高等数学题解

主　编　李雪贲　王东红
主　审　敖屹兰

广东交通职业技术学院

高等数学题解

主　编　李雪贲　王东红
主　审　敖屹兰

广东交通职业技术学院

前　言

根据我院各专业课程的需要和《数学教学大纲》，我们编写了这本《高等数学题解》，该书与现用各专业通用教材《高等数学》配套使用，书中给出与必修内容对应的习题解答并配有测验题，以便学生更好地学习《高等数学》这门课程。

该书由讲师李雪贲、讲师王东红主编。由高级讲师敖屹兰主审。第二章、第三章、第四章由李雪贲编 305题 写。第五章、第六章 343题 由王东红编写。

由于编写时间仓促，书中难免有错误希望读者在使用过程中不断提出宝贵意见。

编者

2002．10月

目　录

第二章　极限与连续

本　章　总　结

一、学习本章的基本要求

1. 理解数列极限与函数根限的概念. 知道极限的“$\varepsilon-N$”，“$\varepsilon-\delta$”的定义. 了解左、右根限的概念.

2. 知道极限的一些基本性质（主要指：有界性，唯一性，同号性，函数极限与无穷小关系等几个定理）.

3. 掌握极限的四则运算法则. 知道两个极限存在准则，掌握两个重要极限。

4. 了解无穷小，无穷大的概念及其相互关系. 知道无穷小的性质，掌握无穷小的比较.

5. 理解函数在一点处连续的概念，会求函数的间断点及判断间断点的类型.

6. 知道初等函数的连续性及在闭区间上连续函数的性质(最小值、最小值定理及介值定理).

二、本章的重点、难点

重点：

1. 极限的概念；无穷小；极限四则运算法测；两个重极限.

2. 函数的连续性.

难点

1. 极限的定义.

2. 函数在一点连续的定义.

三、学习中应注意的几个问题

1. 极限概念

数列极限和函数极限，这两个概念所研究的都是在自变量的某种变化过程中函数的变化趋势问题（数列 x_n 可以看作自变量为正整数 n 的函数，即 $x_n=f(n)$. 弄清极限概念，必须先了解自变量的变化状态及其函数的变化趋势.

(1) 自变量的变化状态. 极限是研究函数的变化趋势的，但函数的变化趋势是与自变量的变化状态有关的，因而必须首先指出，极限是在自变量的某种变化过程中，研究函数的变化趋势问题.

数列极限，自变量 n 只有一种变化：n 取正整数无限增大（即 $n\to\infty$）.

函数极限，自变量 x 的变化状态，主要有两种情形：

1°自变量 x 任意接近于定值 x_0. 当 x 取比 x_0 大的值接近 x_0 时，记作 $x\to x_0+0$；当 x 取比 x_0 小的值接近 x_0 时，记作 $x\to x_0-0$；当 x 以任意方式（包括上述的两种情形）接近 x_0 时，记作 $x\to x_0$

2°自变量x趋向无穷大．当x取正值无限变大时，记作$x \to +\infty$；当x取负值，而绝对值无限增大时，记作$x \to -\infty$；当$|x|$无限增大时，记作$x \to \infty$．

（2）函数的变化趋势．在自变量不同变化状态下，函数的变化趋势也是各种各样的．

1°函数$f(x)$无限趋近于一个确定常数（极限存在）．

2°函数$f(x)$趋向无穷大，包括$f(x)$取正值无限增大；$f(x)$取负值而绝对值增大；$f(x)$的绝对值无限增大．此时，称$f(x)$的极限不存在，但依然用极限符号表示($\lim f(x)=\infty$)．

$3^\circ f(x)$不无限趋向于一个确定的常数，也不趋向于无穷大．

（3）函数的极限形式．由于自变量的变化状态及其相应的函数变化趋势的不同，因此就构成了函数的极限形式的多样性．如

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$，…，函数极限形式虽然很多，但最主要的是两种形式：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

只要把这两种形式的极限定义理解清楚，其它各种极限形式的

定义也就不难理解了.

1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的含意的通俗说法：当自变量 x 充分接近 x_0 时，函数$f(x)$与常数 A 充分接近，或说当 x 与 x_0 之差的绝对值$|x-x_0|$充分小时（$x\neq x_0$），则$f(x)$与 A 之差的绝对值$|f(x)-A|$可以任意小.

2°用$|f(x)-A|<\varepsilon$ 来刻画$f(x)$无限趋近于 A，它的含义是，ε 是任意给定的不论多么小的正数，而$|f(x)-A|$比 ε 还要小，这就刻画出$|f(x)-A|$要多么小，有多么小的含义.

自变量在哪里取值，才能使绝对值不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立呢？在极限定义中指出，只有 x 在 x_0 点充分小的邻域内取值，即 $0<|x-x_0|<\delta$，才能保证不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. 用绝对值不等式 $0<|x-x_0|<\delta$，刻画了 x 充分接近 x_0 的含义.

3°两个绝对值不等式的关系（即 ε 与 δ 之间的关系）. 极限定义中强调对任给 $\varepsilon>0$，总能找到 $x_。$ 点的 δ 邻域（$0<|x-x_。|<\delta$，当 x 落在 $x_。$ 点的 δ 领域（即 x 满足（$0<|x-x_。|<\delta$））时。x 所对应的函数值$f(x)$就一定满足绝对值不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$ 对任意给定的 $\varepsilon>0$，总能找到 $\delta>0$，一般说来 ε 变了，δ 与变，ε 越小，δ 相应地也越小，因此 δ 一般依赖 ε.

只有深刻地理解 ε 的任意性，ε 与 δ 之间的关系，两个绝

对值不等式，才能掌握极限概念的实质。

4°函数$f(x)$在 $x \to x_0$ 时的极限值，与$f(x)$在 $x = x_0$ 点的函数值是两个不同的概念，两者不能混一为一谈，换句话说，函数$f(x)$在 $x \to x_0$ 时的极限值与$f(x)$在 $x = x_0$ 点的函数值无关.

例如，$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$，在 $x = 1$ 点没有定义，而在 $x \neq 1$ 时，有

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1\ ,$$

当 $x \to 1$ 时（$x \neq 1$），有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x+1) = 2\ .$$

这个例子说明，求函数极限是从函数无限变化过程中看函数变化趋趋势的，面晃是静止地看函数在一点处的函数值.

读者可以仿照上面的解释，深刻地理解极限“$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$”的含义.

（5）函数极限几种形式的表述列表如下：

函数各种形式的极限定义，其核心内容都四句话，表述方式可列为下表.

极限形式	任给	存在	当	总有
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$	$\varepsilon > 0$	$\delta > 0$	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	$M > 0$	$\delta > 0$	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$\lvert f(x) \rvert > M$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$	$\varepsilon > 0$	$X > 0$	$\lvert x \rvert > X$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	$M > 0$	$X > 0$	$\lvert x \rvert > X$	$\lvert f(x) \rvert > M$

2. 极限四则法则

极限四则运算法则是求函数极限的重要依据. 但在运用进要特别注意条件，只有$f(x)$，$g(x)$的极限存在时，极限四则运算法则才成立（对于除法还需分母极限不为零），否则极限运算法则是不能使用的.

根据极限运算法则，不难得到，若$\lim f(x)$存在，$\lim g(x)$不存在，则$\lim[f(x) \pm g(x)]$不存在. 这是因为，若$\lim[f(x) \pm g(x)]$存在，令 $\varphi = f(x) \pm g(x)$，则

$$g(x) = \pm[\varphi(x) - f(x)],$$

已知$\lim\varphi(x)$，$\lim f(x)$存在，则极限运算法则可得，$\lim g(x)$存在，这与已知条件$\lim g(x)$不存在相矛盾，故$\lim[f(x) \pm g(x)]$不存在.

若$\lim f(x)$，$\lim g(x)$都不存在，而$\lim[f(x) \pm g(x)]$可能存在,也可能不存在.

3. 求函数极限的方法

求函数的极限是本章的基本要求，归纳起来有以下几种方法.

（1）利用极限四则运算法则求极限. 有些函数的极限不满足极限四则运算法则的条件，因此不能直接应用四则运算法则. 对这些函数往往需先进行恒等变换（如消去公因子，分子与分母同除以 x 的最高次幂，分子、分母同乘共轭根式，利用三角恒等式等），再用极限四则运算法则求极限.

（2）利用两个重要极限求极限（或通过变量代换化为两个重要极限形式后再求极限）.

（3）利用无穷小的性质及无穷小与无穷大的关系求极限.

（4）利用有关复合函数的极限定理求极限.

（5）利用函数的连续性求极限.

（6）在以后各章节中还将会学到其它的一些求极限的方法（如应用罗必塔法则；应用 积分求某引进函数的极限；应用级数收敛的必要 4 求某些函数的极限等）.

4. **函数连续性概念**

（1）函数连续性三个定义是等价的，函数 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性，可以用三种不同形式定义.

定义 1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + x) - f(x_0)] = 0$.

定义 2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(x_0)$.

定义 3. 如果对任给 $\varepsilon > 0$ 总存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$

时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$，则称$f(x)$在x_0点连续.

这三种定义本质是一致的，表示的是同一个概念. 从其中任一个定义出发，便可推出另外两个定义形式.

在定义3中，特别需要注意的是，$f(x)$在点x_0处必须的定义.

(2) 函数连续条件. 由连续定义：

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=f(x_0)$，

立即可得到$f(x)$在x_0点连续. 应用时，必须注意需满足以下三个条件：

1°$f(x)$在x_0点有定义，

2°$\lim f(x)$存在，

3°极限值等于函数值，即$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=f(x_0)$. 以上三个条件至少有一条不满足，则称$f(x)$在$x_0$点处间断.

讨论分段函数在分界点处是否连续，我们就是按以上的三个条件 个检查看是否满足，只有三个条件同时满足时，方可断定在分界点是连续的.

(3) 函数连续性的几何意义. 函数在某区间上连续，其函数的几何图形是一条连续变化没有缝隙的曲线.

5. 函数的间断点

(1) 如果函数$f(x)$在x_0点不满足连续的三个条件之一者，则称x_0为$f(x)$的间断点.

(2) 如果 x_0 是 $f(x)$的间断点，且在 x_0 点的左、右极限存在，则称 x_0 点为第一类间断点.

在第一类间断点中，极限存在$f(x_0-0)=f(x_0+0)$的间断点又称为可去间断点. 显然可去间为是第一类间断点中的特殊情形. 除第一类间断点以外的间断点，称为第二类间断点.

(3) 判断分段函数的分界点是不是间断点，通常方法是求分界点处的左、右极限. 依此来判断该点是不是间断点，若是间断点是属何种类型. 在分界点处，左右极限存在且相等，又等于$f(x_0)$，则 x_0 点是连续点；左、右极限存在且相等，但不等于$f(x_0)$，则 x_0 为可去间断点；左、右极限存在，但不相等，则 x_0 为第一类间断点；左、右极限至少有一个不存在则 x_0 为第二类间断点.

6. 初等函数在其定义区间内是连续的

设初等函数$y=f(x)$，$x=x_0$ 是定义区间内的一点，于是有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]$.

上式说明对于连续函数，极限符号与函数符号可以交换次序. 求初等函数在其定义区间内任一点处的极限值，就是求函数在该点处的函数值，因此，求函数的极限困难之外，是求初等函数在其无定义点外的极限和非初等函数的极限问题.

习 题 2-1

观察下列1-5题中数列有无极限，如有极限请指出其极限值.

1. 数列 $u_n=\frac{(-1)}{n}$.　　2. 数列 $u_n=\frac{2^n+(-1)^n}{2^n}$.

3. 数列 $u_n=n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$.　　4. 数列 $u_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$.

5. 数列 $u_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$　　6. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

1. 解：观察数列 $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时，u_n 忽大于0，忽小于0而趋向于确定的常数0，所以此数列有极限，极限值为0.

2. 解：观察数列 $u_n=\frac{2^n+\ (-1)^n}{2^n}$

$$\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \cdots,\ 1+\frac{(-1)^n}{2^n},\ \cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时，u_n 大于1而趋向于确定的常数1，所以，此数列有极限，极限值为0.

3. 解：观察数列 $u_n=n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$

$$1,\ 0,\ -3,\ 0,\ -5,\ \cdots,\ n\cdot\sin\frac{n\pi}{2},\ \cdots.$$

当"$n\to\infty$"时，u_n 不趋于一个确定数，所以此数列是发散的.

4. 解：观察数列 $u_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

$$1,\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{5},\ 1,\ \cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时，u_n 忽等于 1 而趋向于 1，忽大于 0 而趋向于 0，数列 u_n 不趋于一个确定数，所以数列 u_n 是发散的.

5. 解：观察数列 $u_n=\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$

$$0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n},\ \cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时，u_n 忽等于 0，忽小于 0，忽大于 0 而趋向于确定常数 0，所以，此数列有极限，极限值为 0.

6. 证：对于任意给定的正数 ε，要使

$$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

只要 $$2^n<\frac{1}{\varepsilon}$$

即 $$n>-\frac{\lg\varepsilon}{\lg 2}=-\log_2\varepsilon$$

取 N 是大于 $-\log_2\varepsilon$ 的一个正整数. 当 $n>N$ 时，就有

$$n > -\log_2^{\varepsilon}.$$

即
$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

所以，对于任意给定的正数，总存在正整数 $N = [-\log_2^{\varepsilon}]$（符号 $[n]$ 表示不超过 x 的最大整数），当 $n > N$ 时，就有

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon.$$

这就证明：$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

习 题 2-2

7. 证明 $\lim\limits_{x \to 2}(x + 3) = 5$.

8. 证明 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

9. 观察当 $x \to -1$ 时，函数 $f(x) = 3x^2 + x + 1$ 的极限是多少？

10. 观察当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ 的极限是多少？

7. 证：$\forall\ \varepsilon > 0$，要使

$$|(x+3) - 5| < \varepsilon$$

即
$$|x - 2| < \varepsilon$$

只要
$$0 < |x - 2| < \varepsilon$$

取 $\delta = \varepsilon$，所以根据以上分析知：对于 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta = \varepsilon$，当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时，恒有