工程数学习题解答

（中　册）

（复　变　函　数
矢量分析与场论）

上海业余工业大学高数教研室
上海电视大学高数中心组　编
浙江省广播电视大学　印

目　录

第二篇　复变函数与运算微积初步(一)

第三篇　矢量分析与场论

补　充　题

第二篇　工程数学复变函数(二)

第二篇　复变函数与运算微积初步(一)

第一章　复数的代数运算

1．把下列各数写为三角形式.

a）$3i$,　　b）$-i$,　　c）2,　　d）-2,

e）$1+i$,　　f）$-1-i$,　　g）$\sqrt{3}-i$,　　h）$1-i\sqrt{3}$,

i）$2+5i$,　　j）$-2+5i$,　　k）$2-5i$,　　l）$-2-5i$.

解　a）$3i=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

b）$-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$.

c）$2=2(\cos 0+i\sin 0)$.

d）$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

e）$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

f）$$-1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi-i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

g）$$\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

h）$$1-i\sqrt{3}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

i) $2+5i=\sqrt{29}\left(\cos \operatorname{arctg}\frac{5}{2}+i\sin \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}\right).$

j) $-2+5i=\sqrt{29}\left[\cos\left(\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}\right)+i\sin\left(\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}\right)\right].$

k) $2-5i=\sqrt{29}\left[\cos\left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}\right)+\right.$

$$\left.+i\sin\left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}\right)\right].$$

l) $-2-5i=\sqrt{29}\left[\cos\left(-\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}\right)+\right.$

$$\left.+i\sin\left(-\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}\right)\right].$$

2．指出下列各题点 z 的位置：

a) $|z|>5.$

b) $|z-i|<3,$

c) $|z+2i|\geqslant 2,$

d) $|z-3-4i|=5,$

e) $\operatorname{Re} z>3,$

f) $\operatorname{Im} z\leqslant 2,$

g) $|z-2|+|z+2|=5,$

h) $|z-2|-|z+2|>3,$

i) $|z^2-1|=a^2\ (a>0),$

j) $\operatorname{Re}(z^2)=a^2,$

k) $|z-i|=|z+2|,$

l) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1,$

m) $\alpha<\arg z<\beta,$

n) $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4},$

o) $\frac{\pi}{6}<\arg(z-2i)<\frac{\pi}{2}.$

解 a）点 z 在半径为 5 中心在坐标原点的圆外.

b）点 z 在半径为 3 中心在点 i 的圆内.

c）点 z 在半径为 2 中心在点 $-2i$ 的圆外及圆上.

d）点 z 在半径为 5 中心在点 $3+4i$ 的圆周上.

e）点 z 在直线 $x=3$ 的右边.

f）点 z 在直线 $y=2$ 的下面及该直线上.

g）原式表示动点 z 到两定点 $z_1=-2$，$z_2=2$ 的距离之和保持定值 5，轨迹是以点 -2 和 2 为焦点长轴等于 5 的椭圆. 点 z 在此椭圆上.

h）令 $z=x+iy$ 代入原式得

$$|x+iy-2|-|x+iy+2|>3,$$

即

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}>3,$$

平方、化简整理后得

$$\frac{4x^2}{9}-\frac{4y^2}{7}>3.$$

上式表示：焦点在点 -2 和 2 实轴等于 3 的双曲线左枝的内部.

i）令 $z=x+iy$ 代入原式得

$$|x^2-y^2+2xyi-1|=a^2,$$

即

$$(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2=a^4$$

是一双环线.

j） $z=x+iy$, $z^2=x^2-y^2+2xyi$

$$\mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2.$$

点 z 在双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上.

k）点 z 到点 i 的距离等于点 z 到点 -2 的距离，所以点 z 在连结点 i 和点 -2 的线段的中垂线上.

l）点 z 到点 3 的距离大于或等于点 z 到点 2 的距离，所以点 z 在连结点 2 和点 3 的线段的中垂线上及中垂线的左方（除去点 2）.

m) 点 z 在角顶在原点的角域内，角域的两边为射线 $\varphi=\alpha$ 及 $\varphi=\beta$.

n) 点 z 在由点 i 发出而与实轴正方向交角为$\frac{\pi}{4}$的射线上.

o) 点 z 在以点 $2i$ 为角顶两边分别与实轴正方向交角为$\frac{\pi}{6}$及$\frac{\pi}{2}$的角域内.

3．证明：若 $z_1+z_2+z_3=0$，且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，则点 z_1，z_2，z_3 是内接于中心在坐标原点、半径为 1 的圆周的正三角形的顶点.

解 因为 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，故点 z_1、z_2、z_3 在单位圆周上. 设 z_1、z_2、z_3 对应的向量 $\vec{z_1}$、$\vec{z_2}$、$\vec{z_3}$ 为单位向量，且满足

$$\vec{z_1}+\vec{z_2}+\vec{z_3}=0,$$

分别用 $\vec{z_1}$、$\vec{z_2}$、$\vec{z_3}$ 点乘上式得

$$\begin{cases}\vec{z_1}\cdot\vec{z_1}+\vec{z_1}\cdot\vec{z_2}+\vec{z_1}\cdot\vec{z_3}=0,\\ \vec{z_2}\cdot\vec{z_1}+\vec{z_2}\cdot\vec{z_2}+\vec{z_2}\cdot\vec{z_3}=0,\\ \vec{z_3}\cdot\vec{z_1}+\vec{z_3}\cdot\vec{z_2}+\vec{z_3}\cdot\vec{z_3}=0.\end{cases}$$

考虑到 $\vec{z_1}\cdot\vec{z_1}=1$, $\vec{z_2}\cdot\vec{z_2}=1$, $\vec{z_3}\cdot\vec{z_3}=1$, 则

$$\begin{cases}\vec{z_1}\cdot\vec{z_2}+\vec{z_1}\cdot\vec{z_3}=-1, & (1)\\ \vec{z_2}\cdot\vec{z_1}+\vec{z_2}\cdot\vec{z_3}=-1, & (2)\\ \vec{z_3}\cdot\vec{z_1}+\vec{z_3}\cdot\vec{z_2}=-1. & (3)\end{cases}$$

(1) 式、(2) 式、(3) 式相加得

$$\vec{z_1}\cdot\vec{z_2}+\vec{z_1}\cdot\vec{z_3}+\vec{z_2}\cdot\vec{z_3}=-\frac{3}{2}. \quad (4)$$

把(4)式分别减去(1)式、(2)式、(3)式得

$$\vec{z}_1\cdot\vec{z}_2=\vec{z}_2\cdot\vec{z}_3=\vec{z}_1\cdot\vec{z}_3=-\frac{1}{2}.$$

注意到$\vec{z}_1\cdot\vec{z}_2=\cos(\widehat{\vec{z}_1,\vec{z}_2})$，$\vec{z}_1\cdot\vec{z}_3=\cos(\widehat{\vec{z}_1,\vec{z}_3})$，

$$\vec{z}_2\cdot\vec{z}_3=\cos(\widehat{\vec{z}_2,\vec{z}_3}).$$

故$(\widehat{\vec{z}_1,\vec{z}_2})=(\widehat{\vec{z}_1,\vec{z}_3})=(\widehat{\vec{z}_2,\vec{z}_3})=\frac{2}{3}\pi$，可见$z_1$，$z_2$，$z_3$构成正三角形.

4．求：

a) $\frac{1}{i}$，　b) $\frac{1-i}{1+i}$，　c) $\frac{2}{1-3i}$，

d) $(\sqrt{3}-i)^5$，　e) $(1+i\sqrt{3})^3$.

解　a) $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$.

b) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$.

c) $\frac{2}{1-3i}=\frac{2(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$.

d) $$(\sqrt{3}-i)^5=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$$

$$=32\left(\cos\frac{5}{6}\pi-i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-16(\sqrt{3}+i).$$

e) $(1+i\sqrt{3})^3=(2e^{i\frac{\pi}{3}})^3=8e^{i\pi}=-8$.

5．求：

a) $\sqrt[3]{i}$，　b) $\sqrt[6]{-8}$，　c) $\sqrt[8]{1}$，　d) $\sqrt{1-i}$，

e) $\sqrt{3+4i}$，　f) $\sqrt{-2+2i}$.

解　a) $\sqrt[3]{i}=\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$　$(k=0,1,2)$,

得三个值为：$\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$；$\dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$；$-i$.

b) $\sqrt[6]{-8}=\sqrt[6]{|-8|}\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{6}\right)$

$(k=0,1,2,3,4,5)$. 得六个值为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$；$\sqrt{2}\,i$；

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}+i)$；$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}-i)$；$-\sqrt{2}\,i$；$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$.

c) $\sqrt[8]{1}=\cos\dfrac{2k\pi}{8}+i\sin\dfrac{2k\pi}{8}$　$(k=0,1,2,3,4,5,6,7)$.

得八个值为：1；$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$；i；$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$；$-1$；

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)；\ -i；\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

d) $\sqrt{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)$

$(k=0,1)$.

得二个值为：$\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{7}{8}\pi+i\sin\dfrac{7}{8}\pi\right)$；

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{15}{8}\pi+i\sin\frac{15}{8}\pi\right).$$

e) 由 $3+4i=(2+i)^2$ 得 $\sqrt{3+4i}=2+i$;

由 $3+4i=(-2-i)^2$ 得 $\sqrt{3+4i}=-2-i$,

所以$\sqrt{3+4i}$的二个值为$2+i$；$-2-i$.

f) $\arg(-2+2i)=\frac{3}{4}\pi$，$|-2+2i|=\sqrt{8}$.

$$\sqrt{-2+2i}=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{2}\right).$$

$$(k=0,1)$$

得二个值为：$\sqrt[4]{8}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 其中$\varphi=\frac{3}{8}\pi$，$\frac{11}{8}\pi$.

补　充　题

1. 证明　$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$.

解　几何方法证明是显然的. 用代数方法证明如下.

由　$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\cdot\overline{(z_1-z_2)}=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2).$$

$z_1\bar{z}_2$与$\bar{z}_1z_2$互为共轭复数，$z_1\bar{z}_2+\bar{z}z_2=2\,\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)$，得

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\,\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2). \tag{1}$$

由$||z_1|-|z_2||^2=(|z_1|-|z_2|)\cdot\overline{(|z_1|-|z_2|)}=(|z_1|-|z_2|)^2$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|. \tag{2}$$

注意到：$\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)\leqslant|\bar{z}_1z_2|=|z_1||z_2|$. 比较(1)式与(2)式，从而有

$$|z_1-z_2|^2\geqslant||z_1|-|z_2||^2.$$

开方后，得证.

2. 证明　$|z_1+z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$.

解　应用上题的结论．可得

$$|z_1+z_2|=|z_1-(-z_2)|\geqslant||z_1|-|-z_2||=||z_1|-|z_2||.$$

原式得证．

3．如果 $|z_2|\neq|z_3|$，证明

$$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right|\leqslant\frac{|z_1|}{||z_2|-|z_3||}.$$

解　由上题得

$$\frac{1}{|z_2+z_3|}\leqslant\frac{1}{||z_2|-|z_3||},$$

上式同乘 $|z_1|$，得证．

4．证明　$|z|\geqslant(|x|+|y|)/\sqrt{2}$.

解　对任何 x，y 有

$$(|x|-|y|)^2\geqslant0,$$

即　$|x|^2+|y|^2\geqslant2|x||y|$，　不等式两端加 $|x|^2+|y|^2$ 得

$$2(|x|^2+|y|^2)\geqslant(|x|+|y|)^2,$$

开方后，得　$$\sqrt{|x|^2+|y|^2}\geqslant(|x|+|y|)/\sqrt{2}.$$

但是　$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{|x|^2+|y|^2},$$

原式得证．

第二章　复变量函数论的基本概念

1．借助于函数 $w=\frac{1}{z}$，z 平面的下列曲线映射为 w 平面上怎样的曲线 $(z=x+iy,\quad w=u+iv)$？

a）$x^2+y^2=4$；　b）$x^2+y^2=1$；　c）$y=x$；

d）$y=0$；　e）$x=1$；　f）$(x-1)^2+y^2=1$.

解 a) $x^2+y^2=4$， 即 $|z|=2$；

$$\because \quad w=\frac{1}{z}, \qquad \therefore \quad |w|=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{2},$$

于是 z 平面上的曲线 $x^2+y^2=4$ 映射为 w 平面上的圆 $|w|=\dfrac{1}{2}$.

b) $x^2+y^2=1$ 即 $|z|=1$.

$$\because \quad w=\frac{1}{z} \qquad \therefore \quad |w|=\frac{1}{|z|}=1.$$

于是 z 平面上的曲线 $x^2+y^2=1$ 映射为 w 平面上的圆

$$|w|=1.$$

c) $$y=x,$$

$$\because \quad w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+ix}=\frac{1-i}{2x}.$$

$$\therefore \quad u=\frac{1}{2x}; \qquad v=\frac{-1}{2x}.$$

因此 $u=-v$ 是所求的 w 平面上的曲线.

d) $\because \quad y=0, \qquad \therefore \quad w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x},$

于是 $v=0$ 即所求的 w 平面上的曲线.

e) $\because \quad x=1, \qquad \therefore \quad w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+yi}=\dfrac{1-iy}{1+y^2},$

即 $$u=\frac{1}{1+y^2}, \qquad v=\frac{-y}{1+y^2}.$$

于是 $$u^2+v^2=\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2}=\frac{1}{1+y^2}=u.$$

故 $u^2+v^2=u$ 是所求的 w 平面上的曲线.

f) $\because \quad (x-1)^2+y^2=1,$ 即 $x^2+y^2=2x,$

$$\therefore \quad w=u+iv=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{2x},$$

因此 $u=\dfrac{1}{2}$ 即所求的 w 平面上的曲线.

2. 下列方程（t 是实参数）给出怎样的曲线？

a) $z=t(1+i)$； b) $z=a\cos t+ib\sin t$；

c) $z=t+\dfrac{i}{t}$； d) $z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$.

解 a) $\because \quad z=x+iy=t+it,$

$$\therefore \quad x=t, \qquad y=t.$$

故直线 $y=x$ 即所求曲线.

b) $\because \quad z=x+iy=a\cos t+ib\sin t,$

$$\therefore \quad 椭圆 \begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} 即所求曲线.$$

c) $\because \quad z=x+iy=t+i\dfrac{1}{t},$

$$\therefore \quad x=t, \qquad y=\frac{1}{t}.$$

因此双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 即所求曲线.

d) $\because \quad z=x+iy=t^2+i\dfrac{1}{t^2},$

$$\therefore \quad x=t^2>0; \qquad y=\frac{1}{t^2}>0.$$

因此双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在第一象限的分支即所求曲线.

补 充 题

1. 证明下列函数处处不可导：

(i) $f(z)=\mathrm{Re}(z)$, (ii) $f(z)=\bar{z}$, (iii) $f(z)=\mathrm{Im}(z)$.

证 (i) $\because$ $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x+i\Delta x}=\frac{1}{1+i};$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=(\Delta x)^2}}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x+i(\Delta x)^2}=1\neq\frac{1}{1+i}.$$

因此由导数定义，$\mathrm{Re}(z)$处处不可导.

(ii) $\because$ $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta x-i\Delta x}{\Delta x+i\Delta x}=\frac{1-i}{1+i};$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=-\Delta x}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=-\Delta x}}\frac{\Delta x+i\Delta x}{\Delta x-i\Delta x}=\frac{1+i}{1-i}\neq\frac{1-i}{1+i}.$$

因此由导数定义，$\bar{z}$处处不可导.

(iii) $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{(y+\Delta y)-y}{\Delta x+i\Delta x}=\frac{1}{1+i};$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=-\Delta x}}\frac{(y-\Delta x)-y}{\Delta x-i\Delta x}=-\frac{1}{1-i}\neq\frac{1}{1+i}.$$

因此由导数定义，$f(z)=\mathrm{Im}(z)$ 处处不可导.

2. 下列各题在何处满足柯希—黎曼条件：

(i) $w=1-z+2z^2$; (ii) $w=z+\bar{z}=2x$;

(iii) $w=\dfrac{1}{z}$; (iv) $w=2x+xy^2i$.

解 (i) $w=1-x-yi+2(x^2-y^2)+4xyi$.

$\therefore$ $u(x,y)=1-x+2(x^2-y^2)$, $v(x,y)=4xy-y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x-1=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-4y=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此 $w=1-z+2z^2$ 处处满足柯希—黎曼条件.

(ii) $$w=2x.$$

解. $u(x,y)=2x,\quad v(x,y)=0.$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\neq 0.$$

因此 $w=2x$ 处处不满足柯希—黎曼条件.

(iii) $$w=\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i.$$

$$\therefore\quad u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此 $w=\frac{1}{z}$ 除 $z=0$ 外处处满足柯希—黎曼条件.

(iv) $$w=2x+xy^2i.$$

$$\therefore\quad u=2x,\qquad v=xy^2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=y^2.$$

因此 $w=2x+xy^2i$ 处处不满足柯希—黎曼条件.

3. 对函数 $w=z^3-2z$，应用导数的定义求 $\frac{dw}{dz}$. 并证明 u 与 v 能满足柯希—黎曼条件.

证 $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^3-2(z+\Delta z)-(z^3-2z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{3z^2\Delta z+3z(\Delta z)^2+(\Delta z)^3-2\Delta z}{\Delta z}=3z^2-2.$$

$$\because\quad w=z^3-2z=(x+yi)^3-2(x+yi)$$

$$=(x^3-3xy^2-2x)+i(3x^2y-y^3-2y).$$

$$\therefore\quad u=x^3-3xy^2-2x,\qquad v=3x^2y-y^3-2y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2-2=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此w处处满足柯希—黎曼条件.

4. 单值函数 $w=\sqrt{z}$，这里$0<\arg z<\pi$与$|z|>0$. 令

$$\sqrt{z}=\sqrt{r}\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right].$$

求u与v，并证明它们满足柯希—黎曼条件.

解 $\because\quad u=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{r}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{r+x}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}},$$

$$v=\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{r}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{r-x}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}},$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)}{2\sqrt{\frac{r+x}{2}}}=\frac{\sqrt{2}(x+r)^{\frac{1}{2}}}{4r}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{y}{r\cdot\sqrt{r-x}}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{y}{r\sqrt{r+x}}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}\frac{(r-x)^{\frac{1}{2}}}{r}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此 $w=\sqrt{z}$，当 $0<\arg z<\pi$ 与 $|z|>0$ 时，处处满足柯希—黎曼条件.

第三章　基本超越函数

1．求：

a) $\operatorname{Ln}(1+i)$；　b) $\operatorname{Ln}(-i)$；　c) $\operatorname{Ln}(-3+4i)$.

解　a) $\operatorname{Ln}(1+i)=\ln|1+i|+i\arg(1+i)+2k\pi i$

$$=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i+2k\pi i$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i+2k\pi i;\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

b) $\operatorname{Ln}(-i)=\ln|-i|+i\arg(-i)+2k\pi i$

$$=\ln 1-\frac{\pi}{2}i+2k\pi i$$

$$=-\frac{\pi}{2}i+2k\pi i;\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

c) $\operatorname{Ln}(-3+4i)=\ln|-3+4i|+i\arg(-3+4i)+2k\pi i$

$$=\ln 5+\left(\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)i+2k\pi i$$

$$=\ln 5-\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)i+(2k+1)\pi i$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

2．求：