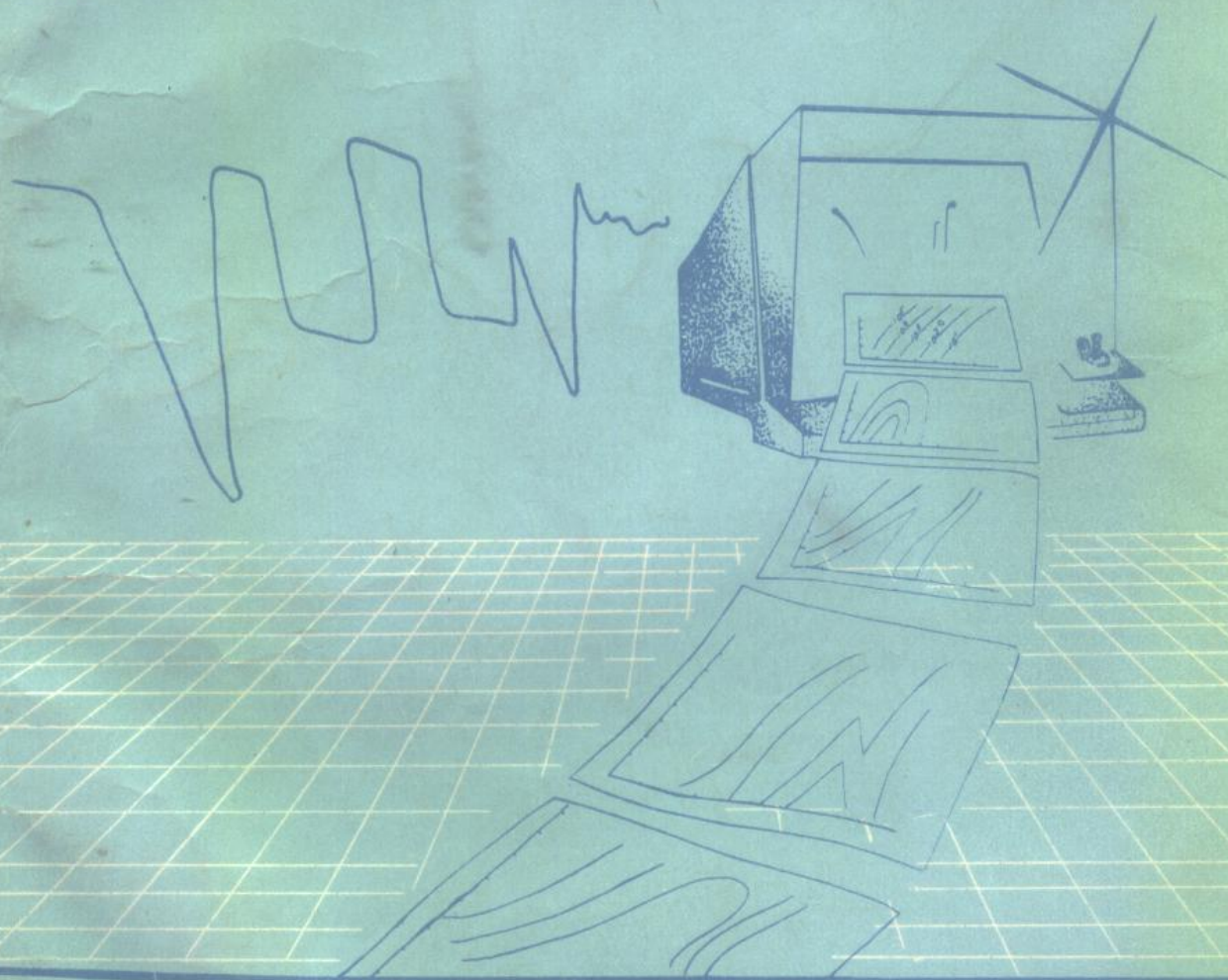


砂岩油藏 現代試井分析方法 的進展及應用



石油工業部科學技術情報研究所

正文设计：何 思
责任校对：李晓芳
封面设计：秋 风

砂岩油藏

现代试井分析方法的进展及应用

开本787×1092毫米1/16·印张11.875	编辑：石油工业部科学技术情报研究所
字数：30万字 印数：1—3000	出版：石油工业部科学技术情报研究所
1987年6月北京第一次印刷	印刷：北京顺义县燕华营印刷厂
油情(单)87002 工本费：2.50元	发行：石油工业部科学技术情报研究所 (北京和平里七区十六号楼)

072

出版说明

在油藏勘探与开发阶段,取得油藏物性参数,了解油藏能量水平,分析人为措施的影响,诸如渗透率、液流传导率,边界和断层的方位与距离,原始与平均油藏压力,钻井与完井过程中油层污染状况,压裂酸化等增产和修井措施的效果等信息是科学开发油田的重要依据;试井技术是获取上述参数的重要措施,而且要有计划及时进行。

试井由于需要在开采阶段经常进行,如何使试井在开采进程中进入良性循环,不因试井操作和关井测压等影响生产,而是通过试井加深对油藏的认识,加强对油藏的经营,改善开采效果,提高作业效益,关键在于加强试井的硬件和软件的开发,软硬兼施。在软件方面,八十年代以来,国外油田在试井解释中广泛应用计算机拟合法快速准确地处理测压数据。我国油藏类型繁多,亟需有相宜的试井解释软件。1984年,部科技司组织华东石油学院北京研究生部、西南石油学院、中国科技大学等单位结合中国油田特点,着手研制现代与常规试井解释软件系列。与此同时,为应生产急需,大庆、胜利等油田先后引进了国外以Gringarten图版为主的试井解释软件。为了使广大的油藏工程师、试井工作者系统地了解现代试井解释软件的基础及典型曲线图版的发展过程,群策群力,共同为提高我国的试井水平而努力,我们约请华东石油学院北京研究生部刘懋宁付教授组织试井分析研究组的同志采用译、编、著等方式汇集了砂岩均质油藏现代试井解释软件的数学模型,国外有代表性的Gringarten,Earlougher,以及Mckinley等各类理论图版的发展及实用等有关问题的一系列论文。其中个别译文曾在别的刊物登载。我们在有些文章题前加了一个“30秒的说明”以提起注意。希望能得到油田、院校研究机构、专业服务公司的支持和合作,陆续编辑出版有关试井硬件,国内试井解释软件的开发、国内外油田试井软件应用实例等方面的资料,以供油藏工程及试井工作者参考。由于篇幅所限,双孔隙油藏试井、压裂井的试井等有关资料本篇没有列入。

目 录

一、不稳定试井分析方法的进展述评——代前言	(1)
二、均质微可压缩液体在多孔介质中渗流的数学模型及定解条件	刘懋宁编 (3)
三、不稳定液流井筒存储和表皮效应的研究：I：解析方法	陈钦雷摘译 (9)
四、现代不稳定试井理论中 Agarwal 解析解的导出	夏显庭 (23)
五、存在表皮效应和井筒存储时短期试井资料的解释	陈志刚译 (34)
六、应用典型曲线拟合法分析不稳定试井早期数据	杨建汝译 (45)
七、根据续流影响明显的压力恢复数据确定井筒传导率	杨建汝译 (59)
八、不稳定试井早期分析中不同表皮效应和井筒存储典型曲线的对比	何百平译 (76)
九、简化试井分析的新方法——压力导数典型曲线	刘懋宁编译 (97)
十、不稳定液流井筒存储和表皮效应的研究：II：有限差分法	陈钦雷译 (107)
十一、用典型曲线拟合法解释叠层油藏的压力资料	陈志刚译 (117)
十二、现代试井分析方法的实际应用	陈志刚摘译 (126)
十三、典型曲线拟合法实际应用的问题	刘懋宁 (148)
十四、脉冲试井分析及其在低渗透油藏中的应用	刘懋宁 (157)

不稳定试井分析方法的进展述评

一代前言

不稳定试井方法是了解油藏特性的重要手段之一。通过不稳定试井分析可以获得重要的开发参数,如渗透率、原始和平均油藏压力、油藏流动特性、井筒附近状态等等。

压力恢复(或压降)资料可按测压时间分为早期、中期和晚期三个阶段。其中早期资料主要反映井筒附近动态(污染、增产措施);中期资料反映总的油藏状态,分析这阶段数据可求得地层系数(kh)等;晚期资料以边界影响为主,并可求得油藏平均压力,判断断块油藏的形状。

1920~1930年间首次用不稳定试井方法研究了晚期资料,从而解决了利用井底压力推算油藏平均压力的问题。然而,对于低渗透油层,取得晚期资料需要很长的关井时间。

1950~1960年间进一步发展了不稳定试井方法,即以中期压力资料为主,将实测井底压力和相应时间数据,绘制成半对数曲线,找出直线段进行分析,这就是以 Horner 为主创立的常规试井分析方法。我国各油田从60年代初期大量使用常规试井分析法来确定油层压力和油藏参数,判断油藏中边界状况,估计压裂、酸化效果等等。

1954年 Matthews 等人详细研究了不对称断块油藏中的压力特征,提出了任意形状的油藏中,压力的变化关系。从而可以根据压降(或压力恢复)的晚期资料来计算油藏平均压力或反求油藏形状。这种方法叫做MBH法。利用MBH法,在勘探初期根据一口井较长时间的测试资料可以确定油藏边界,推测断块油藏供油面积的形状。对我国众多的断块油藏是一种值得推广和进一步结合实际加以完善的方法。

虽然常规试井分析法是一种比较完善、原理简单而又易于使用的方法,但该方法尚存在以下不足之处:

- 1.常规试井法以分析中、晚期资料为主,这就要求关井测压时间较长。对低渗透油层来说,要取得中、晚期资料很困难。
- 2.国内外油田使用常规试井法分析压力恢复曲线时,发现半对数坐标图上直线段的起始点很难准确确定,而直线段判断错误必将严重影响分析结果。
- 3.当井筒存储(续流)影响很大,井筒附近地层严重污染时,增加了使用常规试井法的困难。
- 4.常规试井法根据中期资料只能获得反映总的油藏状态的参数,而不能取得井筒附近的详细信息。

从六十年代末到七十年代初,国外开始研究现代试井分析方法。

现代试井分析方法的特点为:

- 1.对井筒存储(续流)和井壁污染对压力动态的影响进行了研究,从而提出了更完善的模型与边界条件。考虑了所有测试压力数据,即早期、中期和晚期数据,因而能对短期试井资料进行分析。
- 2.在双对数坐标上按无因次压力和无因次时间之间的关系绘制理论的典型曲线。将实测数据画在双对数图上与理论模型的典型曲线拟合,得到油藏特性的定量信息。

3. 无因次理论典型曲线强调各时期内的特征形状。实际曲线和理论曲线的对比, 可为流动状态提供定性信息。

现代试井分析的理论典型曲线, 根据油藏类型可以分为:

- 1) 均质油藏的理论图版
- 2) 双孔隙性油藏的理论图版
- 3) 双渗透率(层状)油藏的理论图版
- 4) 压裂井(垂直与水平裂缝)的理论图版。

由于篇幅所限, 本文集主要介绍均质砂层油藏试井解释的理论图版及应用。

1969年Agarwal和Ramey首先建立了考虑井筒存储及表皮因子的数学模型, 并用拉普拉斯变换法求出解析解, 绘制出无因次参数(压力和时间)的双对数理论图版。在Agarwal-Ramey的理论基础上, 进一步发展了Earlougher-Kersch理论图版, Gringarten理论图版和Bourdet导数理论图版。1970年Wattenbarger进一步建立考虑污染区的数学模型, 并求出数值解, 绘出理论图版。1971年McKinley建立考虑井筒存储的新模型, 用数值积分法求解, 绘制出理论图版, 美国普鲁德霍湾油田应用这一图版, 分析地层污染状况, 效果良好。

1983年Bourdet在Gringarten理论图版的基础上绘制出导数理论图版, 实践证明, 导数曲线在诊断油藏类型上起着重要的作用。

本文集将对砂层油藏各类图版进行介绍, 有助于试井工作者了解现代试井法的理论基础, 及理论图版的发展过程, 以便结合各油田本身的特点选用适宜的解释方法及理论图版。

均质微可压缩液体在多孔介质中渗流的 数学模型及定解条件

刘树宁 编

根据均质微可压缩液体在多孔介质中渗流的：(1) 质量守恒定律，(2) 达西定律，(3) 状态方程，可以导出渗流方程式为：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu}{k} (c_o + c_f) \frac{\partial p}{\partial t}$$

如果是径向流，这一渗流方程变为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu}{k} (c_o + c_f) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

若取 $c_t = c_o + c_f$ ，则 (1) 式改为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2)$$

为了求解方便，将渗流方程 (2) 改用无因次量表示：

$$\text{无因次半径 } r_D = \frac{r}{r_w} \quad (3)$$

$$\text{无因次时间 } t_D = \frac{kt}{\phi \mu c_t r_w^2} \quad (4)$$

$$\text{无因次压力 } P_D(r_D, t_D) = \frac{2\pi kh}{q\mu} (P_i - P(r, t)) \quad (5)$$

式中 r_w —井半径；

P_i —原始地层压力；

$P(r, t)$ —地层中任一点，任一时间的压力；

q —油井产量。

将 (3) — (5) 式代入径向扩散方程 (2) 中，得到用无因次量表示的渗流方程

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial p}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (6)$$

或展开为

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (7)$$

一、初始与外边界条件的数学表达式

试井分析中比较感兴趣的是油藏中心一口井并以定产量 q 生产情况下的解。把定产情况

油藏初始条件为要求在 $t=0$ 时，地层各处的压力均为 P_i ，且 $P_i=\text{常数}$ 。如表示为无因次量，则为：

油藏外边界条件可以分为三种情况:

$$r_D \rightarrow \infty \text{ 时 } P_D = 0 \quad (9)$$
$$\text{当 } r_D = r_{Dc} \text{ 时, } \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = 0 \quad (10)$$

(3) 外边界定压圆形油藏: 井位于圆形油藏中心, 外边界处压力保持恒定, 如等于原始地层压力 P_i 时, 则无因次量表示为

二、内边界条件及其数学表达式

$$\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = \frac{q\mu}{2\pi kh} \quad (12)$$

1 表皮效应与表皮因子

The diagram consists of two parts. The left part shows a vertical wellbore with a curved pressure profile. Two points are marked on the curve: P_r (near the top) and P_{wf} (at the bottom). The right part shows a similar curved profile labeled '地层压力分布' (Formation Pressure Distribution). A vertical double-headed arrow indicates a pressure difference ΔP_s between the wellbore pressure and the formation pressure at a specific depth.

$P_f - P_{wf} = \Delta P_s$ —污染带压力降; 阴影带—污染带。

$$P_f - P_{wf} = \frac{q\mu}{2\pi kh} s$$

4

p_{wf} —井底压力,

s —表皮因子 (skin factor), 无因次。

井筒中液体产量等于

$$q = \frac{2\pi k h r_w}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_w}$$

从而

$$p_i - p_{wf} = \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_w} s$$

若用无因次量表示为

$$\Delta p_{SD} = \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} s$$

消除污染带影响的无因次井底压力应为

$$p_D = \left[p_D - \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) s \right]_{r_D=1} \quad (13)$$

井底地层若被污染使渗透率下降时, s 值为正。若采用酸化压裂等增产措施, 提高渗流能力时, s 值为负。

2. 井筒存储与井筒存储系数

在进行压力恢复试井时, 由于在地面关井, 因此关井后在一段时间内流体还继续流入井筒, 简称续流 (Afterflow)。产生续流的原因是:

(1) 生产过程中, 环形空间没有充满液体, 关井后流体续流入井、液面上升。

(2) 井筒中 (包括环形空间) 充满液体, 关井后流体受到压缩, 流体续流入井。

由于关井后续流影响, 不能满足 Horner 法所要求的产量瞬时为零的条件, 所以压力恢复早期数据在半对数坐标图上不为直线, 压力恢复直线段滞后出现。

当开井生产测压降曲线时, 将先采出井筒中 (特别是环空中) 原来储存的、被压缩的液体, 以从环空中倒灌入油管中为主, 简称为井筒存储 (Wellbore storage), 因而地面产液量不可能瞬时达到恒定的 q 。压降曲线直线段也滞后出现。

井筒存储的影响与续流影响近似看成是等效的, 因此, 进行压力恢复与压降曲线分析时, 都可用井筒存储效应与相应的存储系数来表征。

如果井筒中存在油气界面 (图2), 油柱高 z , 根据井筒中质量守恒关系, 可以导出井筒存储的影响。

设井筒中液体体积为 V_{wb} , 则

$$\frac{dV_{wb}}{dt} = A_{wb} \frac{dz}{dt}$$

若以英制单位表示, 则为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{24V_{wb}}{5.615} \right) = \frac{24A_{wb}}{5.615} \frac{dz}{dt}$$

式中 A_{wb} ——井筒截面积, 英尺²;

V_{wb} ——井筒中液体体积, 英尺³;

z ——液面高度, 英尺;

t ——时间, 小时。

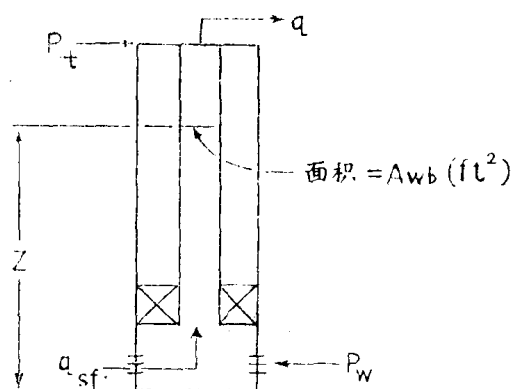


图2

若从地层中流入井筒中的液量为 q_{sf} (地面桶/天), 油的体积系数为 B_o , 则

$$\frac{24}{5.615} A_{wb} \frac{dz}{dt} = (q_{sf} - q) B_o$$

式中 q ——井产量, 地面桶/天。

设井口压力为 p_t , 井底压力 p_w 与井口压力 p_t 的关系为

$$p_w = p_t + \frac{\rho z}{144} \frac{g}{g_c}$$

式中 ρ ——井筒中液体密度, 磅/英尺³;

g ——重力加速度, 英尺/秒²;

g_c ——单位换算系数, 32.17磅质·英尺/(磅力·秒²)。

$$\frac{d(p_w - p_t)}{dt} = \frac{\rho}{144} \frac{g}{g_c} \frac{dz}{dt}$$

由此得到

$$\frac{(24)(144)}{5.615\rho} \frac{g_c}{g} A_{wb} \frac{d(p_w - p_t)}{dt} = (q_{sf} - q) B_o$$

令式中

$$\frac{144}{5.615\rho} A_{wb} \frac{g_c}{g} = C$$

我们称 C 值为井筒存储常数。从而

$$q_{sf} = q + \frac{24C}{B_o} \frac{d(p_w - p_t)}{dt}$$

当 p_t 恒定时

$$q_{sf} = q + \frac{24C}{B_o} \frac{dp_w}{dt}$$

若改用无因次量纲表示, 将压力与时间的无因次量用英制表示为:

$$p_D = \frac{0.00708kh(p_i - p_w)}{qB_o\mu}$$

$$t_D = \frac{0.000264kt}{\phi\mu c_t r_w^2}$$

式中 k ——渗透率, 毫达西;

h ——地层厚度, 英尺;

t ——时间, 小时;

c_t ——综合压缩系数, 1/磅/英寸²;

r_w ——井半径, 英尺;

μ ——粘度, 厘泊;

q ——产量, 桶/天;

p_i 及 p_w ——地层及井底压力, 磅/英寸²;

ϕ ——孔隙度，%；

B_o ——油的体积系数，地下桶/标准桶。

从而导出

$$\frac{dp_w}{dt} = - \frac{0.0373qB_o}{\phi c_t h r_w^2} \cdot \frac{dp_D}{dt_D}$$

$$q_{sf} = q - \frac{0.894qC}{\phi c_t h r_w^2} \cdot \frac{dp_D}{dt_D}$$

定义无因次井筒存储常数 C_D 等于：

$$C_D = \frac{0.894C}{\phi c_t h r_w^2}$$

由此导出

$$\frac{q_{sf}}{q} = 1 - C_D \frac{dp_D}{dt_D}$$

另一种情况，如果井筒中存满单相流体（液体或气体），且地面产量为 q （图3），井筒体积 V_{wb} （桶）， C_{wb} 为井筒中液体的压缩率，根据质量平衡关系，流入井中的液体为 $q_{sf}B_o$ ，流到地面的为 qB_o ，井筒中累积产液量为

$$24V_{wb}C_{wb}\frac{dp_w}{dt}$$

根据平衡关系

$$(q_{sf} - q)B_o = 24V_{wb}C_{wb}\frac{dp_w}{dt}$$

或

$$q_{sf} = q + \frac{24V_{wb}C_{wb}}{B_o} \cdot \frac{dp_w}{dt}$$

令

$$C = C_{wb}V_{wb}$$

则

$$q_{sf} = q + \frac{24C}{B_o} \cdot \frac{dp_w}{dt}$$

上式也可以化成无因次量来表示。即

$$\frac{q_{sf}}{q} = 1 - C_D \frac{dp_D}{dt_D}$$

这就是考虑井筒存储影响的内边界条件。在 C_D 很小，趋于零时， $\frac{q_{sf}}{q} \approx 1$ ，这时可忽略井筒存储的影响。

前面讲过井筒存储与关井续流的影响是近似等效的。因而，分析压力恢复早晚数据时，也可用井筒存储系数 C_D 。

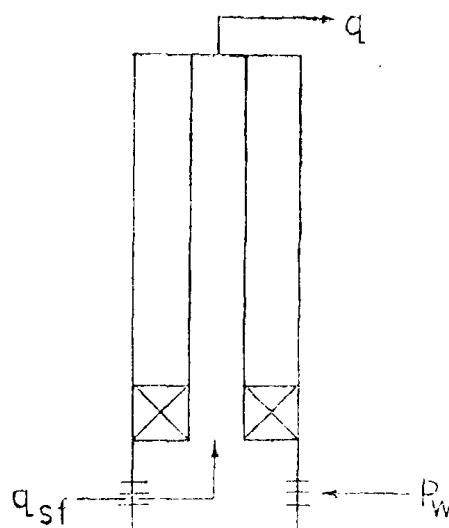


图3

参 考 文 献

1. 《油层压力恢复与油气井测试》C.S.马修斯等著,石油工业出版社 1983年
2. 《油藏工程原理》L.P.达克著,石油出版社,1983年
3. Advances in petroleum engineering, Hurst.W, 1981
4. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs, van Everdingen..., 1949
5. Well testing, Lee J., SPE textbook series vol, 1982

30秒的说明

测压前期的信息常受井筒及周围“噪波”的影响,如果能够滤去这些干扰,去粗存精,提取有用的反映井底及地层性质的信息,就可以缩短试井期限,提高试井效益,进入良性循环。

本文首先提出砂岩均质油藏中计入表皮因子与井筒存储效应(续流)的数学模型,并用拉普拉斯变换求出解析解,绘出Agarwal-Ramey双对数的理论曲线图版。它们都是目前广泛应用的Gringarten试井分析理论图版的基础。

不稳定液流井筒存储和表皮效应的 研究: I. 解析方法

Agarwal R.G.

Ramey H.J.

陈钦雷 摘译

张朝琛 校

摘 要

由于延长压降或压力恢复试井时间所付的代价太高,并希望从试井分析中得到更多的井底情况,现代试井方法已朝着能用短期压力资料的方向发展。“短期”资料可定义为常用的试井直线段以前的压力资料。影响短期资料的因素相当复杂,其中包括井筒存储、表皮效应、局部穿透、各种裂缝、油层有效厚度及非达西流动等等。另外,目前已发表的文章对短期试井分析也作了较详细的论述。本文的目的是要对短期不稳定流时存在井筒存储和表皮效应的情况下进行基础性研究。结果表明,在适当的条件下可以对短期试井资料作出合理的解释。

试井开始时,井底压力变化受井筒存储控制。应用这时的资料不可能对油层的生产能力和表皮效应作出解释,但可对井筒存储常数作出解释。初始时间后,就发生由井筒存储控制到常规直线段的过渡。应用这个期间的资料就可以得到某种情况下的油层流动能力和表皮效应。但短时间内得到的稳态表皮效应是不可靠的。这一点值得注意。另一个重要结论是,达到常规直线段所需要的时间通常不明显地受表皮效应的影响。

试井时许多实际原因促使人们应用短期试井资料。这些原因包括关井期间的产量损失和延长试井时间所付的代价及大量测试时压力计的利用率有限等。以上种种因素使得短期试井引起人们的重视。在这里所使用的“短期”意味着,不论是压降还是压力恢复,在这个时间内均未达到直线段。一般地,达到直线段之前的压力资料在油气井动态分析中是很宝贵的。有些试井资料往往因为未达到直线段而被遗弃,其实这些资料在另一技术领域内则是可用的。本文的目的就是要研究这样一种方法,使之能够应用于解释常规直线段之前的试井资料。

理 论

所考虑的问题是微可压缩液体在理想径向流体系中的流动问题。液体径向地流向半径为 r_w 的井。设地层均质各向同性，且地层无限大，由于测试时间非常短，外边界对井无影响。在 $r \geq r_w$ 处初始条件取为常压 p_i 。内边界条件取为从有限体积的井筒中以常产量生产，同时还假设地层表面存在稳态的（存储能力为零）表皮效应。无表皮效应的这种边界条件首先是 Van Everdingen 和 Hurst⁽¹⁾ 引入的，有时称之为井筒存储，卸载或续流问题。后来他们又把问题扩展为包括稳态的表皮效应在内的问题。这两个人都提供了线源井的特殊情况的解。包括表皮效应的这种解，是以拉普拉斯变换解的实反演积分形式给出的，但是仅对长时间逼近的情况发表在石油文献上。

Jaeger 曾研究过不稳定热传导问题的内边界条件，他考虑了一个圆柱体（范围为 $r=0$ 和 $r=r_w$ ），其中包含有理想传导性的固体或流通性好的流体。对该圆柱体来说：（1）热以单位体积的常速率通过，（2）热可以通过一薄膜阻力传到周围圆柱形固体中去，（3）流过的液体的质量以常流量采出。Carslaw 和 Jaeger⁽⁶⁾ 给出了热传导问题的精确解，此解类似于 V. Everdingen 和 Hurst 最初提出的对一有限半径的井无表皮效应而存在井筒存储的情况。Jaeger 等还描述了长时间的近似计算问题^(6, 9)。在他们所著书的第二版中关于热传导的问题就提出了与本文相一致的观点。本文中采用类似于 Blackwell 曾描述过的热传导问题来研究液体的流动。

流体流动的扩散方程以无因次压力 p_D 、无因次时间 t_D 及无因次半径 r_D 表示时可为

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (1)$$

初始和外边界条件是

$$p_D(r_D, 0) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \{p_D(r_D, t_D)\} = 0; \quad (3)$$

内边界条件是

$$\bar{C} \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1 \quad (4)$$

$$p_{wD} = \left[p_D - s \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1} \quad (5)$$

方程（4）表明，无因次井筒存储量加上无因次井底流量必须等于单位地面流量。井筒存储系数 $\bar{C}$ 是由 V. Everdingen 和 Hurst⁽¹⁾ 定义的，即

$$\bar{C} = \frac{C}{2\pi\phi h c r_w^2} \quad (6)$$

式中 ϕ = 孔隙度，%

h = 地层厚度，厘米

c = 压缩系数，1/大气压

r_w = 井半径, 厘米,

C = 井筒存储系数, 厘米³/大气压。存储量要根据压缩性或液面的变化求出。

方程 (5) 引入了一个稳态表皮效应, 因此在井底油层表面的压力降正比于油层表面的流量, 由方程 (4) 得到

$$\frac{q_{st}}{q} = - \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1 - \bar{C} \frac{dp_{wD}}{dt_D} \quad (7)$$

式中的 q 为常地层流量, q_{st} 是井底流量。无因次流压 p_{wD} 与 V. Everdingen 和 Ramey 曾使用的 $\bar{p}_D(t_D)$ 是一致的。因此 p_{wD} 描述了井筒内的压力, 而 p_D 表示带表皮效应的油层侧面上的压力。

方程 (1) — (5) 适于应用 Blackwell 所述的拉氏变换求解。本文将列举有关部分。无因次流压的变换为:

$$L \{p_{wD}\} = \frac{K_0(\sqrt{p}) + s\sqrt{p} K_1(\sqrt{p})}{p[\sqrt{p} K_1(\sqrt{p}) + \bar{C}p\{K_0(\sqrt{p}) + s\sqrt{p} K_1(\sqrt{p})\}]} \quad (6)$$

式中 K_0 和 K_1 是修正的零阶和一阶第二类贝塞尔函数。

Jaeger 也研究了径向系统内的压力分布问题。井底层面的流出及通过表皮的压力降 (在热传导模拟的范围内) 问题。这些问题对本文研究的问题来说是次要的。Blackwell 和 Jaeger 对于方程 (8) 求出实反演积分解为:

$$p_{wD}(s, \bar{C}, t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t_D}) du}{u^3 \{ [u \bar{C} J_0(u) - (1 - \bar{C} s u^2) J_1(u)]^2 + [u \bar{C} Y_0(u) - (1 - \bar{C} s u^2) Y_1(u)]^2 \}} \quad (6)$$

式中 $J_0(u)$ 、 $J_1(u)$ 是第一类零阶和一阶贝塞尔函数, $Y_0(u)$ 和 $Y_1(u)$ 是第二类贝塞尔函数。对于方程 (9) 的两种数值解法和短时间与长时间的近似解法已为本文作者之一曾经在其它问题的研究中给出了。但解之间的关系研究得不够。文中表 1 列出不同作者研究中所使用的符号, 这些作者提供了积分或有关导数的合理计算方法。表 2 列出了不同研究者进行计算时采用的参数的范围。

表 1 不同作者所用无因次量对照表

本文作者	Blackwell	Jaeger	Lesem	Hurst
$P_{wD}(s, \bar{C}, t_D)$	$\theta_1(t)$	$2\pi G(h, a, \tau)$	$\frac{4k^2}{\pi^2} I_1$	$\sigma N(\sigma, t_D)$
C	$\frac{1}{2}a$	$1/a$	$1/k$	$1/\sigma$
t_D	τ, t	τ	θ	t_D
s	$1/u$	h	$s=0$	$s=0$

由表 1 和表 2 可以看出, 对公式 (9) 中的积分计算时大多采用零表皮效应的特殊情况——在井底油管表面无流动阻力。人们还会注意到零存储系数的特殊情况将导致众所周知的常产量解。Jaeger 提供了最完整的有限表皮效应值的资料, 但由于无因次时间和存储系数的范围有限, 而无法在试井分析中使用。

其它有关的解也在石油文献中描述了⁽¹⁻³⁾。应用迭加原理, 并把井视为连续的线源,

表2 不同作者在数值计算中所用的参数范围

作 者	s	$\bar{C}$	t_D	注 释
Blackwell				仅作了解析研究
Jaeger	0	$1/8, 1/6, 1/4, 1/2$ $2/3, 1, 2$	0.2—2.0	以表的形式展示
	$0, 1/2, 1, 2, 3$ $4, 5, 7, 10, 20$	$1/2, 1$	0.2—20	以图的形式展示
Lesem	0	$1/6, 1/9, 1/12, 1/15$ $1/18, 1/21, 1/24,$ $1/27, 1/30$	1—1000	以图的形式展示
Hurst	0	$2.5, 5, 10, 12.5, 16^2/3,$ $25, 50$	$10^2—10^4$	以图的形式展示
V.Everdingen和Hurst	0	1000—50000	$10^3—10^7$	线性源逼近井, 用图的形式展示

则无因次井底压力的拉氏变换可为:

$$L\{P_{WD}\} = \frac{K_o(\sqrt{p}) + s}{p[1 + \bar{C}pK_o(\sqrt{p}) + s\bar{C}p]} \quad (10)$$

从(8)式中也可得到相同的结界, 即当自变量 p 变得很小时, 乘积 $\{\sqrt{p} K_o(\sqrt{p})\}$ 趋近于一。因此, 方程(10)是对方程(8)式的一个长时间情况的逼近式。由方程(10)可得出实反演积分:

$$P_{WD}(s, \bar{C}, t_D) = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t_D}) J_0(u) du}{u \left\{ \left[1 - u^2 \bar{C} s + \frac{1}{2} \pi u^2 \bar{C} Y_0(u) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \pi \bar{C} u^2 J_0(u) \right]^2 \right\}} \quad (11)$$

对(11)式用数值法进行计算, V.Everdingen和Hurst对零表皮效应的特殊情况将解绘制成图。后来, Chatas也进行过研究, 在文献1中存储系数 $\bar{C}$ 的范围是1000~50000, 文献12中是1000~75000。

Blackwell和Jaeger曾用古典方法求解方程(1)~(5)。即对方程作拉氏变换求出变换空间的解——方程(8)。V.Everdingen和Hurst对他们得到的方程(10)使用迭加法, 求得方程(8)的一个解:

$$P_{WD}(t_D) = \int_0^{t_D} \left[1 - \bar{C} \frac{dP_{WD}(t_D')}{dt_D'} \right] \left[\frac{dP_D}{dt_D}(t_D - t_D') \right] dt_D' + s \left[1 - \bar{C} \frac{dP_{WD}(t_D)}{dt_D} \right] \quad (12)$$

方程(12)是一个卷积型微分积分方程, 可直接对其进行拉氏变换。如果对积分内方括号中第

二项求拉氏变换, 就得到方程 (10)。如果代之为常流量、有限半径柱形变换, 则得到方程式 (8)。参阅方程 (7), 方程 (12) 积分号内方括号中第一项是在任意给定时间的井底产量。因此方程 (12) 描述了由于产量变化而引起的井底压力的变化, 而该产量变化取决于井底存储的状况。这一点将在下面加以详细说明。

Jaeger和Blackwell对方程 (8) 给出了短期和长期近似式。长期近似式是

$$P_{WD}(s, \bar{C}, t_D) = \frac{1}{2} \left\{ \ln 4t_D - \gamma + 2s + \frac{1}{2t_D} \left[\ln 4t_D - \gamma + 1 - 2\bar{C} (\ln 4t_D - \gamma + 2s) \right] + O(t_D^{-2}) \right\} \quad (13)$$

短期近似式为

$$P_{WD}(s, \bar{C}, t_D) = \frac{1}{\bar{C}} \left\{ t_D - \frac{t_D^2}{2s} + \frac{8t_D^{5/2}}{15\sqrt{\pi} \bar{C} s^2} + O(t_D^3) \right\}; s, \bar{C} \neq 0 \quad (14)$$

$$P_{WD}(0, \bar{C}, t_D) = \frac{1}{\bar{C}} \left\{ t_D - \frac{4t_D^{3/2}}{3\sqrt{\pi} \bar{C}} + O(t_D^2) \right\}; s=0, \bar{C} \neq 0 \quad (15)$$

式中 $\gamma=0.57722$, 欧拉常数。

V.Everdingen和Hurst求出了长期常流量解 (无存储或无表皮效应) 的逼近式:

$$p_D(t_D) \approx \frac{1}{2} [\ln(4t_D) - \gamma], t_D > 100 \quad (16)$$

对比公式 (13) 和 (16) 可知, 在很长时间的情况下:

$$P_{WD}(s, \bar{C}, t_D) \approx p_D(t_D) + s \quad (17)$$

正如V.Everdingen和Hurst(2, 3)所得出的那样。如果把 (13) 式重新整理, 并以之代入 (16) 式很容易得到:

$$P_{WD}(s, \bar{C}, t_D) = \left[p_D(t_D) + s \right] \left[1 + \frac{1}{2t_D} - \frac{\bar{C}}{t_D} - \frac{(2s-1)}{4t_D} + \frac{1}{2} O(t_D^{-2}) \right], t_D > 100 \quad (18)$$

在该形式下, 长期解的特点为, 首先, 方括号内的 $1/2t_D$ 项在 $t_D > 100$ 时可被忽略, t_D^{-2} 项也可忽略, Ramey曾指出, 井筒存储作用在零表皮效应的情况下当无因次时间

$$t_D \geq 60\bar{C} \quad (19)$$

时消失。显然, 对实际应用来说, 对于有限表皮效应的情况这个逼近也是成立的。就是说当符合方程 (19) 时, $\bar{C}/t_D$ 项与 1 相比仅为 0.017, 而且包含着 "S" 的最后一项与 S 值相比也可忽略。当然, 在方程 (19) 所确定的时间内方程 (18) 是一个可靠的近似式这一点并不明显。这只能通过对比 (18) 式的结果与由 (9) 所得到的解来确定, 这一对比还将在下面讨论。Jaeger提出了对任意时间的两个重要校正式:

$$P_{WD}(s, \bar{C}, t_D) = \frac{t_D}{\bar{C}}, \text{ for } s \rightarrow \infty \quad (20)$$