代数·1

高中数学
发散思维辅导

安徽教育出版社

高中数学发散思维辅导

代数·1

安徽教育出版社

责任编辑　王宏金
装帧设计　王邦德

（皖）新登字03号

高中数学发散思维辅导

代数 1

安徽教育出版社出版
（合肥市金寨路283号）
安徽省新华书店发行　安徽定远印刷厂印刷
※
开本：787×1092　1/32印张：9.75 字数210000
1991年9月第1版　1992年元月第2次印刷
印数5.001—15.000
ISBN7—5336—0931—X/G·1382
定价：3.40元

再版前言

发散思维作为一个新的教研课题，已受到广大师生的高度重视。发散思维具有多端性、变通性、独特性的特点，即思考问题时注重多途径、多方案，解决问题时注重举一反三、触类旁通，这与数学知识的思维特征极为相似。因此，在中学阶段，结合数学教学，正确培养和发展学生的发散思维能力，对造就创造型人才，至关重要。

有鉴于此，应出版社之约，我们在长期教学实践的基础上，编写了这套《高中数学发散思维辅导》。全套书紧扣教学大纲和现行数学课本分成四册，即《代数》（1，2）、《立体几何》、《平面解析几何》。每册均按课本章节编写，每章由知识系列、发散点分析、发散思维辅导、练习题（A）、（B）四部分组成。练习题多是以课本中的习题为基础，围绕下述各种发散思维形式，加以改造设置的。家长借此可以检查学生对课本各章节知识的掌握程度；学生借此可以评估课堂学习的效果。

知识系列——将课本各章知识加以归纳、概括，为引导学生展开发散思维奠定理论基础。

发散点分析——指明各章知识网络中进行发散思维的“结点”，启发和诱导学生逐步进入发散思维空间。

发散思维辅导——借助具体实例，采用题型发散、解法发散、纵横发散、变更命题发散、转化发散、综合发散等多种形式，对学生进行多思、多解、多变的解题辅导。题型发散是将

发散点生发的典型问题，变换其题型，进行发散思维；解法散则通过一题多解多题一解等方法变换，进行发散思维；纵发散是通过两个或多个发散点间的联系，以及发散点与其它识点间的联系，借助例题形成发散思维；变更命题发散是通变更命题的形式，或维持原命题的条件而改变结论，或改变命题的条件而维持原结论不变，或同时改变原命题的条件、论来进行发散思维训练。转化发散是通过保持原命题的实质变换其形式来进行发散思维训练；综合发散是通过教材各章散点之间的联系，数学各科间的相互联系，数学与其它学科间的联系来进行发散思维训练。

本套书可作为普通高中、中专学生学习数学的辅导读物。可作为高中生、社会青年进行高考复习的参考资料。

本套书是由汪继威、倪承源、郭之尔、齐韵芬集体编著。结合现行教材编著数学发散思维读物是一种新的尝试，资匮乏，再说编者水平有限，谬误之处难免，敬请广大读者批指正。

编 者

1992年1月

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

知　识　系　列

一、集合及其相互关系

集合是数学中一个不加定义的原始概念，通常是这样描述的：将所研究的对象看作一个整体，便形成了集合。集合中的对象叫做集合 中 的元素；通常用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示集合中的元素.

(1)子集　如果集合A中的元素都是集合B中的元素，则集合A叫做集合B的子集，记为$A\subseteq B$；若$a\in A$，可推出$a\in B$.

若集合A是集合B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，则A叫做B的真子集，记为$A\subset B$.

设A、B是两个集合，若$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记为$A=B$.

空集是任何集合的子集，任何集合是它本身的子集.

显然，若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$；若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$.

(2)交集　由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的交集，记为$A\cap B$；即 $A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$.

对于任何两个集合A、B，有$A\cap B=B\cap A$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cap A=A$.

(3)并集　由属于集合A或属于集合B的所有元素组成的集合叫 做 A 与B的并集，记为$A\cup B$；即 $A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$.

对于任何两个集合A、B，有$A\cup B=B\cup A$，$A\cup\phi=A$，$A\cup A=A$.

(4)补集　在研究过程中，一些集合常常都是某一个集合的子集，这某一个集合叫做这些集合的全集，用“I”表示.

若集合$A\subseteq I$，由I中所有不属于集合A的元素组成的集合，叫做集合A在I中的补集，记为$\overline{A}$，即$\overline{A}=\{x|x\in I$，且$x\notin A\}$.

对于任何集合A，有$A\cup\overline{A}=I$，　$A\cap\overline{A}=\phi$，　$(\overline{\overline{A}})=A$.

二、映射与函数

1.映射

设A、B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应(包括集合A、B以及从A到B的对应法则f)叫做A到B的映射，记为f：$A\to B$.

若给定一个从集合A到集合B的映射，则和A中的元素a对应的集合B中的元素b叫做a的象，a叫做b的原象.

2.一一映射

设A、B是两个集合，f：$A\to B$是从集合A到集合B的映射，若在这个映射的作用下，对于集合A中不同的元素，在集合B中有不同的象，而且B中每一个元素都有原象，这样的映射叫做从A到B上的一一映射.

3.逆映射

设f：$A\to B$是从集合A到集合B上的一一映射，若对于B中的每一个元素b，使b在A中的原象a和它对应，这样所得的映射，叫做映射f：$A\to B$的逆映射，记为f^{-1}：$B\to A$.

显然，映射f：$A\to B$也是映射f^{-1}：$B\to A$的逆映射.

4.函数

当映射f：$A\to B$中的原象集合A和象集合B都是非空数集，且B中每一个元素都有原象时，这样的映射f：$A\to B$叫做从定义域A到值域B上的函数，记为$y=f(x)$.

5.定义域

即自变量的允许值范围.当函数用解析式给出时，定义域就是使式子

有意义的值的集合；当函数由实际问题给出时，其定义域由实际问题确定.

6.值域

即函数值的变化范围。由于中学遇到的函数基本上是连续函数，所以求函数的值域可以转为求函数的最值.解题时要具体分析，采用恰当的解法.

7.函数的单调性

函数$f(x)$在它的定义域内给定的区域上，若对于属于这个区间的任意两个自变量x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在这个区间上是增函数；当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在这个区间上是减函数.

函数在某个区间上是增函数或减函数，就说$f(x)$在这个区间上具有(严格的)单调性，这个区间叫做$f(x)$的单调区间.

8.函数的奇偶性

对于函数$f(x)$的定义域内任意一个x，若$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数；若$f(x)=f(-x)$，则称$f(x)$是偶函数.

一个函数是奇函数，当且仅当它的图象关于原点成中心对称；一个函数是偶函数，当且仅当它的图象关于y轴成轴对称.

9.反函数

如果确定函数$y=f(x)$的映射$f: A\to B$是$f(x)$从定义域A到值域B上的一一映射，则这个映射的逆映射f^{-1}：$B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$，叫做函数$y=f(x)$的反函数，习惯上写成$y=f^{-1}(x)$。函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是其反函数$y=f^{-1}(x)$的值域、定义域.

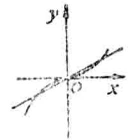
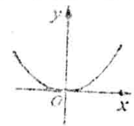
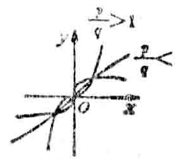
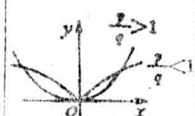
三、幂函数、指数函数和对数函数

1.幂函数

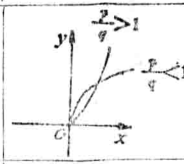
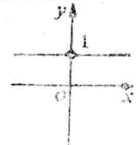
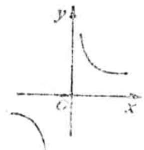
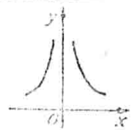
(1)定义：形如$y=x^{\alpha}$(α为常数)的函数叫做幂函数(中学主要讨论$\alpha\in Q$的情况).

(2)性质和图象(见表1—1).

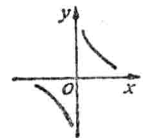
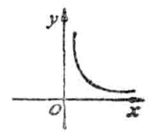
表1—1

n			定义域	值域		奇偶性	图象	共同性质
$n>0$	正整数	奇数	R	R		奇		①图象是抛物线型（特殊情况是直线或半支抛物线） ②图象都过$(0,1)$，$(1,1)$两点 ③在$[0,+\infty)$上是单调递增函数
		偶数		$[0,+\infty)$		偶		
	正分数 $\frac{p}{q}$ $p\cdot q\in N$ $q>1$ $(p,q)=1$	q为奇数	R	p为奇数	R	奇		
				p为偶数	$[0,+\infty)$	偶		

续表1—1

n			定义域	值域		奇偶性	图象	共同性质
$n>0$	正分数	q为偶数	$[0, +\infty)$	p为奇数	$[0, +\infty)$	非奇非偶		
$n=0$			$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	1		偶		常函数
$n<0$	负整数	负奇数	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇		①图象是双曲线型（特殊情况是半支） ②图象都过(1,1)点
		负偶数		$(0, +\infty)$		偶		

续表1—1

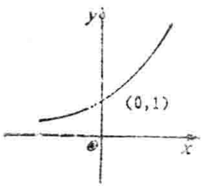
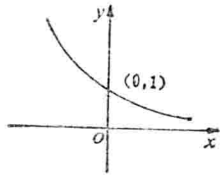
n			定义域	值域		奇偶性	图象	共同性质
$n<0$	负分数 $-\frac{p}{q}$ $q\in N$, $p\in N$, $q>1$, $(p,q)=1$.	q 为奇数	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	p 为奇数	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	奇		③在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数
				p 为偶数	$(0,+\infty)$	偶		
		q 为偶数	$(0,+\infty)$	p 为奇数	$(0,+\infty)$	非奇非偶		

2. 指数函数

(1)定义：形如$y=a^x$($a>0$，$a\neq1$)的函数叫指数函数.

(2)指数函数的图象与性质(见表1—2).

表1—2

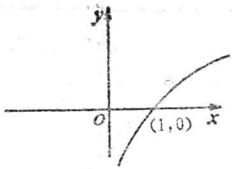
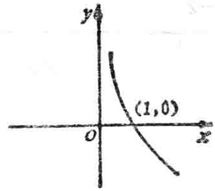
	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	① $y>0$	① $y>0$
	② 当$x=0$时，$y=1$	② 当$x=0$时，$y=1$
	③ 当$x>0$时，$y>1$ 当$x<0$时，$0<y<1$	③ 当$x>0$时，$0<y<1$ 当$x<0$时，$y>1$
	④ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数	④ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数

3. 对数函数

(1)定义：形如$y=\log_a x$($a>0$，$a\neq1$)的函数叫对数函数，指数函数$y=a^x$与对数函数$y=\log_a x$($a>0$，$a\neq1$)互为反函数。

(2)对数函数的性质与图象(见表1—3).

表1—3

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	① $x>0$	① $x>0$
	② 当$x=1$ 时，$y=0$	② 当$x=1$ 时，$y=0$
	③ 当$x>1$时，$y>0$ 当$0<x<1$时，$y<0$	③ 当$x>1$ 时，$y<0$ 当$0<x<1$ 时，$y>0$
	④ 在$(0, +\infty)$上是增函数	④ 在$(0, +\infty)$上是减函数

4. 指数方程与对数方程

指数方程和对数方程的类型及解法(见表1—4)。

发散点分析

一、集合与映射

(1)根据问题的条件选用列举法或描述法来表示集合。应注意不是每一个集合都能同时用这两种方法来表示.

(2)两集合的包含、真包含和相等是三个既有联系又有区别的概念，上

表1—4

	类　　型	解　　法
对数方程	① $\log_a x=b\ (a>0, a\neq1)$	$x=a^b$
	② $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ $(a>0, a\neq1)$	$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)=g(x)>0 \end{cases}$
	③ $f(x)$为二次三项式 $f(\log_a x)=0$	令$u=\log_a x$(换元法)
指数方程	① $a^x=b(a>0,\ a\neq1,\ b>0)$	$x=\log_a b$
	② $a^{f(x)}=a^{g(x)}\ (a>0,\ a\neq1)$	$f(x)=g(x)$
	③ $a^{f(x)}=b^{g(x)}(a,b>0,$ $a\neq1,\ b\neq1)$	$f(x)\lg a=g(x)\lg b$
	④ $f(x)$ 为二次三项式 $f(a^x)=0$	令$a^x=u$，用换元法

$B\subseteq A$指$B\subset A$或$B=A$，反之$B\subset A$或$B=A$都可以表示为$B\subseteq A$.

(3)求两个(或多个)集合的交集、并集或某一集合的补集，对于数集来说，一般可通过画数轴来解；对于非数集来说，可用韦恩氏图或分析法来解.

(4)某对应是否映射、一一映射，要根据定义来证明，若已知两集合求一一映射法则，一般可选参数，设函数式.

二、函数

(1)由两函数的定义域、值域、对应法则是否一致，判断它们是否同一函数.

(2)求反函数可按照反解、互换、写定义域这三个步骤进行，即由原函数 $y=f(x)$，解出$x=f^{-1}(y)$，再互换x、y，得$y=f^{-1}(x)$，最后还要

写出它的定义域.

(3)求函数表达式.

①由实际问题建立函数关系式，一般可通过研究自变量与函数间的等量关系，再确定自变量的取值范围.

②由 $y=f[g(x)]$及$y=f[f(x)]$求 $f(x)$，一般由定义法、换元法、待定系数法及解方程的方法来解.

(4)求函数的定义域.

①若$f(x)$是整式，则定义域为全体实数；

②若$f(x)$是分式，则定义域为使分母不为零的全体实数；

③若$f(x)$是偶次根式，则定义域为使被开方数为非负的全体实数；

④若$f(x)=\log_a g(x)$，则定义域由$g(x)>0$，且$a>0$、$a\neq1$来确定；

⑤若$f(x)$为复合函数，则定义域由复合的各基本函数的定义域所组成的不等式组确定；

⑥由实际问题列出的函数式的定义域，由自变量的实际意义确定.

(5)求函数的值域.

①图象法：观察函数的最高点和最低点。当函数的定义域为$[a,b]$时，要注意端点的函数值.

②配方法：利用二次函数的配方法求函数的值域，要注意自变量的取值范围.

③判别式法：用二次函数的判别式法求函数的值域，要注意避免"误判"和"漏判".

④反函数法：若函数存在反函数，可以通过求反函数的定义域来求，因为反函数的定义域就是原函数的值域.

⑤其他方法：利用函数的单调性、极值定理及变量代换法求函数的值域.

(6)函数的单调性.

①由函数单调性定义判断或证明某一函数在一区间内的单调性.

②通过画图象或运用复合函数的单调性定理求函数的单调区间.

③应用函数的单调性可证明不等式，比较两个(或多个)数的大小，判断某些超越方程实根的个数等.

(7)函数的奇偶性.

判断一个函数的奇偶性，一般有以下三种方法.

①定义法：定义域若不是关于原点的对称区域，立即可判断该函数既不是奇函数也不是偶函数.

若定义域是关于原点的对称区域，再判断$f(-x)=\pm f(x)$？或转而证明$f(x)\pm f(-x)=0$？

②图象法：奇(偶)函数的充要条件是它的图象关于原点(或y轴)对称.

③性质法：偶函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为偶函数.

奇函数的和、差仍为奇函数.

奇(偶)数个奇函数的积、商(分母不为零)为奇(偶)函数.

一个奇函数与一个偶函数的积为奇函数.

$F_1(x)=f(x)+f(-x)$为偶函数，$F_2(x)=f(x)-f(-x)$为奇函数.

复合函数$F(x)=f[g(x)]$.若$g(x)$为偶函数，则$F(x)$为偶函数；若$g(x)$为奇函数，$f(x)$为奇函数，则$F(x)$为奇函数；若$g(x)$为奇函数，$f(x)$为偶函数，则$F(x)$为偶函数.

(8)函数的最值.

①设在函数的定义域内，存在x_0，满足$f(x_0)\leqslant f(x)$，则称$f(x)$在$x=x_0$处达到最小值；若满足$f(x_0)\geqslant f(x)$，则称$f(x)$在$x=x_0$处达到最大值.

②求最大(小)值常用的方法：

归结为二次函数(型)用配方法求解；

用二次方程的判别式求解；

利用函数的单调性求解；

利用正、余弦函数的有界性，不等式的平均值定理，几何图形等方法求解.