进结构方程	黄修乾、徐建中	II -54-6

汽轮机调节级静叶片排内流动数值分析	朱斌、周凡贞、蒋洪德	II -60-8
汽轮机分流叶栅内部流动数值计算	朱斌、郭朝阳、蒋洪德	II -68-6
一种新的 K 方程转捩湍流模型	徐星仲、朱斌、蒋洪德	II -74-8
旋转盘腔流场的实验研究 —(1) 平均速度与压力分布	吉洪湖、S. C. Cheah、H. Iacvides、 D. C. Jackson、B. B. Launder	II -82-6
透平叶栅气膜冷却效果的数值研究	黄伟光、陈乃兴	II -88-5
用空间推进法求解 SRNS 方程	刘海涛、徐建中	II -93-6

三、非定常流动

完全气体一元变截面不定常带激波流动的一套显式解析解	蔡睿贤	III -1-6
跨音多级轴流压气机对突变型扰动的动态响应	吴虎、廉小纯、崔建勇	III -7-4
压缩系统喘振主动控制方式的数值分析	许振华、陈静宜、聂超群	III -11-7
使用非定常无反射边界条件模拟上游尾迹 / 叶片排干扰问题	王巍、赵晓路	III -18-8
求解非定常流的快速新方法 — 时域参数多项式法	陈佐一、俞瑞芳	III -26-5
转轮内全三维可压缩理想流体非定常有旋流动的展势函数及其变分原理	刘高联	III -31-5

四、设计及优化

求解跨音速粘性流动反问题的有限体积法	海灏、陈乃兴	IV -1-5
应用遗传算法进行透平跨音速叶栅的优化设计	李军、丰镇平、沈祖达、常建忠	IV -6-6
汽轮机调节级静叶栅中采用多分流叶栅的研究	陶正良	IV -12-6
叶片厚度分布的优化设计	蔡显新、童鹤贵、初月平	IV -18-5
离心压气机叶轮弯曲母线造型及叶片弯曲减少二次流损失机理初步探讨	赵晓路	IV -23-8

国产三缸三排汽二十万千瓦老汽轮机高中压缸气动热力性能准三维分析	张冬阳、徐星仲、蒋洪德	IV -31-8
周向掠形对后掠转子流场的影响	周亚峰	IV -39-6

五、实验研究

分离流动的脉冲热线测量方法研究与应用	廖玉峰、徐诚、马大为	V -1-6
环形扩压器与下游部件匹配的试验研究	章石波、王存诚、胡小仙、李冰航	V -7-6
轴流风机内不稳定流动被动控制的研究	梁锡智、吴海	V -13-6
轴流风机转子内尖区流场的三维 LDV 测量	马宏伟、蒋浩康、聂超群、邢叔楚	V -19-6
单转子压气机设计状态和近失速状态出口三维紊流流场		
第一部分 压气机转子出口三维平均流场	马宏伟、蒋浩康	V -25-6
单转子压气机设计状态和近失速状态出口三维紊流流场		
第二部分 压气机转子出口三维紊流特性	马宏伟、蒋浩康	V -31-5
压气机转子尾迹三维紊流特性分析	马宏伟、蒋浩康	V -36-6
冷气喷射对直叶栅型面压力及气动损失分布影响的实验研究	陈浮、杨弘、龚存忠、冯国泰、王仲奇	V -42-6
离心压缩系统喘振先兆的实验研究	聂超群、戴冀、廖生芳、陈静宜	V -48-6
叶顶间隙对涡轮转子叶栅损失发展与分布的影响	韩万金、李晓峰、王仲奇	V -54-6
压气机叶栅壁面拓扑和二次流结构分析	钟兢军、苏杰先、王仲奇	V -60-6
进口附面层厚度对弯叶片扩压叶栅损失的影响	钟兢军、刘毓国、苏杰先、王仲奇	V -66-6
叶片正弯对间隙流动的影响	韩万金、黄洪雁、侯建东、王仲奇	V -72-5
大径高比环形叶栅中采用弯曲叶片以及后置叶列对静叶出口流场影响的实验研究	宋彦萍、王仲奇、卢文才、陈浮	V -77-6

采用电控可调壁对离心压气机特性场及喘振主动控制的实验研究	邵振麒、沈勇、许永钰	V -83-6
------------------------------------	------------	---------

六、其他

离心风机降噪技术探索 (一)	汪庆桓、吕亚东、喻达之、王宁、汤育红	VI -1-4
流体机械部件气动匹配问题的理论分析	章石波、王存诚	VI -5-5
考虑气动力的旋转叶片动态变形问题弹性力学分析	高金华、谭发生	VI -10-6
凑合反推法 — 流体力学变分原理建立的一条新途径	何吉欢	VI -16-6
两种上腔室芯部结构的流体力学研究	沈秀中、于平安、杨冠岳	VI -22-8

二维非结构网格无粘流场计算方法研究

韩振学 刘志坚

北京航空航天大学 404 教研室

【摘要】本文对二维非结构网格无粘流场计算方法作了初步探讨,采用 Roe 的差分分裂有限体积格式计算了绕流 NACA0012 翼型无粘流动,研究了非结构网格计算方法的收敛性以及计算结果的准确性。本文采用显式 Runge-Kutta 三步方法进行 Euler 方程组时间离散,采用最大当地时间步长和显式残差平均等加速措施,加速计算格式的收敛,效果显著。试验了远场条件修正对小计算域流场计算结果的影响。比较了非结构化网格计算结果和结构化网格有限差分计算结果,研究了非结构化网格计算方法的精度。

关键词: 计算流体力学, 非结构网格, EULER 方程, 迎风差分。

一. 前言

计算流体力学发展到 80 年代以后,对较简单拓扑结构域中流动的计算,已有了高效率的方法和程序。但复杂几何结构中流动的计算仍缺乏有效的手段,主要困难在于构造变化平滑的贴体网格。为了解决这个问题,已提出的方法有混合网格、重叠网格、网格加密,以及自适应网格等。这些方法都是在网格复杂程度和计算方法复杂程度之间进行折衷,效果并不理想。

这时,非结构网格以其独特的处理方法显示了它的优越。非结构网格与结构网格相比,在网格划分的灵活性上远远超出,这正好是复杂区域划分所必需的。非结构网格可在某一局部加密,修改而不影响其余部分,用于自适应网格时其方便处也是结构网格所无法比拟的。非结构网格划分的灵活性和加密、修改的方便,使它得以在复杂几何结构流动的计算中得以充分应用,十几年来成为计算流体力学界的潮流,得到了大发展。

近几年来,迎风格式在非结构网格流场计算被广泛采用,如 Frink[1]、Barth[2] 等。迎风格式根据特征线方向决定所使用的流场信息,不需要再添加人工粘性项,主要有 Godunov 格式、Roe 格式、Osher 格式等。Godunov 格式被认为是第一个成功的守恒型迎风格式。Godunov 格式在网格界面上求解界面两边当地流场参数互相干扰的结果(即黎曼问题),以获得界面上的通量。Godunov 格式求解的是黎曼问题的精确解,需迭代多次,比较耗时。Roe 等格式则是在网格界面上采用黎曼问题的近似解,以获得界面上的所谓“数值通量”。这些格式的空间精度取决于网格单元界面处流场参数的计算方法。在结构化网格方法中,可采用 MUSCL 插值公式,由网格中心值得到网格单元界面处流场参数,较易获得高阶空间精度。但是,在非结构化网格流场计算时,高阶空间精度不易简单实现。

本文在三角划分的计算域上,进行了二维无粘流场数值计算。采用 Roe 格式离散二维 Euler 方程组,三步 Runge-Kutta 时间推进方法,计算 NACA0012 翼型二维亚音以及跨音流场。研究了非结构网格计算格式的收敛性,并与结构网格有限差分方法的计算结果进行了比较。

二. 控制方程

二维无粘流动由 Euler 方程组描述, 其积分形式为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \bar{Q} dv + \oint_{\partial\Omega} \bar{F}(\bar{Q}) \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (1)$$

其中 Ω 为计算区域, $\partial\Omega$ 区域边界, V 为控制体面积。

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \bar{F}(\bar{Q}) \cdot \hat{n} = (V \cdot \hat{n}) \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E + p \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式中, $\hat{n} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y)$ 为网格单元边界的单位法向量, ρ 为密度, u, v 为 x, y 坐标的速度分量, p 为压力, E 为总能量, 由状态方程可得:

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)} + \rho \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

三. 计算格式

用有限体积法对 Euler 方程组进行离散时, 把流场参数存储在三角单元中心上, 以三角单元为控制体积的方法称为单元中心法。方程 (1) 离散后, 有如下形式

$$V_i \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial t} + \bar{R}_i = 0 \quad (2)$$

$$\bar{R}_i = \sum_{k=1}^3 \bar{F}_{i,k} \cdot \Delta \bar{s}_{i,k}$$

其中, i 为单元编号, k 为单元 i 的边界编号。 $\Delta \bar{s}_{i,k}$ 为边界线的向量长度, 其方向为边界的外法向方向。 $\bar{F}_{i,k}$ 为单元界面上的矢通量, 由 Roe 格式[3]给出:

$$\bar{F}(\bar{Q}^+, \bar{Q}^-; \hat{n}) = \frac{1}{2} [\bar{F}(\bar{Q}^+; \hat{n}) + \bar{F}(\bar{Q}^-; \hat{n}) - |A(\bar{Q}; \hat{n})| (\bar{Q}^+ - \bar{Q}^-)] \quad (3)$$

式中, $\bar{Q}^-, \bar{Q}^+$ 是边界左右的流场参数, $\bar{Q}$ 为单元边界上 Roe 的平均参数,

$$\bar{A}(\bar{Q}) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Q}}, \text{ 为单元界面处的 Roe 平均通量雅可比。根据 Roe 差分分裂定}$$

义], 方程 (3) 右边第三项为

$$|\bar{A}|(\bar{Q}^+ - \bar{Q}^-) = \bar{T}|\bar{\Lambda}|\bar{T}^{-1}\Delta\bar{Q} = |\Delta\bar{F}_1| + |\Delta\bar{F}_3| + |\Delta\bar{F}_4|$$

式中

$$|\Delta F_1| = |\bar{U}| \left\{ \left(\Delta\rho - \frac{\Delta p}{\bar{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)/2 \end{bmatrix} \pm \bar{\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u - \hat{n}_x \Delta U \\ \Delta v - \hat{n}_y \Delta U \\ \bar{u} \Delta u + \bar{v} \Delta v - \bar{U} \Delta U \end{bmatrix} \right\}$$

$$|\Delta F_{3,4}| = |\bar{U} \pm \bar{a}| \left(\frac{\Delta p \pm \bar{\rho} \bar{a} \Delta U}{2\bar{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \pm \hat{n}_x \bar{a} \\ \bar{v} \pm \hat{n}_y \bar{a} \\ \bar{H} \pm \bar{U} \bar{a} \end{bmatrix}$$

其中

$$\bar{U} = \bar{u}\hat{n}_x + \bar{v}\hat{n}_y, \Delta U = \Delta u\hat{n}_x + \Delta v\hat{n}_y$$

构造一阶精度格式时,对单元中心法,边界左右的流场参数 $\bar{Q}^-$, $\bar{Q}^+$ 即可分别取左右两单元的平均参数。对二阶精度,则利用 Taylor 级数,由单元中心值求得边界中点的值作为所需参数:

$$\bar{q}(x, y, z) = \bar{q}(x_0, y_0, z_0) + \nabla \bar{q}_0 \bullet \Delta \bar{r} + O(\Delta r^2) \quad (4.1)$$

$$\text{其中 } q \equiv [\rho, u, v, p]^T$$

由于 $\iint_{\Omega} \nabla \bar{q} dV = \oint_{\Omega} \bar{q} \hat{n} ds$, 所以

$$\nabla q_0 = \frac{1}{V_{\Omega}} \oint_{\Omega} \bar{q} \hat{n} ds \quad (4.2)$$

这里需注意对积分路径的选择。网格结点法中依控制体边界进行积分即可。单元中心法如按此进行,则包含的信息太少,影响精度。Frink[1]提出了一个简便方法,对三角元各结点的参数值,由包含它的各单元中心值进行加权平均:

$$q_n = \left(\sum_{i=1}^N \frac{q_{0,i}}{r_i} \right) / \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i} \right) \quad (5)$$

n 为该结点号, $0, i$ 表示周围单元 i 的中心, N 为周围单元的数目。

$$r_i = [(x_{0,i} - x_n)^2 + (y_{0,i} - y_n)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

得到三角形各结点的参数值后, 沿控制体三角形边界积分(4.2), 计算 ∇q_0 。

四. 时间推进

在方程(2)中, 时间导数的离散方式有显式和隐式之分。隐式方法可以在较大的时间步长仍有较好的稳定性, 但在非结构网格上不易实现完全隐式方法。本文中采用显式 Runge-Kutta 多步方法对方程(2)中的时间导数进行离散, 用时间推进方法计算定常流场。

n 步 Runge-Kutta 法为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_i^{(0)} &= \bar{u}_i^n \\ \bar{u}_i^{(1)} &= \bar{u}_i^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t}{V_i} \bar{R}_i^{(0)} \\ \bar{u}_i^{(2)} &= \bar{u}_i^{(0)} - \alpha_2 \frac{\Delta t}{V_i} \bar{R}_i^{(1)} \\ &\dots \\ \bar{u}_i^{(m)} &= \bar{u}_i^{(0)} - \alpha_m \frac{\Delta t}{V_i} \bar{R}_i^{(m-1)} \\ \bar{u}_i^{n+1} &= \bar{u}_i^{(m)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{其中 } \alpha_k = \frac{1}{m-k+1}, k=1, \dots, m$$

对定常流动, 推进时不一定要采用标准的 Runge-Kutta 系数 α_k , 可以针对不同的空间离散格式, 得到时间优化的系数。

本文采用了三步 Runge-Kutta 法进行积分, 系数为 $\alpha_1 = 1/3, \alpha_2 = 1/2, \alpha_3 = 1$ 。

五. 加速措施

通常, 非结构网格程序求解的速度比相应结构网格程序慢, 但采用了一些加速措施后, 仍能达到较快的速度。本文采用最大当地时间步长和残差平均技术, 以加速定常流场计算的收敛速度。

当地时间步长以各单元局部最大 CFL 条件为上界, 计算单元局部的时间步长 Δt_i 。这是加快时间推进法收敛速度的有效方法之一。在本文计算中, 取

$$\Delta t_i \leq CFL \frac{V_i}{A_i + B_i} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad A_i &= (|u_i| + a_i) S_i^{(x)} \\ B_i &= (|v_i| + a_i) S_i^{(y)} \end{aligned}$$

V_i 为单元面积, a_i 为当地音速, u_i 、 v_i 为当地速度分量, $S_i^{(x)}$ 、 $S_i^{(y)}$ 为单元在 x 、 y 方向的投影的长度。 CFL 数由 CFL 条件决定, 三步 Runge-Kutta 方法中最大可取 1.5。

残差平均把各单元残差与其相邻单元的残差进行平均, 通过如下算子进行残差光滑。

$$\bar{R}_i = R_i + \varepsilon \nabla^2 \bar{R}_i, \quad \text{其中} \quad \nabla^2 \bar{R}_i = \sum_{j=\kappa(i)} (\bar{R}_j - \bar{R}_i) \quad (8)$$

下标 j 表示与单元 i 共有边界 κ 的单元的编号。

方程组 (8) 的求解可采用隐式方法和显式方法。由于隐式方法计算工作量较大, 本文采用 Jacobi 迭代方法求解方程组 (8) :

$$\bar{R}_i^{(m)} = (R_i + \varepsilon \sum_{j=\kappa(i)} \bar{R}_j^{(m-1)}) / (1 + \varepsilon \sum_{j=\kappa(i)} 1) \quad (9)$$

在本文计算中, 残差平均在 Runge-Kutta 时间推进步的每步都进行两次迭代 (即 $m=1, 2$), 取 $\varepsilon=0.5$ 。

六. 边界条件

对于单元中心法和网格结点法, 边界条件的处理有所不同。网格结点法可参照结构网格进行处理, 单元中心法则自有其处理方法, 而且不同研究者的处理也不尽相同。本文中采用单元中心法, 做了如下处理。

对远场边界条件处理, 如为亚音流动, 根据特征线方向计算出黎曼不变量

$$R^\pm = U \pm \frac{2a}{\gamma - 1} \quad \text{及单元界面上的熵 } s \text{ 和切向速度 } V, \text{ 然后求出单元界面上的流场参}$$

数; 如为超音流动, 则流入边界上所有参数都由自由流决定, 流出边界上的参数由内流外插。

如果采用较小的计算域, 对远场边界还需进行修正, 不能直接使用自由流参数。远场修正的作法是, 以小扰动理论求出远场边界处的速度值, 代替来流速度用于处理边界条件[4]。

固壁边界利用“虚元”和“镜像”参数处理方法, 将固壁边界“虚元”中心速度值置为内单元中心的值减去固壁边界法向分量, 密度、压力则置为内单元中心值, 确保零质量和能量通量。

七. 计算结果分析

本文以绕流 NACA0012 翼型无粘流动为算例, 研究非结构网格流场计算方法的收敛性, 计算结果的准确性, 以及计算方法的效率。计算的两种来流工况分别是: 1. 来流马赫数 $M_\infty = 0.63$, 攻角 $\alpha = 2.0^\circ$; 2. 来流马赫数 $M_\infty = 0.80$, 攻角 $\alpha = 1.25^\circ$ 。

本文采用的三角形非结构网格是由 181×31 结构化四边形网格剖成的, 共计 5548 个节点, 10800 个三角形单元。计算域外边界距离翼型表面四个弦长, 翼型附近局部网格见图 1。

本文采用了残差平均技术以加速收敛。在实际计算跨音流场时, 如不使用残差平均, CFL 数只能取到 0.8, 进行平均后则可取 2.0。图 2 对来流 $M_\infty = 0.80$, 攻角 $\alpha = 1.25^\circ$ 时, 使用残差平均和不使用残差平均两种情况的收敛史作了比较。进行残差平均后时间推进步减少到原格式的 40% 左右。本文采用的残差平均方法, 每推进时间步比原格式仅增加 20% 的计算量。另外, 在计算过程中先使用一阶精度格式, 达到一定精度后再使用二阶格式, 所以图 2 的收敛史中有一次突跃。同时, 从图 2 可看到, 本文采用的残差平均方法对空间一阶格式和空间二阶格式均有显著的加速收敛效果。

图 3 是来流 $M_\infty = 0.63$, 攻角 $\alpha = 2.0^\circ$ 的计算结果。在计算此算例时, 计算域仅为 4 倍弦长。因在用一阶精度格式计算时没有进行远场条件修正, 故升力系数较用二阶格式时低, 与文献[5]给出值相比误差较大。采用远场条件修正后, 升力系数达到了 $C_l = 0.3144$, 与文献[5]的结果 $C_l = 0.315$ 吻合很好。图 3 中给出了翼型表面压力分布及流场中的等 M 数线图。从翼型表面压力分布 (图 3(a)) 来看, 本文非结构网格计算结果与文献[5]中的结构化网格有限差分结果完全符合。图 3(b) 是翼型附近局部等马赫数线。

图 4 是来流 $M_\infty = 0.80$, 攻角 $\alpha = 1.25^\circ$ 的计算结果。由翼型表面压力分布 (图 4(a)) 可以看出, 在翼型上表面本文计算结果文献[5]基本一致, 但在翼型下表面的弱激波处有较大差别, 表明本文计算格式分辨弱激波能力较差。本文计算得到的翼型升力系数为 $C_l = 0.33334$, 略高于文献[5] $C_l = 0.30997$ 。图 4(b) 是本文非结构网格计算结果的等马赫数线分布。

八. 结束语

本文在非结构网格上进行了绕流 NACA0012 翼型无粘流动的流场计算, 研究了非结构网格计算方法的收敛性, 计算结果的准确性, 以及计算方法的效率。

本文所采用的最大当地时间步长以及显式残差平均方法, 对 Roe 格式三步 Runge-Kutta 时间推进方法有显著的加速收敛效果。

与结构网格有限差分的结果相比, 本文非结构网格计算结果基本可靠, 但分辨弱激波能力较差, 其原因是因为 Roe 格式大的数值粘性还是非结构网格计算的空间精度较低, 尚有待于作进一步的研究。

九. 参考文献

1. Neal T. Frink, *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 1, Jan 1992, p70-77
2. Barth & C. J. Dennis, *AIAA-89-0366*

3. P. L. Roe, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 18, 1986, p337-365
4. J.L. Thomas and M.D. Salas, *AIAA-85-0020*
5. T.H. Pulliam, D.C. Jespersen & R.E. Childs, *AIAA-83-0344*

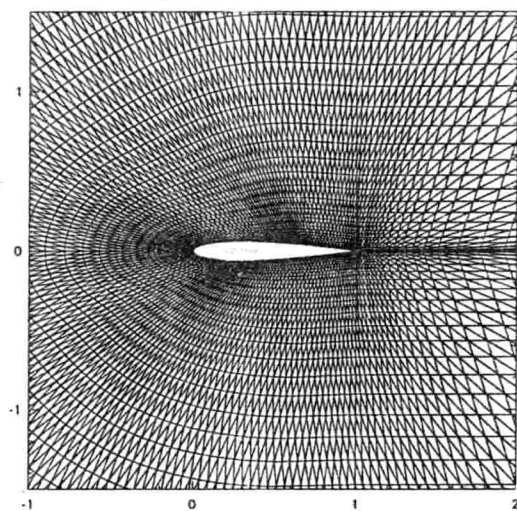


图 1(a) NACA0012 翼型表面附近网格

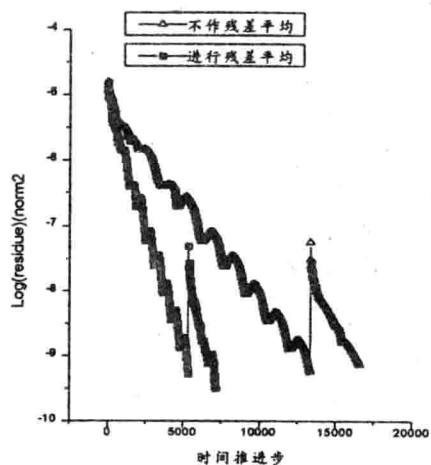


图 2 收敛历史比较

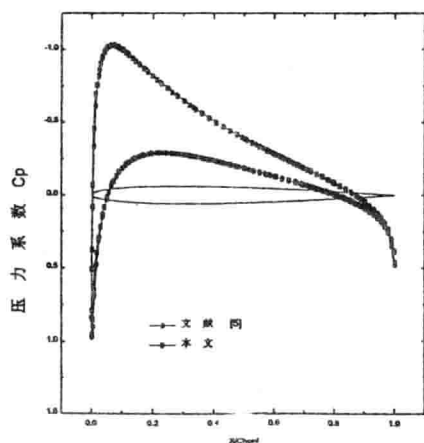


图 3(a) 翼型表面压力分布
 $M_\infty = 0.63, \alpha = 2.0^\circ$

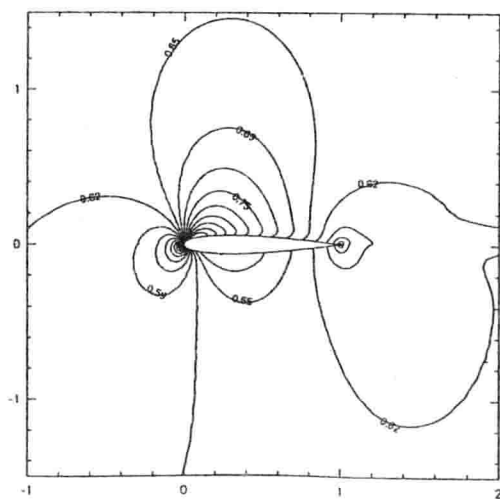


图 3(b) 翼型表面附近等马赫数线分布
 $M_\infty = 0.63, \alpha = 2.0^\circ$

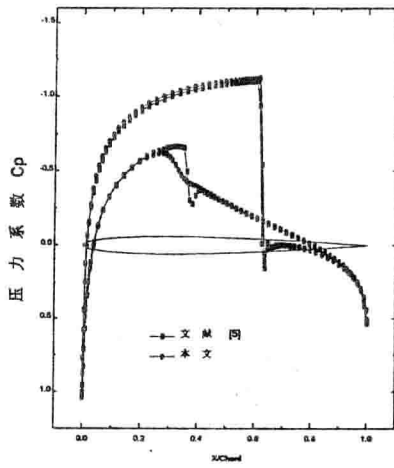


图 4(a) 翼型表面压力系数分布
 $M_{\infty} = 0.80, \alpha = 1.25^\circ$

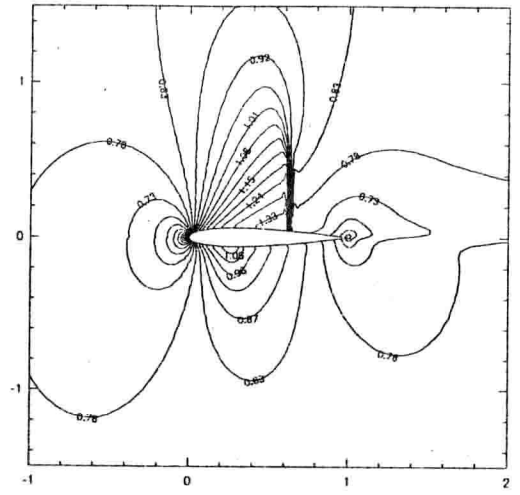


图 4(a) 翼型附近等马赫数线分布
 $M_{\infty} = 0.80, \alpha = 1.25^\circ$

高精度 TVD 有限差分格式的自由梯度条件

顾发华 刘凤君 王松涛 王仲奇

(哈尔滨工业大学241教研室, 150001)

【摘要】 为了消除畸变网格单元界面雅可比转换行列式的变化对通量限制器比较结果的影响, 本文提出了高精度 TVD 格式应具有的自由梯度性质, 并分别讨论了 Osher 和 Harten TVD 格式中单元界面雅可比转换行列式的计算方法。算例表明本文的方法保证了差分格式的自由流和自由梯度性质, 提高了计算方法的稳定性, 使高精度 TVD 格式在畸变网格上得以实现。

关键词 气动方程 TVD 格式 畸变网格 自由梯度

0 引言

在曲线坐标系中采用高精度 TVD 格式进行叶栅或飞行器等具有复杂几何形状物体的流场计算时, 常常对网格的正交性和均匀性提出很高的要求。这除了与任意曲线网格引起格式截断误差的变化外, 还与高精度 TVD 格式广泛采用的通量限制器的特点有关。守恒性气动方程组的高精度 TVD 有限差分格式一般通过使用通量限制器加入非线性的人工粘性来构成。在曲线坐标系中, 通量限制器比较的两个因子与各自所在单元的界面雅可比转换行列式相关。为了消除畸变网格单元界面雅可比转换行列式的变化对通量限制器比较结果的影响, 本文提出了高精度 TVD 格式应具有的自由梯度性质, 并分别就 Osher 和 Harten TVD 格式进行了讨论。算例表明本文的方法保证了差分格式的自由流和自由梯度性质, 提高了计算方法的稳定性, 使高精度 TVD 格式在畸变网格上得以实现。

1 计算方法

1.1 自由梯度条件

任意曲线坐标系中守恒型二维欧拉方程表示为

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{U} = JU, \bar{E} = J(\xi_x E + \xi_y F), \bar{F} = J(\eta_x E + \eta_y F) \quad (2)$$

其中, E 、 F 为笛卡尔坐标系中的通量; J 为坐标变换雅可比行列式 $J = \partial(x, y) / \partial(\xi, \eta)$ 。

可以证明, 若取 $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ (下同), 则 J 为网格单元的面积。各度量张量为

$$\xi_x = \frac{1}{J} y_\eta, \xi_y = -\frac{1}{J} x_\eta, \eta_x = -\frac{1}{J} y_\xi, \eta_y = \frac{1}{J} x_\xi \quad (3)$$

方程(1)的守恒型时间后向显式有限差分格式为

$$J_{i,j} (U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n) = -\Delta t \left[(\bar{E}_{i+1/2,j}^n - \bar{E}_{i-1/2,j}^n) + (\bar{F}_{i,j+1/2}^n - \bar{F}_{i,j-1/2}^n) \right] \quad (4)$$

其中上标ⁿ表示时间层, 下标_{i,j}为单元中心的序号, _{i+1/2,j}和_{i,j+1/2}为单元界面的序号。

$\bar{E}_{i+1/2,j}^n$ $\bar{F}_{i,j+1/2}^n$ 为单元界面的法向逆变数值通量, 其表达式依赖于所采用的有限差分格式, 这里我们将只讨论Harten和Osher两种TVD格式, 并仅以 $\bar{F}_{i,j+1/2}^n$ 为例。无论采用何种TVD差分格式, 项 $(\bar{U}_{i,j+1} - \bar{U}_{i,j})$ 在通量差分的计算过程中均起着关键的作用。若取

$$(\bar{U}_{i,j+1} - \bar{U}_{i,j}) = U_{i,j+1} J_{i,j+1} - U_{i,j} J_{i,j} \quad (5)$$

则当 $(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = 0$, $J_{i,j+1} \neq J_{i,j}$ 时, $(\bar{U}_{i,j+1} - \bar{U}_{i,j}) \neq 0$ 。也就是说在均匀流场中当网格非均匀时, (5)式使 $(\bar{U}_{i,j+1} - \bar{U}_{i,j})$ 不为0, 因而使 $\Delta \bar{F}_{i,j}^n$ 不为0, 即不满足自由流条件。为了保证自由流条件^[2], 几乎所有文献[2,3]都把它定义为

$$\begin{aligned} (\bar{U}_{i,j+1} - \bar{U}_{i,j}) &= (U_{i,j+1} - U_{i,j}) J_{i,j+1/2} \\ J_{i,j+1/2} &= (J_{i,j} + J_{i,j+1})/2 \end{aligned} \quad (6)$$

然而, 该方法隐含的假设是单元界面的雅可比行列式 $J_{i,j+1/2}$ 等于相邻单元的雅可比行列式的算术平均。它的缺点是若单元面积变化足够大并伴随着网格正交性差时, 会造成数值通量计算的很大误差。例如, 在叶栅流场计算时会使沿流向各截面的流量不守恒。这是因为 $J_{i,j+1/2}$ 影响单元界面处 $(i+1/2,j)$ 、 $(i,j+1/2)$ 的度量张量的计算(见式(3))。由此可见, $J_{i,j+1/2}$ 的计算是单元界面度量张量计算的难点。

1.2 Osher TVD 格式

在 Osher TVD 有限差分格式^[1,2]中, 单元界面的法向逆变数值通量为

$$\bar{F}_{i,j+1/2}^n = h_{i,j+1/2} - \frac{(1-\phi)}{4} \bar{d}f_{i,j+3/2}^- - \frac{(1+\phi)}{4} \bar{d}f_{i,j+1/2}^- + \frac{(1+\phi)}{4} \bar{d}f_{i,j+1/2}^+ + \frac{(1-\phi)}{4} \bar{d}f_{i,j-1/2}^+ \quad (7)$$

其中 $h_{i,j+1/2}$ 为一阶精度数值通量, 若采用Roe迎风差分, 则有

$$h_{i,j+1/2} = f(\bar{U}_{i,j}) + \sum_{m=1}^4 df_{i,j+1/2}^m \quad (8)$$

$df_{i,j+1/2}^m$ 为通过单元界面的通量差分, 计算公式为

$$\begin{aligned} df_{i,j+1/2}^m &= \lambda_{i,j+1/2}^m \alpha_{i,j+1/2}^m r_{i,j+1/2}^m \\ \alpha_{i,j+1/2}^m &= l_{i,j+1/2}^m \cdot (\bar{U}_{i,j+1} - \bar{U}_{i,j}) \end{aligned} \quad (9)$$

λ 为 $\bar{E}$ 的雅可比矩阵的特征值, $\lambda^{1,2} = u\eta_x + v\eta_y$, $\lambda^{3,4} = u\eta_x + v\eta_y \pm c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}$ 。上式中其余变量的定义参见文献[2], 所有下标含1/2的气动参数由Roe平均计算。

首先观察一阶精度数值通量 $h_{i,j+1/2}$ 的计算公式(8)。将(3)代入, (8)式右端第一项成为

$$f(\bar{U}_{i,j}) = -\gamma_\xi E + x_\eta F \quad (10)$$

该式与雅可比行列式无关。(8)右端第二项即(9)各因子与单元界面的雅可比行列式 $J_{i,j+1/2}$ 有如下比例关系(左特征行向量 l 和右特征列向量 r 的表达式见附录):

$$\begin{aligned} \lambda &\propto 1/J_{i,j+1/2}, & l &\propto J_{i,j+1/2}, \\ r &\propto 1/J_{i,j+1/2}, & (\bar{U}_{i,j-1} - \bar{U}_{i,j}) &\propto J_{i,j+1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

该比例关系与左特征行向量和右特征列向量的表达式有关, 但各因子相乘后通量差分 $df_{i,j+1/2}^m$ 总是不含 $J_{i,j+1/2}$, 故 $df_{i,j+1/2}^m$ 与 $J_{i,j+1/2}$ 严格无关, 即一阶精度的数值通量与单元界面的雅可比行列式 $J_{i,j+1/2}$ 无关, 这样可以任意定义 $J_{i,j+1/2}$, 我们取 $J_{i,j+1/2}=1$ 。

采用三阶精度 Osher TVD 格式计算界面通量时, 我们需要通过通量限制器 minmod 运算比较 (9) 式定义的通过相邻单元界面的特征通量差分 $\sigma = \lambda \alpha$ 。即:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{j+3/2}^- &= \min \text{mod}[\sigma_{j+3/2}^-, \beta \sigma_{j+1/2}^-] & \tilde{\sigma}_{j+1/2}^- &= \min \text{mod}[\sigma_{j+1/2}^-, \beta \sigma_{j+3/2}^-] \\ \tilde{\sigma}_{j+1/2}^+ &= \min \text{mod}[\sigma_{j+1/2}^+, \beta \sigma_{j-1/2}^+] & \tilde{\sigma}_{j-1/2}^+ &= \min \text{mod}[\sigma_{j-1/2}^+, \beta \sigma_{j+1/2}^+] \end{aligned} \quad (12)$$

由 (9) 和 (11) 式可知:

$$\sigma_{i,j+1/2}^{m\pm} \propto J_{i,j+1/2} \quad (13)$$

为了减少单元面积 (单元中心雅可比行列式) 的变化和网格不正交等几何因素引起的单元界面雅可比行列式的变化对气动参数的影响, 我们同样定义 $J_{i,j+1/2}=1$ 。这样, 三阶精度的修正通量亦与单元界面的雅可比行列式无关。现在我们分析该定义的合理性:

(a) 若流场梯度不大, 则经过限制的单元界面的特征通量差分 $\tilde{\sigma}_{i,j+3/2}^\mp$ 、 $\tilde{\sigma}_{i,j+1/2}^\mp$ 和 $\tilde{\sigma}_{i,j-1/2}^\mp$ 保留原特征通量差分 $\sigma_{i,j+3/2}$ 和 $\sigma_{i,j+1/2}$ 与界面雅可比行列式的比例关系

$$\tilde{\sigma}_{i,j+3/2}^\mp \propto J_{i,j+3/2}, \tilde{\sigma}_{i,j+1/2}^\mp \propto J_{i,j+1/2}, \tilde{\sigma}_{i,j-1/2}^\mp \propto J_{i,j-1/2} \quad (14)$$

故与一阶精度通量一样, 三阶精度修正通量亦严格与界面雅可比行列式无关。

(b) 若流场梯度较大, 则经过 minmod 运算的单元界面的特征通量差分与相邻界面雅可比行列式之比有关, 因而三阶精度修正通量与下列参数有关:

$$\tilde{df}, \tilde{df} \Leftrightarrow \chi = J_{i,j+1/2} / J_{i,(j+1)+1/2} \quad (15)$$

若网格均匀, 则 $\chi=1$, 三阶精度修正通量严格与界面雅可比行列式严格无关; 若网格畸变, 则 $\chi < > 1$, 三阶精度修正通量依赖于界面雅可比行列式之比。均匀网格上的计算启发我们, minmod 运算的本质是比较相邻界面上特征通量的差分, 若流场梯度均匀相等, 则运算后的特征通量差分应与运算前相等, 即若 (以 $\tilde{\sigma}_{j+1/2}^+$ 为例)

$$\sigma_{j+1/2} / J_{j+1/2} = \sigma_{j-1/2} / J_{j-1/2} \quad (16.a)$$

则有且必须有

$$\tilde{\sigma}_{j+1/2}^+ / J_{j+1/2} = \sigma_{j+1/2} / J_{j+1/2} \quad (16.b)$$

即三阶精度修正通量这个气动参数不应依赖面积比这一几何参数, 因此我们可以定义 $J_{i,j+1/2}=1$ 。与均匀流场的守恒变量差分应为 0 被称为自由流条件一样, 我们把均匀梯度流场的 minmod 运算不改变特征通量的差分这一性质称为有限差分格式的自由梯度条件。

1.3 Harten TVD 格式

在 Harten TVD 有限差分格式^[5]中, 单元界面的法向逆变数值通量为

$$\bar{F}_{i,j+1/2}^n = 1/2 \left[\bar{F}_{i,j} + \bar{F}_{i,j+1} + \sum_{m=1}^4 r_{i,j+1/2}^m \phi_{i,j+1/2}^m \right] \quad (17)$$

$$\phi_{i,j+1/2}^m = \left(g_{i,j}^m + g_{i,j+1}^m - \psi(v_{i,j+1/2}^m + \gamma_{i,j+1/2}^m) \alpha_{i,j+1/2}^m \right) / \Delta t \quad (18)$$

$$g_{i,j}^m = \min \text{mod}(\bar{g}_{i,j+1/2}^m, \bar{g}_{i,j-1/2}^m) \quad (19)$$

$$\bar{g}_{i,j+1/2}^m = 1/2 \left[\psi(v_{i,j+1/2}^m) - (v_{i,j+1/2}^m)^2 \right] \alpha_{i,j+1/2}^m$$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= |z| & \text{if } |z| \geq \varepsilon \\ &= (z^2 + \varepsilon^2) / 2\varepsilon & \text{if } |z| < \varepsilon \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j+1/2}^m &= (g_{i,j+1}^m - g_{i,j}^m) / \alpha_{i,j+1/2}^m & \text{if } \alpha_{i,j+1/2}^m \neq 0 \\ &= 0 & \text{if } \alpha_{i,j+1/2}^m = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

这里 ε 为一正小实数, $v_{i,j+1/2}^m = \Delta t \lambda_{i,j+1/2}^m$, 其余符号的意义与Osher格式相同。

采用与Osher TVD相同的分析方法可以得到: 在Harten TVD格式中, 无论通量限制器minmod是否发生作用, 界面通量(17)都与单元界面雅可比转换行列式之比的平方 $\chi^2 = (J_{i,j+1/2} / J_{i,(j\pm 1)/2})^2$ 有关, 同样为了满足自由梯度条件, 我们需令 $J_{i,j+1/2} = 1$ 。

值得一提的是, Yee-Harten TVD格式^[3]不宜采用本文的方法。该格式中函数 ϕ 为

$$\phi_{i,j+1/2}^m = 1/2 \psi(\lambda_{i,j+1/2}^m) (g_{i,j}^m + g_{i,j+1}^m) - \psi(\lambda_{i,j+1/2}^m + \gamma_{i,j+1/2}^m) \alpha_{i,j+1/2}^m \quad (22)$$

$$g_{i,j}^m = \min \text{mod}(\alpha_{i,j+1/2}^m, \alpha_{i,j-1/2}^m) \quad (23)$$

由于(22)式右端 ψ 函数不具有与 J 的唯一比例关系

$$\lambda \propto \frac{1}{J_{i,j+1/2}} \Rightarrow \psi(\lambda_{i,j+1/2}^m) \propto \left\{ \begin{aligned} &1/J_{i,j+1/2} \\ &\delta \left((1/J_{i,j+1/2})^2 \right) \end{aligned} \right. \quad (24)$$

这里, $\delta(z)$ 是 z 的非齐次函数, 故在式(17)中不能将界面雅可比行列式 $J_{i,j+1/2}$ 消去。将(22)稍作变化

$$\phi_{i,j+1/2}^m = \frac{\lambda_{\max}}{2} \psi \left(\lambda_{i,j+1/2}^m / \lambda_{\max} \right) (g_{i,j}^m + g_{i,j+1}^m) - \psi \left(\lambda_{i,j+1/2}^m / \lambda_{\max} + \gamma_{i,j+1/2}^m \right) \alpha_{i,j+1/2}^m \quad (25)$$

$\lambda_{\max}$ 为当前单元或全局的最大特征值, 则可将 $J_{i,j+1/2}$ 定义为1进行几何参数的计算, 但格式稳定性降低。

综上所述, 我们得到了与单元中心和单元界面的雅可比行列式无关的Osher和Harten TVD格式的实现方法, 即在曲线坐标系中采用这两种TVD格式求解Euler方程时, 可以直接将 $J_{i,j}, J_{i,j+1/2}$ 定义为1来计算所有几何参数, 这样不仅避免了对单元界面雅可比行列式的近似计算, 而且可以保证自由流条件和自由梯度条件以及格式的精度。

3 数值试验结果

为了证实本文方法不依赖于网格的均匀度, 我们进行了圆弧凸包通道超音流场的数值模拟。计算网格如图1所示, 横向网格进行了加密, 定义网格加密系数为 $\beta = \Delta y_{\max} / \Delta y_{\min}$ 。图2、3分别为 $\beta=0$ 和 $\beta=10$ 时采用Osher TVD有限差分格式计算的 Ma