

中国工程热物理学会

# 传热传质学学术会议文集

上 册

一九八九年十月

# 目 录

## 上册

### 一、导热

- 解瞬态热传导问题的一种边界元法.....欧贵宝 费纪生 1-1
- 多孔材料导热系数的分析与计算.....裘烈钧 刘英义 宋东辉  
.....1-7
- 温度场的广义Hamilton量.....何家驹 1-13
- 应用网络拓扑法计算瞬态温度场的基本方程...张稼丰 庄心复 1-19
- IFHT-TCQ推荐探头冷却过程辨识-非线性导热反问题的正则解.....  
.....李希靖 何 群 1-25
- 关于非金属固体复合材料等效导热系数的理论推算...陈则韶 钱 军  
.....1-29
- 半无限大介质中垂直埋杆导热问题的温度分布.....  
.....单险峰 宋泽朴 崔凤茹 1-35
- 逆stefan问题的热平衡积分法.....任乐盛 华泽钊 孙卫东 1-41
- 非稳态导热的平均温度集总参数分析方法...孟繁煜 岳丹婷 1-47
- 第一类边界条件下板状多孔物质中分子扩散传质时升华问题的摄动解...  
.....彭仕文 程尚模 姚爱如 1-53
- 轴对称非稳态温度场的边界元计算问题.....刘光宇 刘小方 1-59

### 二、对流换热

- 竖直圆柱空间多孔介质中内热源引起的自然对流.....  
.....饶燕飞 王补宣 2-1

三维半封闭空间自然对流的流动与换热研究···任泽霏 张登富	2-7
竖窄条自然对流的换热研究·····刘志宏 宋耀祖 过增元	2-13
变截面竖通道自然对流换热实验研究·····张 强 杜康荣	2-19
翅片间距对三角形波纹翅片管换热器传热与流动的影响·····	
·····肖 清 陶文铨	2-25
螺旋管插入扭带复合强化传热试验研究·····沈 慧 周强泰	2-31
前台阶流场的传热实验研究·····段欣然 A·巴让 邹福康 李伟安	
·····	2-37
渐扩空腔内冲击式传质(传热)的实验研究····康海军 陶文铨	2-43
外掠变直径顺排管束时局部与平均换热特性的研究····张玉文 陈钟颀	
·····	2-49
空气横向绕流双侧纵向肋片管束的传热、压降实验研究·····	
·····陈 明 陆维德 孙 彬	2-55
高粘性流体在加扰流线的直内肋管内强化对流换热实验研究·····	
·····靖 增 任泽霏 张登富	2-62
紊流自由旋流在园管入口段的传热研究·····程 林 裘烈钧	2-67
黏性随温度变化的非牛顿流体在圆截面管内流动的热进口段计算·····	
·····周昆颖	2-73
透平复合冷却叶片前缘内外传热特性的实验研究最终报告·····	
·····郑际睿 吉洪潮 孔祖开 王宝官 任苓华	2-79
进口叶片旋流器强化管内传热的研究·····	
·····周强泰 沈一平 叶赛银 顾念祖	2-85
对流换热差分解的同位网格法·····杨 沫 陶文铨 陈钟颀	2-91
喷洒塔式液-液直接接触传热中液滴的运动分析·····朱龙惠	2-97
倾斜同心套管内湿饱和多孔介质中的稳态自然对流····王补宣 张 兴	
·····	2-103

局部内热源与外部加热同时作用时部分开口空腔内自然对流的数值研究 .....	夏吉良 辛明道 张洪济	2-109
异形腔体内部自然对流的有限元分析.....	陈善年 梁习锋	2-115
非等温环形助壁通道的自然对流换热研究及优化.....	李维仲 张志千 孙文策	2-121
用瞬态法对竖板封闭夹层内自然对流换热的研究—双层玻璃窗最佳间距 的确定.....	张寅平 陈则韶 葛新石	2-129
含雾空气流过等温干平板的湍流传热.....	王补宣 王斯永	2-135
水下航行器热尾流在稳定分层环境中的浮升规律.....	杨立 华顺芳 杜先之	2-141
用类比理论计算金属网格填料的放热系数.....	邱家尘	2-147
三维内肋管的换热及流阻的实验研究.....	廖光亚 高川云 王朝素	2-153
相变涂层测热实验技术研究.....	张金涛 方德润	2-159
小雷诺数球形加热区热绕流.....	邱泰庆 过增元	2-165
管内过渡态流动和换热的数值模拟.....	朱惠人 刘松龄	2-171
跨音涡轮叶片外换热系数实验研究.....	邓素卿 李静美 胡金铭	2-177
喷射旋转圆筒换热关联式的研究.....	章熙民 李汛 王泽东 马洪亭	2-183
运动壁面边界层中熵产率的研究.....	余钧 王群慧 洪春华	2-189
全封闭制冷压缩机壳内制冷剂传热特性的实验研究和数值研究.....	马虎根 蔡祖恢 丁一鸣	2-195
倾斜旋转圆管内的流动和换热.....	王立秋	2-201
热绕流流场显示的实验研究.....	常海萍 黄为民 丁中铸 过增元	2-207

单头螺纹管入口段流阻及传热性能实验研究···邓松圣 程俊国	2-213
关于冷气系统的一种通用计算方法·····吴丁毅 刘松龄	2-219
自由湍流射流传热特性研究·····陈维汉 谭清香 李文斌 宋仙桃	2-224
倾斜矩形腔内有均匀容积热源两侧壁不对称换热时的自然对流·····	
·····王启杰 王华生	2-229
对流换热过程性能的焓分析·····陈维汉 钱壬章	2-236
通道中的热斥冷吸效应·····单玲 邱泰庆 过增元	2-244
热绕流和热偶极子流的数值模拟研究·····丁中涛 常海萍 过增元	2-250
上游边界层对向上散热的水平热板自然对流换热影响的研究·····	
·····杨世铭 陈枫	2-254
大型锻件喷水冷却模拟试验·····浦保荣 曹云屏	2-260
热分离机脉冲管导热和对流混合传热的研究··高金林 陈霞 王建军	2-266
利用实测数据计算汽轮机内蒸汽对汽缸的放热系数···葛晓霞 曹祖庆	2-272
带有离散热源的竖板自然对流的数值分析···李志信 岳斌 过增元	2-277
自然对流沸腾中的热阻力·····夏春林 胡槐林 过增元	2-283

### 三、两相流、沸腾、凝结

过冷液体流经水平板槽内时过渡沸腾的实验研究···彭晓峰 王补宣	3-1
带肋片的倾斜向下表面上的凝结换热·····孔旭静 王幼纯 张舒飞	3-7
·····陈焕焯 许鹤坤	3-7
增压循环床内传热试验研究·····周乃君 沈湘林 徐益谦	3-13

“酒窝形”波状竖板自由流降膜蒸发实验研究·····	
·····李桂馥 焦芝林 张能力	3-19
自然循环系统垂直上升蒸发管内流量脉动的实验研究与数值模拟·····	
·····杨瑞昌 冯俊凯 林 红	3-25
多孔物料床中沸腾强化的极限热流密度和临界热流密度·····	
·····施明恒 蒋缘林	3-31
垂直矩形窄缝通道内气液两相流型的研究·····	
·····思 勤 王会军 黄鸿鼎	3-37
圆筒形加热炉辐射室中射流传热模型的研究和考核·····	
·····杨向平 黄祖祺 杨光炯 钱家麟	3-43
双层复合表面材料管上传热过程的研究·····	
·····刘 方 任晓红 杨熙珍	3-49

#### 下 册

过热液体在垂直管内向上流动时的汽化过程·····	
·····沙庆云 刘春祥 刘云义 沈自求	3-55
网状波纹通道中低压水蒸汽冷凝特性·····	
·····赵镇南 王中铮	3-61
流化床分布板孔内流量的随机波动及气泡生成频率的研究·····	
·····范 铭 邱海平	3-67
强化水平管内沸腾换热的实验研究·····	
·····王维城 刘志坚 王补宣 张立宁	3-72
金属表面受强激光照射出现溶池的研究·····	
·····张能力 杨继东 王补宣	3-79
双组份蒸汽水平圆管上膜状冷凝的分析解·····	
·····邬田华 程尚模	3-86
液位变动中的低液位沸腾传热·····	
·····童明伟	3-94
倾角对管外沸腾传热性能影响的实验研究·····	
·····刘 洪 陈运国	3-99

圆锥形传热面上的薄液膜沸腾·····	童明伟	3-105
两相闭式热虹吸管的强化传热实验研究·····	黄定寅 辛明道 石程名	3-111
非共沸混合工质竖管内膜状凝结放热(层流域)的理论解·····	王世学 魏杰 魏保太	3-117
水蒸汽在蛇管内的环状流冷凝·····	郭雪岩 林载祁 林纪方	3-123
大气压附近蒸汽温度(压力)对滴状冷凝传热的影响·····	宋永吉 张东昌 林纪方	3-129
流动沸腾换热系数经验公式的分析与研究·····	刘中良	3-135
周向间断T型肋槽管在大气压及高于大气压下的沸腾传热分析与实验·····	张洪济 董靛	3-141
低热负荷下薄层粒状多孔介质中的沸腾传热分析与实验·····	张英 张洪济	3-147
两相闭式热虹吸管加热段内的传热特性·····	张正芳 马同泽 陈焕倬	3-153
两相闭式热虹吸管内凝结换热的研究·····	卫红 马同泽 陈焕倬	3-159
射流冲击下高温壁面在淬冷过程中的传热特性的实验研究·····	俞坚 马重芳 雷道亨	3-165
蒸汽-不凝性气体物系在水平管外自然对流膜状凝结换热的研究·····	魏保太 刘晔 魏杰	3-171
小倾角热虹吸管传热性能实验·····	孙欣 辛明道	3-177
添加剂强化沸腾换热的研究·····	王德英 岳慧灵 丁愉如 李长久 杨善让	3-183
圆肋片管外凝固放热过程的焓法求解和分析·····	杨志荣 何杰	3-189

结霜工况下蒸发器传热实验研究……	岳丹婷	孟繁炯	潘延龄	3-195
流化床中粮食干燥过程传质的试验研究……	阮根健	刘文铁	赵广饰	
……	陆惠林	于洪彬	黄怡珉	3-201
秦裕琨				
活塞压缩机内冷却中雾化规律的试验研究……	周森泉	杨绍侃	孙嗣莹	
……				3-207
竖直狭缝通道内饱和液氮沸腾的强化传热实验研究……	潘春晖	吴裕远		
……				3-213
水平管束沸腾传热研究……	贾岫庄	沈自求	李淞平	3-221
凝华结霜气固相变传热传质研究……	孟繁炯	马鸿斌	岳丹婷	3-227
一种新的求解相变强非线性问题的数值方法……	卞伯绘	周莹莹		3-233

#### 四、辐射换热

辐射热线法计算三维辐射传热的数学模型及其应用……	谷口博	工藤一彦		
……	张永照	郭克辉	片山隆夫	永田敬博
				4-1
“辐射屏”法当量导热系数的研究及工程实验……				
……	李业发	郭宽良	同兆丰	4-7
离散传播法求解方腔内辐射换热……	万跃鹏	范维澄		4-13
瞬间激光脉冲在半透明介质内产生的温度响应……				
……	谈和平	余其铮	米歇尔·拉勒芒	4-19
具有线性散射的复合导热辐射问题的求解……	杨强生	王捷		4-25
红外干燥动力学实验研究及应用……	刘嘉智	褚治德	许铁栓	4-31
不规则形状腔体内具有多件物体时的角系数计算……	孟祥堉	张朝民		
……				4-36
热传导对通气性多孔质辐射元件性能的影响……	章建民	李焯	沈炳正	
……				4-43



## 五、换热器与传热应用

- 根据转子温度场选取最佳起动方案…张光荣 赵红娜 朱绍文 5-1
- 平面螺管换热器的优化设计研究…刘秋敏 5-7
- 双预热热媒换热器的设计与校核计算方法…夏吉良 陈远国 辛明道  
…石程名 高明聪 陈曦 5-13
- 金属铁屑填充式换热器的试验研究…刘文铁 陆惠林 于洪彬 阮根健  
…5-19
- 板式换热器的热力计算方法…杨强生 常家芳 唐忠 余辉浩  
…何立勇 顾雄德 5-25
- 管排数对叉排翅片管束换热及压力降的影响…杨小琼 李 妩 李惠珍  
…5-31
- 换热器多目标最优设计技术及其在工程实际中的应用…余 钧 5-37
- 两侧入口温度分布及入口流量分布不均匀时换热器的效率计算…余 钧 王群慧 5-43
- 关于多股流板式换热器最小传热面积组合的研究…罗 行 蔡祖恢  
…5-49
- 食品冷冻干燥过程中传热传质实验研究…姚爱如 程尚模 彭仕文  
…5-55
- 红薯干燥特性的试验研究…毛润治 田小亮 涂 颀 许建新 5-61
- 核电厂蒸汽发生器传热管破裂事故的分析研究…浦胜娣 5-67
- 三十万吨合成氨一段转化炉内流场的数值研究…张英素 张 政  
…5-73
- 内燃机缸内传热的数值分析…沈胜强 张志千 朱铁柱 5-79
- 基于热经济参数的换热器优化—兼论换热流体热容量不同引起的焓损失

.....	王立秋	裘烈钧	5	83
锯齿翅片型换热器传热及优化分析.....	胡敦燕	刘长春	宋大为	顾维藻
地膜覆盖中传热问题的理论与实验研究.....	杨纯	葛新石	程曙霞	
.....			5-96	
树状基肋型散热器的新设计方法.....	胡槐林	陈红	5-103	

## 六、热物性与传热测量技术

金属相变储热材料的量热研究.....	黄志光	肖思农	吴广忠	梅绍华
.....			6-1	
高精度自动测试系统在热管测试中的应用.....	杨斌	孙曾闰	6-7	
国产烟丝热物性的研究.....	施明恒	薛宗荣	宗祥康	唐慕萱
.....			6-13	顾芳
激光散斑照相在对流换热研究中的应用.....	宋耀祖	刘志宏	过增元	
.....			6-19	
用瞬间激光脉冲反问题方法确定半透明介质的导热系数.....				
.....	谈和平	余其铮	米歇尔·拉勒芒	6-25
涂层导热系数测试研究.....	沈坤全	姚扬猷	6-31	
高压中温准稳态绝热卡计.....	陈则韶	倪海涛	胡汉平	陈美英
.....	刘震炎	李江安	葛新石	6-37
用双热丝法同时测定介质的导热系数及导温系数.....				
.....	张永忠	程曙霞	李江安	葛新石
.....			6-43	
燃油炉火焰温度的测量与辐射换热的计算.....	张志千	陈石	吴晓敏	
.....			6-49	
差分干涉仪与图象处理技术在强迫对流换热中的应用.....				

.....	宋 潮 翁中杰	6-54
用超声波测量管内流体温度分布.....	董金 赵有信	6-61
用激光连续加热法测量微波功率管衬底材料热物性及外壳热阻.....	.....	.....
.....	顾毓沁 吴雅珏	6-65
激光波形对激光脉冲法测量误差的影响的分析和修正.....	顾毓沁 叶 茂	.....
.....	.....	6-71
测量固体材料热阻和热导率的激光探针.....	朱德忠 赵向伟	6-77

# 解瞬态热传导问题的一种边界元法

欧贵宝 费纪生

(哈尔滨船舶工程学院)

## 摘 要

本文提出了一个用边界元法分析瞬态热传导问题的方法。采用稳态问题的基本解，并通过分离变量，导出了边界积分方程，叙述了数值求解的处理过程。对二维瞬态热传导的实例进行了计算，计算结果与解析解相比较，证明了方法是方便有效的。

## 一、引 言

边界元法 (BEM) 由于降低了问题的维数，在数据准备、所需计算机时、计算机容量及计算精度等方面与区域性方法 (如有限元、有限差分) 相比具有明显的优点。十多年来，获得了迅速的发展 [1]，求解稳态热传导问题，是边界元法比较成熟的领域之一。用边界元法解瞬态热传导问题，常见的有两种方法，一种是直接解法 [2]，另一种是积分变换法 [3]。直接解法采用与时间有关的基本解，它和有限元的时空解法类似，由于对时空范围的各节点可直接求解，因此误差的影响较小；但是最后求解的代数方程组系数矩阵的阶数一般 (特别是追踪长时间的过程的情况) 是非常大的，因此需特别考虑方程组的解法。积分变换法是首先在变换域内求解，为获得关于时间的解，需采取数值反演，有时显得不太方便。本文采用稳态问题的基本解，借助格林第二恒等式，导出了边界积分方程，在数值求解时只需对边界进行离散，则可求得边界上的温度和温度梯度以及域内指定点的温度值。对实例的计算结果表明，解答具有很高的精度。

文中，采用了张量指标的求和约定。

## 二、边界积分方程

无内热源的各向同性，均质物体 (占区域为  $\Omega$ ，边界为  $\Gamma$ ) 的瞬态热传导方程可写为

$$\nabla^2 T(p, t) - \frac{1}{a} \dot{T} = 0 \quad p \in \Omega \quad (1)$$

其中  $T$  表示温度， $p$  为空间点， $t$  为时间， $a$  为热扩散率， $\dot{\phantom{T}}$  表示关于时间的一阶导数。

边界条件可表示为

$$\begin{aligned} T &= \bar{T} && \in \Gamma_1 \\ q &= \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} && \in \Gamma_2 \\ q &= -\frac{\alpha}{k} (T - T_f) && \in \Gamma_3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = \Gamma)$$

这里  $q$  为温度梯度,  $\bar{T}$ 、 $\bar{q}$  分别为边界上温度和温度梯度的给定值,  $\alpha$ 、 $T_F$  分别为周围介质的放热系数与温度,  $k$  为物体的导热系数。

初始条件为

$$T(p, 0) = T_0(p) \quad p \in \Omega \quad (3)$$

取稳定热传导问题的基本解, 即方程

$$\nabla^2 T^* + \delta(p, x) = 0 \quad (4)$$

的解  $T^*$  对控制方程(1)进行加权处理

$$\int_{\Omega} \nabla^2 T T^* d\Omega - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \dot{T} T^* d\Omega = 0 \quad (5)$$

式(4)中的  $\delta(p, x)$  为 Dirac  $\delta$  函数,  $p$  为源点,  $x$  为场点, 而基本解为

$$T^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (\text{三维})$$

$$\text{或} \quad T^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (\text{二维})$$

而  $r$  为场点到源点的距离。

应用格林第二恒等式, 并考虑式(4), 则(5)式的第一个区域积分变为

$$\int_{\Omega} \nabla^2 T T^* d\Omega = -T(p) + \int_{\Gamma} T^*(p, Q) q(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(p, Q) T(Q) d\Gamma \quad (6)$$

这里  $p$  为域内点,  $Q$  为边界点, 而  $q^* = \frac{\partial T^*}{\partial n}$

当  $p$  趋于边界点  $P$  时, 对于光滑边界点有

$$\int_{\Omega} \nabla^2 T T^* d\Omega = -\frac{1}{2} T(P) + \int_{\Gamma} T^*(P, Q) q(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(P, Q) T(Q) d\Gamma \quad (7)$$

为了将(5)式的第二个积分变为边界积分, 将时间变量和空间变量分离, 设

$$T = T(p, t) = \beta^{\ell}(t) f^{\ell}(p) \quad (8)$$

其中  $\beta^{\ell}(t)$  是与时间有关的待定常数,  $f^{\ell}(p)$  为需要选定的坐标函数,  $\ell = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  是函数的个数, 于是

$$\dot{T}(p, t) = \dot{\beta}^{\ell}(t) f^{\ell}(p) \quad (9)$$

而

$$\int_{\Omega} \dot{T} T^* d\Omega = \dot{\beta}^{\ell} \int_{\Omega} f^{\ell} T^* d\Omega \quad (10)$$

设以  $f^{\ell}(p)$  为源密度函数的泊松方程

$$\nabla^2 u^{\ell} + f^{\ell} = 0$$

的解为  $\psi^{\ell}$ , 对应的边界外法向导数为  $\eta^{\ell}$ 。考虑到(10)式中的积分  $\int_{\Omega} f^{\ell} T^* d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla^2 u^{\ell} T^* d\Omega$  与积分  $\int_{\Omega} \nabla^2 T T^* d\Omega$  的相似性, 则有与(6)、(7)式类似的等式

$$-\int_{\Omega} f^{\ell} T^* d\Omega = -\psi^{\ell}(P) + \int_{\Gamma} T^*(P, Q) \eta^{\ell}(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(P, Q) \psi^{\ell}(Q) d\Gamma \quad (11)$$

$$\square -\int_{\Omega} f^{\ell} T^* d\Omega = -\frac{1}{2} \psi^{\ell}(P) + \int_{\Gamma} T^*(P, Q) \eta^{\ell}(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(P, Q) \psi^{\ell}(Q) d\Gamma \quad (12)$$

将(12)代入(10)再与(7)一并代入(5)得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} T(P) + \int_{\Gamma} T^*(P, Q) q(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(P, Q) T(Q) d\Gamma \\ & + \frac{1}{a} \left\{ -\frac{1}{2} \psi^{\ell}(P) + \int_{\Gamma} T^*(P, Q) \eta^{\ell}(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(P, Q) \psi^{\ell}(Q) d\Gamma \right\} \dot{\beta}^{\ell} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

于是，瞬态热传导问题的控制方程(1)转化为(13)式所表示的边界积分方程。

## 二、离散处理

下面以二维问题为例，讨论对(13)式进行离散处理的方法。

现将边界离散成 \$n\$ 个单元，假设在某个单元上 \$T\$、\$q\$、\$\psi\$、\$\eta\$ 均为常数，即采用常数边界单元，并将节点取在单元中点，于是在(13)式中的 \$T\$、\$q\$、\$\psi\$、\$\eta\$ 都可以是到积分号外，对于第 \$i\$ 个节点(13)式变为

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} T_i + \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma - \sum_{j=1}^n T_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \\ & + \frac{1}{a} \left\{ -\frac{1}{2} \psi_i^{\ell} + \sum_{j=1}^n \eta_j^{\ell} \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma - \sum_{j=1}^n \psi_j^{\ell} \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right\} \dot{\beta}^{\ell} = 0 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} T^*(P_i, Q) d\Gamma \\ H_{ij} &= \begin{cases} \int_{\Gamma_j} q^*(P_i, Q) d\Gamma & (i \neq j) \\ \int_{\Gamma_j} q^*(P_i, Q) d\Gamma + \frac{1}{2} & (i = j) \end{cases} \end{aligned}$$

则上式变为

$$\begin{aligned} & H_{ij} T_j - G_{ij} q_j + \frac{1}{a} (H_{ij} \psi_j^{\ell} - G_{ij} \eta_j^{\ell}) \dot{\beta}^{\ell} = 0 \\ & (j = 1, 2, \dots, n, \ell = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

对于 \$n\$ 个节点，可得到类似的 \$n\$ 个方程，将它们组合在一起，写成矩阵形式为

$$[H]\{T\} - [G]\{q\} + \frac{1}{a} ([H]\{\psi\} - [G]\{\eta\}) \dot{\beta} = 0 \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \{T\} &= [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n]^T \\ \{q\} &= [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \\ \{\dot{\beta}\} &= [\dot{\beta}^1 \ \dot{\beta}^2 \ \dots \ \dot{\beta}^N]^T \end{aligned}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix}, \quad [G] \text{ 类似}$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1N} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nN} \end{bmatrix}, \quad [\eta] \text{ 类似}$$

值得指出的是，这里的矩阵  $[H]$ ， $[G]$  与稳态问题的完全相同。

现取函数  $f^{\ell}$  的个数  $N$  与边界节点数相等。即  $N = n$ ，由 (9) 式有

$$\{\dot{T}\} = \{T_1^{\circ} \ T_2^{\circ} \ \dots \ T_n^{\circ}\}^T = \begin{bmatrix} f_1^1 & f_1^2 & \dots & f_1^{\ell} & \dots & f_1^n \\ f_2^1 & f_2^2 & \dots & f_2^{\ell} & \dots & f_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_n^2 & \dots & f_n^{\ell} & \dots & f_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \dots \\ \beta^{\ell} \\ \dots \\ \beta^n \end{Bmatrix}$$

或简写为

$$\{\dot{T}\} = [F]\{\beta\} \quad (15)$$

若选取的  $n$  个函数  $f^{\ell}$  ( $\ell = 1, 2, \dots, n$ ) 是线性独立的，则矩阵  $[F]$  为正定方阵可求逆，令

$$[E] = [F]^{-1}$$

则

$$\{\beta\} = [F]^{-1}\{\dot{T}\} = [E]\{\dot{T}\} \quad (16)$$

将 (16) 代入 (14)，并记

$$[M] = \frac{1}{a} ([M][\psi] - [G][\eta])[E] \quad (17)$$

称其为变温矩阵，则 (14) 式变为

$$[H]\{\dot{T}\} + [M]\{\dot{T}\} = [G]\{q\} \quad (18)$$

将上式与求解稳态热传导问题的代数方程相比，其差别只是多了第二项，并且与有限元解瞬态问题的方程完全相似 [4]。考虑边界条件，将方程 (18) 重新排列，并采用差分格式表示  $\{\dot{T}\}$ ，从初始时刻开始，递推则可求得某一时间间隔的各时刻的边界节点的温度和温度梯度值。

若将 (11) 代入 (10) 并与 (6) 一起代入 (5)，则得到区域内的点的温度与边界节点的温度、温度梯度的关系式，然后采用相同的离散处理，对于第  $i$  个内点  $p_i$  有

$$T(p_i) = \bar{G}_{ij} q_j - \bar{H}_{ij} T_j + \frac{1}{a} \{-\psi^{\ell}(p_i) + \bar{G}_{ij} \eta_j^{\ell} - \bar{H}_{ij} \psi_j^{\ell}\} \beta^{\ell} \quad (19)$$

( $\ell, j = 1, 2, \dots, n$ )

这里  $\beta^{\ell}$  仍由 (16) 确定，而

$$\bar{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^*(p_i, Q) d\Gamma$$

$$\bar{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} T^*(p_i, Q) d\Gamma$$

于是当求得了边界节点的温度和温度梯度后，则可由式(19)求得域内任意点的温度值。

现在还必须解决函数  $f^l$  的选取问题，其选取方案不是唯一的，可选取

$$f^l(p) = R(P_l, p)$$

其中  $R(P_l, p)$  为节点  $P_l$  到场点  $p$  的距离。此时

$$\psi = -\frac{1}{9} R^3 \quad (20)$$

### 三、计算实例

为考查上述方法的有效性，编制了计算机程序，在 IBM 微机上计算了如下具有解析解的实际例子。

无限大平板墙，厚度为 2，初始温度沿板厚分布为  $T_0 = 100(1-x^2)$ ， $(-1 \leq x \leq 1)$ ，板外介质温度  $T = 0$ ，这是一个一维问题，我们按二维求解，考虑其对称性取其计算模型如图 1。

将边界离散成 30 个单元，30 个节点，并在域内选取了一个内点 (0.45, 0.25)。取热扩散系数  $a = 5$ ，时间步长  $\Delta t = 0.008$ ，逐次运算 20 次，所用机时约四分钟。计算结果与解析解 [5] (取级数解的前 10 项) 比较见表 1。

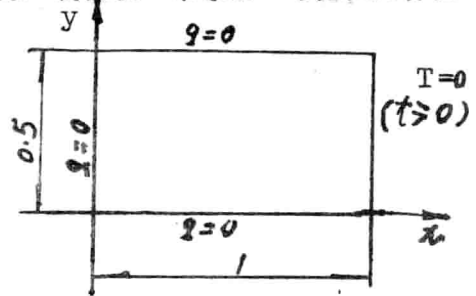


图 1 无限大平板墙的计算模型

表 1

axt	对称面上 ( $x = 0$ )		距对称面 0.45 处 ( $x = 0.45$ )		
	BEM	解析解	BEM (边界点)	BEM (域内点)	解析解
0.04	91.86	92.00	71.93	71.86	71.86
0.08	83.98	84.08	64.92	64.86	64.75
0.12	76.51	76.49	58.66	58.61	58.50
0.16	69.55	69.43	53.07	53.02	52.94
0.20	63.15	62.96	48.05	48.00	47.93
0.24	57.29	57.07	43.52	43.48	43.42
0.28	51.95	51.71	39.43	39.39	39.33
0.32	47.10	46.86	35.73	35.70	35.63
0.36	42.70	42.45	32.38	32.35	32.28
0.40	38.70	38.46	29.35	29.32	29.25
0.44	35.08	34.85	26.60	26.57	26.50
0.48	31.79	31.57	24.10	24.08	24.01
0.52	28.28	28.61	21.84	21.83	21.75
0.56	26.12	25.92	19.80	19.78	19.71
0.60	23.67	23.48	17.95	17.93	17.86
0.64	21.45	21.28	16.27	16.25	16.19
0.68	19.44	19.28	14.74	14.73	14.66
0.72	17.62	17.46	13.36	13.35	13.28
0.76	15.97	15.82	12.11	12.10	12.03
0.80	14.48	14.34	10.98	10.96	10.90



#### 四、结 语

由上述分析和算例可见,对于无内热源的瞬态热传导问题,我们采用了稳态问题的基本解,并将变量分离,导出了不含域内积分的边界积分方程,对边界进行离散,得到了包含变温矩阵的代数方程组,对于三类边界条件都可应用时间差分求解。虽然我们采用了最简单的常数单元,仍然获得了很满意的计算结果。显然,本法很容易地推广到解三维问题。

#### 参 考 文 献

1. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles and L.C. Wrobel, Boundary Element Techniques, ed., Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1984.
2. M. Dubois and M. Buysse, Transient heat transfer analysis by boundary integral equation method, in: New Development in Boundary Element Methods, ed., by C.A. Brebbia, CML Publications, Southampton/U.K., (1980), PP. 137-154.
3. F.J. Rizzo and D.J. Shippy, a Method of solution of certain Problem of transient heat conductin, AIAA Jour., 8 (1970), PP. 2004-2009.
4. 孔祥谦、王传溥,有限单元法在传热学中的应用,科学出版社,1981。
5. H.S. Carslow and J.C. Jaegen, Conduction of Heat in Solids 2nd, ed., Oxford Univ. Press, London, 1959, PP. 93-99.
6. D. Nardini, and C.A. Brebbia, a New approach to free vibration analysis using boundary element, in: Boundary Element Methods in Engineering, ed., by C.A. Brebbia, Springer Verlag, Berlin, (1982).