北京航空学院学报
Journal of Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics
一九八三年 第一期 №1 1983

多环空间机构的震动力完全平衡及一般空间机构的震动力平衡理论

陈宁新 張启先

【摘 要】

继文[1]之后，本文结合R—S—S**、R—C—S、R—C—C、P—P—S、C—C—S和S—S—S诸杆质心位置的讨论，导出了RRSS—SSR、RRCS—SSR、RRCCR—RSS、RRCCR—SSR、RSSR—SS和RSPPR—SSR等双环空间机构的震动力完全平衡条件。为了对空间机构的震动力平衡提供依据和方法，文中对一般空间机构的震动力平衡理论进行了研究并提出了两个定理。

一、前 言

由于沒有适应性广的研究方法，所以到目前为止，除了文[2]、[3]用附加二杆组的方法平衡某些空间机构的震动力外，还很少研究多环空间机构的震动力平衡。有关震动力平衡理论的研究，也仅限于平面机构[4]—[8]，并未拓广到空间机构。这种对空间机构平衡研究不足的情況，在一定程度上阻碍着空间机构在实际中的推广应用。因此，本文继文[1]后，讨论了多环空间机构中$R—S—S$、$R—C—S$、$R—C—C$、$P—P—S$、$C—C—S$和$S—S—S$诸杆的质心位置，并导出了$RRSS—SSR$、$RRCS—SSR$、$RRCCR—RSS$、$RRCCR—SSR$、$RSSR—SS$和$RSPPR—SSR$等双环空间机构的震动力完全平衡条件。在文[1]、[10]和上述各类运动杆的的质心位置和机构震动力完全平衡条件的研究基础上，本文进一步探讨了一般空间机构的震动力平衡理论并提出两个定理，为空间机构震动力的平衡研究提供了依据和方法。

---

* 本文收到日期为1982年12月

**文中符号字母R、P、C、S、S'和E分别代表轉动副、圆柱副、移动副、球面副、球销副及平面副。

文中的符号和坐标系均同文[1]。为方便起见，将文[1]中本文所需的公式简录如下。

$$\mathbf{z}_i^{(i+1)}=[C_{i+1\ i}]\mathbf{z}_i \tag{1}$$

式中顶标“$(i+1)$”表示该向量在坐标系 $i+1$ 中。为简便起见，本坐标系中的向量不加顶标。$[C_{i+1\ i}]$为方向余弦矩阵，其值见文[1]。$\mathbf{z}_i^{(i+1)}$为常向量。

$$(\mathbf{z}_i^{(i+1)})^T=(0,\ sin\alpha_{i\ i+1},\ cos\alpha_{i\ i+1})^T \tag{2}$$

空间机构的每个封闭环均有以下两个封闭方程：

$$[C_{n\ 1}][C_{1\ 2}]\cdots\cdots[C_{i-1\ i}]=[C_{n\ n-1}][C_{n-1\ n-2}]\cdots\cdots[C_{i+1\ i}] \tag{3}$$

和
$$h_i[C_{n\,i}]\mathbf{x}=-\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})-\sum_{k=n}^{i+1}[C_{nk}](h_k\mathbf{x}+s_k\mathbf{z})-s_i[C_{ni}]\mathbf{z} \tag{4}$$

由式（1）和（3）得

$$\left.\begin{aligned}&[C_{ni}]\mathbf{z}=[C_{n\ i+1}]\mathbf{z}_i^{(i+1)}\\&[C_{ni}]\mathbf{z}_{i-1}^{(i)}=[C_{n\ i-1}]\mathbf{z}_{i-1}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

设机构各运动杆的质量为m_i，质心在动系和定系n中的位置向量为$\mathbf{r}_i$和$\mathbf{r}_{si}^{(n)}$，机构的总质心在定系n中的位置向量为$\mathbf{r}_s^{(n)}$，则机构的总质心位置方程为

$$\mathbf{r}_s^{(n)}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n-1}m_i\mathbf{r}_{si}^{(n)} \tag{6}$$

其中
$$M=\sum_{i=1}^{n-1}m_i \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{r}_{si}^{(n)}=s_n\mathbf{z}+\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})+[C_{ni}](h_i\mathbf{x}+\mathbf{r}_i)\\&\text{或}\\&\mathbf{r}_{si}^{(n)}=-h_n\mathbf{x}-\sum_{k=n-1}^{i+1}[C_{nk}](h_k\mathbf{x}+s_k\mathbf{z})-[C_{ni}](s_i\mathbf{z}-\mathbf{r}_i)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

二、多环空間机构的震动力完全平衡条件

在以下叙述中，除了所讨论的各杆有移动自由度外，其它各杆均由纯转动链与机架相连。

1． $R—S—S$杆

如图1所示，空间 n 杆机构的杆 i 上有两个S副和一个R副，其上固接有两个坐标系$O_iX_iY_iZ_i$和$O_i'X_i'Y_i'Z_i'$，两坐标系中的向量有下述变换关系：

$$\mathbf{v}^{(i)}=[\theta]\mathbf{v}^{(i')} \tag{9}$$

式中$\mathbf{v}^{(i)}$和$\mathbf{v}^{(i')}$代表向量$\mathbf{v}$在系i和i'中，矩阵$[\theta]$为常量方向余弦矩阵，可按杆i的结构及坐标系的选取方式确定。

由式（9）得

$$[C_{n,i'}]=[C_{n,i}][\theta] \tag{10}$$

设杆i的质量为 m_i ，质心在系i中的位置向量为$\mathbf{r}_i$：

$$\mathbf{r}_i=r_{ix}\mathbf{x}_i+r_{iy}\mathbf{y}_i+r_{iz}\mathbf{z}_i \tag{11}$$

将$\mathbf{r}_i$分解为沿 $\mathbf{z}_i$、$\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{x}_i'$ 三个方向的向量和，即

$$\mathbf{r}_i=a\mathbf{x}_i+b\mathbf{z}_i+c\mathbf{x}_i'^{(i)} \tag{12}$$

为了确定标量 a 、 b 和 c ，将单位位置向量$\mathbf{x}_i'$在系 i 中的方向余弦 $cos\alpha$ 、$cos\beta$ 和$cos\gamma$ 代入式（11），得

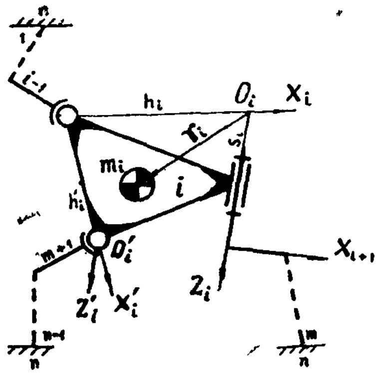

图　1

$$\mathbf{r}_i=(a+ccos\alpha)\mathbf{x}_i+ccos\beta\mathbf{y}_i+(b+ccos\gamma)\mathbf{z}_i \tag{13}$$

由式（11）和（13）不难解得：

$$\left.\begin{aligned} a&=r_{ix}-r_{iy}sec\beta cos\alpha \\ b&=r_{iz}-r_{iy}sec\beta \\ c&=r_{iy}sec\beta \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

将机构两个环的封闭方程（4）及式（12）、（5）、（9）、（10）一并代入式(8)，整理得杆 i 质心在定系 n 中的位置向量：

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{si}^{(n)}=&-\left(1+\frac{a}{h_i}\right)\sum_{k=m}^{i+1}[C_{nk}](h_k\mathbf{x}+s_k\mathbf{z})+\left(b-s_i-\frac{a}{h_i}s_i\right)[C_{n,i+1}]\mathbf{z}_i^{(i+1)}\\ &-\left(\frac{a}{h_i}+\frac{c}{h_i'}\right)\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})-\frac{c}{h_i'}\sum_{p=n-1}^{m+1}[C_{np}](h_p\mathbf{x}+s_p\mathbf{z})+d\end{aligned} \tag{15}$$

式中d为常向量。

由于式（15）中不含运动变量矩阵$[C_{ni}]$，由式（6）可知，机构的总质心位置方程中也不含$[C_{ni}]$，故不在杆 i 上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例1　$RRSS-SSR$空间六杆机构的震动力完全平衡。

图2所示为 $RRSS-SSR$ 双环空间六杆机构，各运动杆的质量为m_i，质心位置向量为$\mathbf{r}_i$。为了不在杆2上附加平衡重，将式（15）和（8）代入机构总质心位置方程（6），整理得：

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_s^{(6)}=\frac{1}{M}\Big\{&[C_{61}]\left[(h_1+r_{1x})m_1-\left(\frac{a}{h_2}+\frac{c}{h_2'}\right)h_1m_2\right]\mathbf{x}+[C_{63}]\Big[\mathbf{r}_3m_3\\ &-\left(1+\frac{a}{h_2}\right)m_2\left(h_3\mathbf{x}-\left(\frac{h_2}{h_2+a}b+s_2\right)\mathbf{z}_2^{(3)}\right)\Big]\end{aligned}$$

$$+[C_{64}]\left(\mathbf{r}_{4x}m_4-\frac{c}{h_2'}h_4m_2\right)\mathbf{x}+[C_{65}]\Big[\mathbf{r}_5m_5$$

$$\left.-h_5\left(m_4+\frac{c}{h_2'}m_2\right)\mathbf{x}\Big]+\mathbf{D}\right\} \tag{16}$$

由式（16）得$RRSS—SSR$双环空间六杆机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}
&(h_1+r_{1x})m_1-\left(\frac{a}{h_2}+\frac{c}{h_2'}\right)h_1m_2=0\\
&\mathbf{r}_3m_3-\left(1+\frac{a}{h_2}\right)m_2\left[h_3\mathbf{x}-\left(\frac{h_2}{h_2+a}b+s_2\right)\mathbf{z}_2^{(3)}\right]=0\\
&r_{4x}m_4-\frac{c}{h_2'}h_4m_2=0\\
&\mathbf{r}_5m_5-h_5\left(m_4+\frac{c}{h_2'}m_2\right)\mathbf{x}=0
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

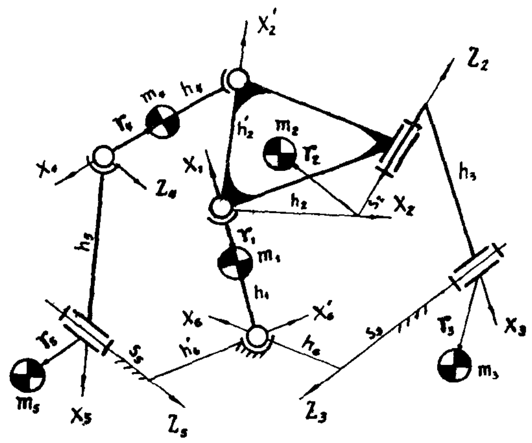

图 2

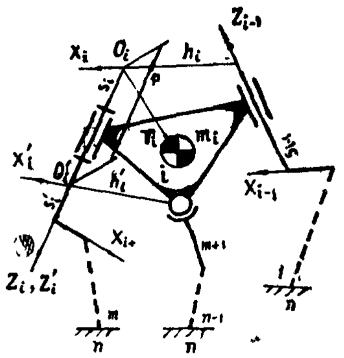

图 3

2. $R—C—S$杆

如图3所示，空间n杆机构中杆i上有一个R副、一个C副和一个S副，其上固接的两个坐标系仍为$O_iX_iY_iZ_i$和$O_i'X_i'Y_i'Z_i'$。杆i的质量为m_i，质心在系i中的位置向量为$\mathbf{r}_i$。将$\mathbf{r}_i$分解为沿两转动轴线$\mathbf{z}_i$、$\mathbf{z}_{i-1}$及$\mathbf{x}_i'$三方向的向量和，即

$$\mathbf{r}_i=a\mathbf{x}_i'^{(i)}+b\mathbf{z}+c\mathbf{z}_{i-1}^{(i)} \tag{18}$$

设单位向量$\mathbf{x}_i'$与$\mathbf{z}_{i-1}$在系i的方向余弦分别为$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$与0、$\sin\alpha_{i-1,i}$、$\cos\alpha_{i-1,i}$，则可将式（18）表示为：

$$\mathbf{r}_i=a\cos\alpha\mathbf{x}_i+(a\cos\beta+c\sin\alpha_{i-1,i})\mathbf{y}_i+(a\cos\gamma+b+c\cos\alpha_{i-1,i})\mathbf{z}_i \tag{19}$$

由式（11）和（19）可得：

$$\left.\begin{aligned}&a=r_{ix}\sec\alpha\\&b=r_{iz}-r_{ix}\sec\alpha\cos\gamma-(r_{iy}-r_{ix}\sec\alpha\cos\beta)\operatorname{ctg}\alpha_{i-1},\\&c=(r_{iy}-r_{ix}\sec\alpha\cos\beta)\operatorname{cosec}\alpha_{i-1},\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

将式（18）、（5）及封闭方程（4）代入式（8），整理得杆 i 质心在定系 n 中的位置向量为：

$$\mathbf{r}_{si}^{(n)}=-\left(1+\frac{a}{h_i'}\right)\sum_{k=m}^{i+1}[C_{nk}](h_k\mathbf{x}+s_k\mathbf{z})-\frac{a}{h_i'}\sum_{j=n-1}^{m+1}[C_{nj}](h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})$$

$$+\left(b-s_i-\frac{a}{h_i'}s_i'\right)[C_{n\,i+1}]\mathbf{z}_i^{(i+1)}+c[(C_{n\,i-1}]\mathbf{z}+\mathbf{d}\tag{21}$$

由于式（21）不含运动变量矩阵$[C_{ni}]$，故不在杆 i 上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例 2　$RRCS-SSR$空间六杆机构的震动力完全平衡。

对图 4 所示 $RRCS-SSR$ 双环空间六杆机构，将式（21）及（8）代入总质心方程（6），整理得：

$$\mathbf{r}_s^{(6)}=\frac{1}{M}\left\{[C_{61}][(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1+cm_2\mathbf{z}]+[C_{63}]\left[\mathbf{r}_3m_3-\left(1+\frac{a}{h_2'}\right)h_3m_2\mathbf{x}\right.\right.$$

$$\left.+\left(b-s_2-\frac{a}{h_2'}s_2'\right)m_2\mathbf{z}_2^{(3)}\right]+[C_{64}]\left(\mathbf{r}_4m_4-\frac{a}{h_2'}h_4m_2\mathbf{x}\right)$$

$$\left.+[C_{65}]\left[\mathbf{r}_5m_5-h_5\left(m_4+\frac{a}{h_2'}m_2\right)\mathbf{x}\right]+\mathbf{D}\right\}\tag{22}$$

由式（22）知，不在杆 2 上附加平衡重时，$RRCS-SSP$ 空间机构的震动力完全平衡条件为：

$$\left.\begin{aligned}&(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1+cm_2\mathbf{z}=0\\&\mathbf{r}_3m_3-\left(1+\frac{a}{h_2'}\right)h_3m_2\mathbf{x}+\left(b-s_2-\frac{a}{h_2'}s_2'\right)m_2\mathbf{z}_2^{(3)}=0\\&\mathbf{r}_4m_4-\frac{a}{h_2'}h_4m_2\mathbf{x}=0\\&\mathbf{r}_5m_5-h_5\left(m_4+\frac{a}{h_2'}m_2\right)\mathbf{x}=0\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

3．$R-C-C$杆

如图 5 所示，空间 n 杆机构中杆 i 上有两个 C 副和一个 R 副，其上固接的两坐标系仍为 $O_iX_iY_iZ_i$和$O_i'X_i'Y_i'Z_i'$。杆 i 的质量和质心在系 i 中的位置向量为m_i和$\mathbf{r}_i$。将 $\mathbf{r}_i$ 分解为沿三个转动轴线的向量和，即

$$\mathbf{r}_i=a\mathbf{z}_i'^{(i)}+b\mathbf{z}_i+c\mathbf{z}_{i-1}^{(i)}\tag{24}$$

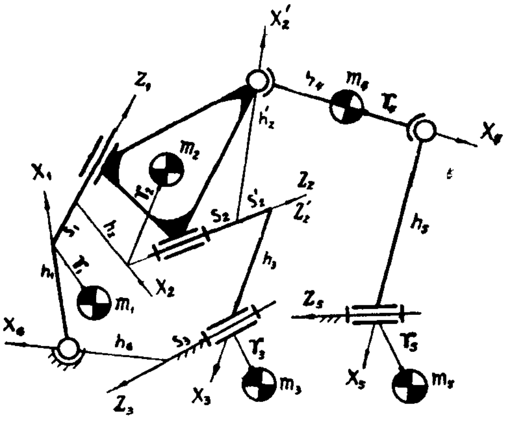

图 4

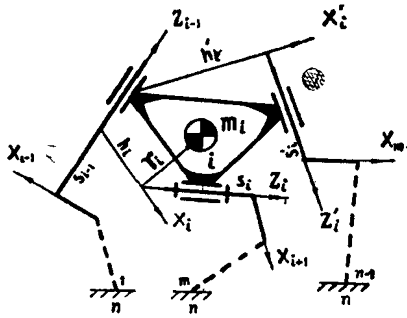

图 5

如令单位向量$\mathbf{z}_i'$在系i中的方向余弦为$cos\alpha$、$cos\beta$、$cos\gamma$，则同样可用式（20）求出a、b和c。

将式（24）及（5）代入式（8），整理得杆i质心在定系n中的位置向量：

$$\mathbf{r}_{s_i}^{(n)} = -\sum_{k=m}^{i+1}[C_{nk}](h_k\mathbf{x}+s_k\mathbf{z})+(b-s_i)[C_{n\ i+1}]\mathbf{z}_i^{(i+1)}$$

$$+a[C_{n\ m+1}]\mathbf{z}_i'^{(m+1)}+c[C_{n\ i-1}]\mathbf{z}+\mathbf{d} \qquad (25)$$

由于式（25）不含运动变量矩阵$[C_{ni}]$，故不在杆i上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例3　$RCCRR—RSS$空间七杆机构的震动力完全平衡

对图6所示$RCCRR—RSS$双环空间七杆机构，将式（25）和（8）代入总质心位置方程（6），整理得：

$$\mathbf{r}_s^{(7)} = \frac{1}{M}\{[C_{71}][(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1+cm_2\mathbf{z}]+[C_{73}][\mathbf{r}_3m_3-h_3m_2\mathbf{x}+$$

$$+(b_2-s_2)m_2\mathbf{z}_2^{(3)}]+[C_{74}][\mathbf{r}_4m_4-h_4(m_2+m_3)\mathbf{x}]+[C_{75}](\mathbf{r}_5m_5$$

$$+am_2\mathbf{z}_2'^{(5)})+[C_{76}][\mathbf{r}_6m_6-(h_6\mathbf{x}+s_5\mathbf{z}_5^{(6)})m_5]+\mathbf{D}\} \qquad (26)$$

由式（26）知，不在杆2上附加平衡重时，$RCCRR—RSS$空间机构的震动力完全平衡条件为：

$$\left.\begin{array}{l}(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1+cm_2\mathbf{z}=0\\ \mathbf{r}_3m_3-[h_3\mathbf{x}+(s_2-b)\mathbf{z}_2^{(3)}]m_2=0\\ \mathbf{r}_4m_4-h_4(m_2+m_3)\mathbf{x}=0\\ \mathbf{r}_5m_5+am_2\mathbf{z}_2'^{(5)}=0\\ \mathbf{r}_6m_6-(h_5\mathbf{x}+s_5\mathbf{z}_5^{(6)})m_5=0\end{array}\right\} \qquad (27)$$

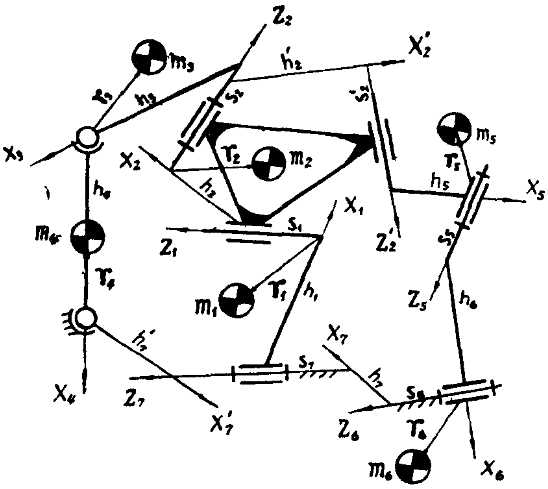

图 6

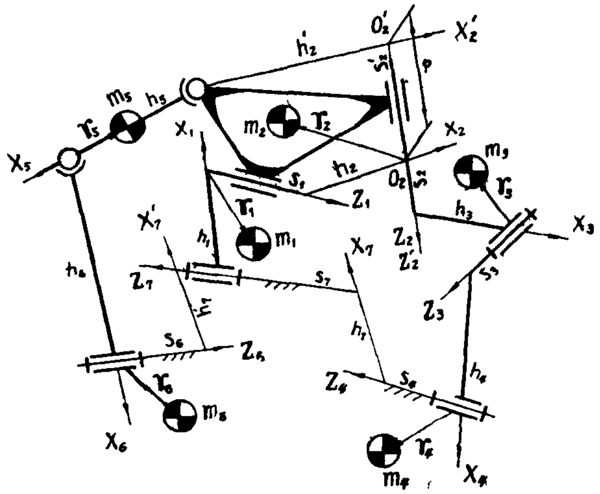

图 7

4．$C—C—S$杆

将图 3 中的R副换成C副，即得 $C—C—S$ 杆。令$\overline{O_iO_i'}=p\mathbf{z}$，将$\mathbf{r}_i$按式（18）分解后与式（5）代入式（8），整理得杆 i 质心在定系 n 中的位置向量：

$$\mathbf{r}_{si}^{(n)}=-\sum_{j=n-1}^{m+1}[C_{nj}](h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})+(b-p)[C_{n,i+1}]\mathbf{z}_i^{(i+1)}$$
$$+c[C_{n,i-1}]\mathbf{z}+(a+h_i')[C_{ni}]\mathbf{x}_i'^{(i)}+\mathbf{d} \qquad (28)$$

由于式 (28)中含有运动变量矩阵$[C_{ni}]$，故需在杆i上也附加平衡重方能完全平衡机构的震动力。若杆 i 的质量分布满足附加平衡条件$a+h_i'=0$，则不在杆i上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例 4　$RCCRR—SSR$空间七杆机构的震动力完全平衡。

对图 7 所示$RCCRR—SSR$ 双环空间七杆机构，将式（28）及（8）代入总质心位置方程（6），整理得：

$$\mathbf{r}_s^{(7)}=\frac{1}{M}\{[C_{71}][(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1+cm_2\mathbf{z}]+(a+h_2')m_2[C_{72}]\mathbf{x}_2'^{(2)}$$
$$+[C_{73}][\mathbf{r}_3m_3+(b-p)m_2\mathbf{z}_2^{(3)}]+[C_{74}][\mathbf{r}_4m_4-(h_4\mathbf{x}+s_3\mathbf{z}_3^{(4)})m_3]$$
$$+[C_{75}](\mathbf{r}_5m_5-h_5m_2\mathbf{x})+[C_{76}][\mathbf{r}_6m_6-h_6(m_2+m_5)\mathbf{x}]+\mathbf{D}\} \qquad (29)$$

由式（29）得$RCCRR—SSR$空间机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}
&(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1+cm_2\mathbf{z}=0\\
&\mathbf{r}_3m_3+(b-p)m_2\mathbf{z}_2^{(3)}=0\\
&\mathbf{r}_4m_4-(h_4\mathbf{x}+s_3\mathbf{z}_3^{(4)})m_3=0\\
&\mathbf{r}_5m_5-h_5m_2\mathbf{x}=0\\
&\mathbf{r}_6m_6-h_6(m_2+m_5)\mathbf{x}=0\\
&a+h_2'=0
\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

若杆 2 的质量分布满足附加平衡条件$a+h_2'=0$，则可不在杆 2 上附加平衡重。

5. $S—S—S$杆

如图 8 所示，空间n杆机构中杆i上有三个S副，其质量和质心在系i中的位置向量为m_i和$\mathbf{r}_i$。将$\mathbf{r}_i$按式（12）分解后，与双环机构的两个封闭方程（4）一并代入式（8），整理得杆i质心在定系n中的位置向量：

$$\mathbf{r}_{si}^{(n)}=-\left(1+\frac{a}{h_i}\right)\sum_{k=m}^{i+1}[C_{nk}](h_k\mathbf{x}+s_k\mathbf{z})-\left(\frac{a}{h_i}+\frac{c}{h_i'}\right)\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})$$

$$-\frac{c}{h_i'}\sum_{p=n-1}^{m+1}[C_{np}](h_p\mathbf{x}+s_p\mathbf{z})+b[C_{ni}]\mathbf{z}+\mathbf{d} \tag{31}$$

由于式（31）含有运动变量矩阵$[C_{ni}]$，故需在杆i上也附加平衡重方能完全平衡机构的震动力。若杆i的质量分布满足附加平衡条件$b=0$，即质心在三个S副的球心平面上，则在杆i上不附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例 5 $RSSR—SS$空间五杆机构的震动力完全平衡

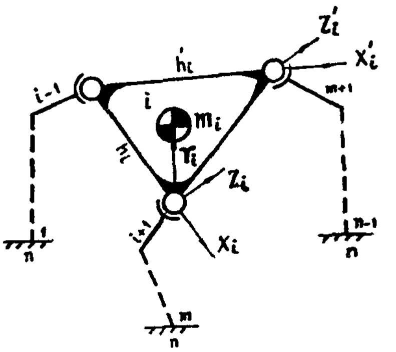

图 8

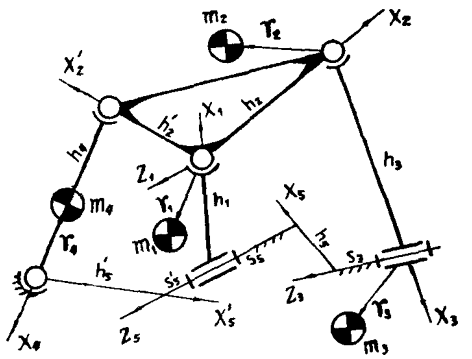

图 9

对图 9 所示$RSSR—SS$双环空间五杆机构，将式（31）及式（8）代入总质心位置方程（6），整理得：

$$\mathbf{r}_s^{(5)}=\frac{1}{M}\Big\{[C_{51}]\Big[(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1-\left(\frac{a}{h_2}+\frac{c}{h_2'}\right)h_1m_2\mathbf{x}\Big]+bm_2[C_{52}]\mathbf{z}$$

$$+[C_{53}]\Big[\mathbf{r}_3m_3-\left(1+\frac{a}{h_2}\right)h_3m_2\mathbf{x}\Big]+[C_{54}]\Big(\mathbf{r}_4m_4-$$

$$-\frac{c}{h_2'}h_4m_2\mathbf{x}\Big)+\mathbf{D}\Big\} \tag{32}$$

由式（32）得$RSSR—SS$空间机构的震动力完全平衡条件：

$$
\left.\begin{aligned}
&(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1-\left(\frac{a}{h_2}+\frac{c}{h_2'}\right)h_1m_2\mathbf{x}=0\\
&\mathbf{r}_3m_3-\left(1+\frac{a}{h_2}\right)h_3m_2\mathbf{x}=0\\
&\mathbf{r}_4m_4-\frac{c}{h_2'}h_4m_2\mathbf{x}=0\\
&b=0
\end{aligned}\right\}\qquad(33)
$$

6. $P—P—S$杆

在图 3 所示空间n杆机构中，若将杆i上的R副和C副均换成P副，则得 $P—P—S$杆。令$\overline{O_iO_i'}=p\mathbf{z}$，杆$i$与$i-1$的质量及质心在各自坐标系中的位置向量分别为$m_i$、$m_{i-1}$和$\mathbf{r}_i$、$\mathbf{r}_{i-1}$。因与两$P$副有关的转角$\theta_i$和$\theta_{i+1}$均为常量，故有

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbf{v}_i^{(i+1)}=[C_{i+1\ i}]\mathbf{v}_i\\
\text{和}\quad&\mathbf{v}_{i-1}^{(i+1)}=[C_{i+1\ i-1}]\mathbf{v}_{i-1}
\end{aligned}\right\}\qquad(34)
$$

式中$\mathbf{v}_i^{(i+1)}$和$\mathbf{v}_{i-1}^{(i+1)}$为常向量，$[C_{i+1\ i}]$和$[C_{i+1\ i-1}]$为常量方向余弦矩阵。

将式（34）代入式（8），整理得杆 i 和 $i-1$ 质心在定系 n 中的位置向量：

$$
\left.\begin{aligned}
\mathbf{r}_{si}^{(n)}=&-\sum_{k=n-1}^{m+1}[C_{nk}](h_k\mathbf{x}+s_k\mathbf{z})+[C_{n\ i+1}](h_i'\mathbf{x}_i'^{(i+1)}\\
&-p\mathbf{z}_i^{(i+1)}+\mathbf{r}_i^{(i+1)})+\mathbf{d}_i\\
\mathbf{r}_{s\,i-1}^{(n)}=&\sum_{j=1}^{i-2}[C_{nj}](h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})+[C_{n\ i+1}](h_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}^{(i+1)}\\
&+\mathbf{r}_{i-1}^{(i+1)})+\mathbf{d}_{i-1}
\end{aligned}\right\}\qquad(35)
$$

由于式（35）不含运动变量矩阵$[C_{ni}]$和$[C_{n\ i-1}]$，故不在杆 i 和 $i-1$ 上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例 6　$RSPPR—SSR$ 空间七杆机构的震动力完全平衡。

对图10所示$RSPPR—SSR$ 双环空间七杆机构，将式（35）及（8）代入总质心位置方程（6），整理得：

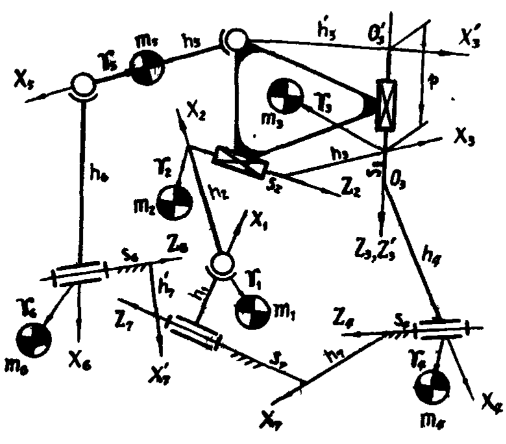

图　10

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_s^{(7)}=\frac{1}{M}\{&[C_{71}][(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1\\
&+h_1m_2\mathbf{x}]+[C_{74}][\mathbf{r}_4m_4\\
&+(h_2\mathbf{x}_2^{(4)}+\mathbf{r}_2^{(4)})m_2+(h_3'\mathbf{x}_3'^{(4)}\\
&-p\mathbf{z}_3^{(4)}+\mathbf{r}_3^{(4)})m_3]+[C_{75}](\mathbf{r}_5m_5-h_5m_3\mathbf{x})\\
&+[C_{76}][\mathbf{r}_6m_6-h_6(m_5+m_3)\mathbf{x}]+\mathbf{D}\}
\end{aligned}\qquad(36)
$$

由式（36）知，在杆 2 及杆 3 上均不附加平衡重时，$RSPPR—SSR$ 空间机构的震动力完全平衡条件为：

$$\left.\begin{aligned}&(h_1\mathbf{x}+\mathbf{r}_1)m_1+h_1m_2\mathbf{x}=0\\&\mathbf{r}_4m_4+(h_2\mathbf{x}_2^{(4)}+\mathbf{r}_2^{(4)})m_2+(h_3'\mathbf{x}_3'^{(4)}-p\mathbf{z}_3^{(4)}+\mathbf{r}_3^{(4)})m_3=0\\&\mathbf{r}_5m_5-h_5m_3\mathbf{x}=0\\&\mathbf{r}_6m_6-h_5(m_5+m_3)\mathbf{x}=0\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

值得指出：在图10所示空间机构中，两移动副轴线 Z_2 及$Z_3(Z_3')$ 的方向虽属固定，但其空间位置则可任定，这不影响机构的震动力平衡计算。

三、一般空間机构震动力平衡理論

1． 纯转动链

若一k杆连架开式链中无移动自由度，且链中各杆的质心均为约束运动（如$S—S$杆的质心必须在两球心连线上），则称此链为纯转动链。纯转动链的总质心位置方程为

$$\mathbf{r}_s^{(n)}=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{k}[C_{nj}]\Big[\sum_{i=j+1}^{k}m_i(h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})+(h_j\mathbf{x}+\mathbf{r}_j)m_j\Big]+\mathbf{d}\tag{38}$$

震动力完全平衡条件为：

在链的每个运动杆 j 上，均有

$$\sum_{i=j+1}^{k}m_i(h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})+(h_j\mathbf{x}+\mathbf{r}_j)m_j=0\tag{39}$$

其推导见文[9]。

2． 机构的总质心位置方程

设空间 n 杆机构有a个封闭环，则其总质心位置方程为：

$$\mathbf{r}_s^{(n)}=\frac{1}{M}\Big\{\sum_{j=1}^{k}[C_{nj}]\Big[\sum_{i=j+1}^{k}m_i(h_j\mathbf{x}+s_j\mathbf{z})+(h_j\mathbf{x}+\mathbf{r}_j)m_j\Big]$$
$$-\sum_{a=1}^{a}\sum_{j=m}^{t}[C_{np}]\Big[\sum_{q=j+1}^{t}m_q(h_p\mathbf{x}+s_t\mathbf{z})+(s_p\mathbf{z}-\mathbf{r}_p)m_p\Big]+\mathbf{D}\Big\}\tag{40}$$

式（40）中有 $n+1$ 个运动变量矩阵$[C_{ni}]$和μ个与移动自由度有关的运动变量s_μ。

3． 震动力平衡定理一

在用平衡重平衡机构的震动力时，需要确定该机构的震动力能否被完全平衡。由机构的总质心位置方程（40）知，机构在一个运动循环中，总质心的轨迹为一封闭曲线。显然，总质心不可能作匀速直线运动。因此，机构震动力完全平衡的充要条件为总质心在机构的运动过程中静止在某一点上。为此目的，必须使式（40）中不出现与运动有关的变量 s_μ 和矩阵$[C_{ni}]$。因附加平衡重仅能使 $[C_{ni}]$ 的常系数向量为零，故首先必须消除全部移动变量s_μ。若机构的每个运动杆都有一支纯转动链与机架相连，则总质心位置方程（40）中即不

含与移动自由度有关的运动变量s_μ。因此，文[5]中有关平面机构震动力完全平衡的通路定理（*Contour Theorem*）可拓广于空间机构而得震动力平衡定理一。

定理一：若空间机构各运动杆的质心均为约束运动，附加平衡重使其震动力完全平衡的必要条件为每一运动杆至少有一支纯转动链与机架相连。

如文[1]所述，$C—C$、$P—P$、$P—C$等杆均不满足定理一，故单环空间机构中不能含有两个有移动自由度的运动副，否则，其震动力无法用平衡重获得完全平衡。

对于球面机构，因各运动杆均为定点转动或定轴转动，故恒满足定理一，此即表示：

球面机构的震动力总可用平衡重获得完全平衡。

4． 震动力平衡定理二

在不含移动变量s_μ的机构总质心位置方程（40）中，共有$n+1$个运动变量矩阵$[C_{ni}]$，从而需在$n+1$个杆上附加平衡重，使这些运动变量矩阵$[C_{ni}]$的系数向量为零，这样，机构的总质心才能静止在某一点上，机构的震动力才能完全平衡。为了减少平衡重数，应该探讨式（40）中的某个或某几个$[C_{ni}]$是否可被消去。如能消去，则该类杆上即可不附加平衡重。经研究表明，不在杆i上附加平衡重的必要条件是：从结构上杆i的质心位置向量$\mathbf{r}_{si}^{(n)}$可由其它杆的运动参数表示。因此，为了确定何类运动杆上可不加平衡重，引入**力平衡结构要素**的概念。

若从杆i上某点到机架有一支纯转动链，则杆i有一个力平衡结构要素；若杆i与邻杆有一根相对固定轴线，则杆i上也有一个力平衡结构要素。若杆i以一个移动副P与邻杆相联，则由于两杆之间无相对转动，两杆的三个坐标轴X、Y和Z之间的转角为常量，故两杆之间存在三根无相对转动的轴线，亦即杆i有三个力平衡结构要素。

按力平衡结构要素的概念，对空间机构震动力平衡提出定理二。

定理二：若空间机构的震动力可完全平衡，则杆i上不附加平衡重的必要条件是该杆的力平衡结构要素N_i等于或大于四，即

$$N_i \geqslant 4 \tag{41}$$

证明：空间机构中，杆i的质心在定系n中的位置向量$\mathbf{r}_{si}^{(n)}$可分解为四个分量：即一个从定系原点O_n到动系i中某基点的分向量和沿系i中某三个线性无关轴的三个分向量。前一个分向量与杆i上某基点对定系的牵连移动有关，后三个分向量则与杆i绕基点的转动有关。在机构运动过程中，它们分别与m_i产生杆i的一个移动惯性力和三个线性无关的转动惯性力分力。设机构的震动力可完全平衡，则根据定理一，杆i上必有一支纯转动链与机架相连，此链即可描述杆i随基点的牵连移动。与邻杆的三个相对固定轴线可使与杆i绕基点转动有关的三个分量分别通过邻杆的运动参数表示。因此，若具有上述四个力平衡结构要素，杆i的质心在定系n中的位置向量$\mathbf{r}_{si}^{(n)}$即可完全用其它杆的运动参数表示。对于含有较少相对固定轴线但具有较多纯转动链的运动杆i，因通过与杆i相连的每支纯转动链均可确定杆i上一点在定系n中的位置，故每两支纯转动链即可确定杆i上一条直线，沿此直线的位置分向量即可由有关两支纯转动链的运动参数表示。因此，只要杆i具有四个力平衡结构要素，杆i的质心位置向量$\mathbf{r}_{si}^{(n)}$就能完全由其它杆的运动参数表示，即不在杆i上附加平衡重就能完全平衡机构的震动力。当杆i的力平衡要素大于四时，可利用其中的四个来表示杆i的质心位置。

推论一：若空间机构的震动力可完全平衡，而杆 i 的力平衡结构要素 N_i 小于四，则杆 i 的附加平衡条件数 P_i 应为 $4-N_i$ 个。

空间机构中各类运动杆的力平衡要素及 N_i、P_i 均见表1，其中二副杆的推导见文[1]。

表1 运动杆的力平衡结构要素、N_i、P_i及附加平衡条件

杆	力平衡結构要素	N_i	附加平衡条件	P_i
$R-R$	两 軸 两 鏈	4		
$P-S$	三 軸 一 鏈	4		
$P-R$	四 軸 一 鏈	5		
$R-C$	两 軸 一 鏈	3	$a+h_i=0$	1
$R-E$	两 軸 一 鏈	3	$a+h_i=0$	1
$R-S$	一 軸 两 鏈	3	$r_{iy}=0$	1
$C-S$	一 軸 一 鏈	2	$r_{ix}+h_i=0$，$r_{iy}=0$	2
$S-S'$	两 鏈	2	$r_{iy}=0$，$r_{iz}=0$	2
$R-S-S$	一 軸 三 鏈	4		
$R-C-S$	两 軸 两 鏈	4		
$R-C-C$	三 軸 一 鏈	4		
$P-P-S$	六 軸 一 鏈	7		
$C-C-S$	两 軸 一 鏈	3	$a+h_i'=0$	1
$S-S-S$	三 鏈	3	$b=0$	1

对于平面机构，运动杆不能绕X轴和 Y 轴转动，故杆 i 的质心在定系 n 中的位置向量$\mathbf{r}_{si}^{(n)}$仅可分解为两个分向量：从定系n的原点 O_n 到动系 i 中某基点与牵连移动有关的分向量以及与绕过基点的Z轴转动有关的分向量。在机构运动过程中，它们分别与 m_i 产生杆 i 的移动惯性力和转动惯性力。这里，由于各个Z轴方向互相平行并唯一确定于机构的运动平面，按正交坐标系性质，Y轴即随X轴而唯一确定。与绕过基点转动有关的位置分向量中，沿Z轴的分量为常量，不影响机构的震动力，而其余分量只能认为是一个独立量。显然，由于Z轴平行于机构的各转动副轴线，故运动杆 i 上的转动副轴线也失去作为力平衡结构要素的意义。至于杆 i 上的移动副，因杆 i 的质心位置向量只有一个与转动有关的独立分向量，故该移动副只有一个力平衡结构要素。综上所述，可得如下推论。

推论二：若平面机构的震动力可完全平衡，则杆 i 上不附加平衡重的必要条件为该杆的力平衡结构要素$N_i\geqslant2$。

对于球面机构，各动系均可认为与定系有位于球心的固定坐标原点，动系对定系无牵连移动，从而纯转动链也失去作为力平衡结构要素的意义。这样，球面机构中杆 i 的质心在定系 n 中的位置向量$\mathbf{r}_i^{(n)}$仅可分解为与三个线性无关轴的转动有关的分向量，在机构运动过程中，它们分别与 m_i 产生三个线性致关的转动惯性力分力。由此可得如下推论。

推论三：在球面机构中，杆 i 上不附加平衡重即可完全平衡机构震动力的必要条件是该杆的力平衡结构要素$N_i \geqslant 3$。否则，若$N_i < 3$，则杆 i 的附加平衡条件数应为$3-N_i$个。

球面机构运动杆的质心位置及各类球面机构的震动力完全平衡条件参见文[10]。

例 7　判断10 S空间机构的震动力平衡。

在图11所示10 S机构中，设杆 2 上的五个S副的球心不在同一平面上，五个$S-S$杆的质心则全在两球心连线上。因杆 2 上有五个纯转动链，故满足定理一，该机构的震动力可完全平衡。又$N_2=5>4$，故杆 2 上可不加平衡重。对图示空间机构，仅在四个$S-S$杆上附加平衡重即可完全平衡其震动力。

例 8　判断$RS-3CS$空间机构的震动力完全平衡。

对图12所示RS—$3CS$空间机构，设杆 2 上三个C副轴线线性无关。显然，该机构满足定理一，即其震动力可完全平衡。又杆 2 的力平衡要素为四，故可不在杆 2 上附加平衡重。

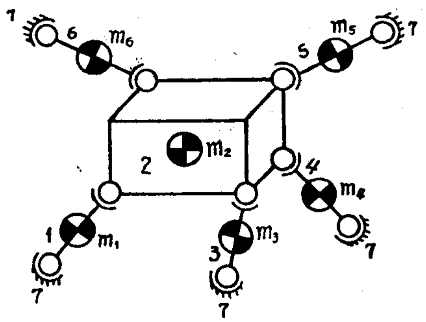

图　11

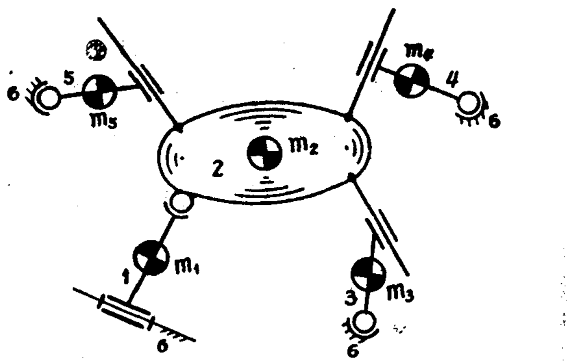

图　12

参 考 文 献

［1］ 陈宁新、张启先："单环空间机构震动力完全平衡"，将在《机械工程学报》上发表。

［2］ C.Bagci: "Shaking Force Balancing of Planar Linkages with Force Transmission Irregularities Using Idler Loops", Mechanism and Machine Theory. Vol.14, 1979, PP.267-284.

［3］ 张启先："静替代质量矩阵及其在机构惯性力平衡中的应用"，北京航空学院科研报告BH—B611，1980，11.

［4］ G.G.Lowen, R.S.Berkof: "Survey of Investigation into the Balancing of Linkages", J. of Mechanisms, Vol. 3, 1968, PP.221—231.

[5] F.R.Tepper, G.G.Lowen: "General Theorems Concerning Full Force Balancing of Planar Linkages by Internal Mass Redistribution", J. Engng.Ind., 94B, 1972, PP. 789—796.

[6] M.J.Walker, K.Oldham. "A General Theory of Force Balancing Using Counterweights", M.M.T., Vol. 13, 1978, PP. 175—185.

[7] M.J.Walker, K.Oldham: "Extensions to the Theory of Balancing Frame Force in Planar Linkages", M.M.T., Vol. 14, 1979, PP. 201—207.

[8] P.Jacobi: "Vollstandiger Tragheitskraftausgleich bei mehrgliedrigen Koppelgetrieben", Maschinenbau Technik, Vol. 18, 1969, PP. 605—606.

[9] 陈宁新："Complete Shaking Force Balancing of Spatial Linkages"，已被《Mechanism and Machine Theory》接受发表。

[10] 陈宁新、张启先："球面机构震动力完全平衡"，已被《机械设计》（西北工业大学）接受发表。

FULL SHAKING FORCE BALANCING OF MULTI—LOOP SPATIAL LINKAGES AND GENERAL THEORY OF FORCE BALANCING OF SPATIAL LINKAGES BY COUNTERWEIGHTS

Chen Ningxin Zhang Qixian

ABSTRACT

As a Continuation of paper [1] the position vectors of mass center of R-S-S, R-C-S, R-C-C, P-P-S, S-C-C, and S-S-S links as well as the conditions of full force balancing of RRSS-SSR RRCS-SSR, RRCCR-RSS, RRCCR-SSR, RSSR-SS and RSPPR-SSR double-loop spatial linkages are derived in this paper. Based on [1]、[10] and the abovementioned research, the "Contour Theorem" of planar linkages [5] is generalized for spatial linkages and another force balancing theorem is put forward for the first time. The essential part of the last theorem can be expressed as follows:

"If link i of a full-force balancable spatial linkage possesses four or more force balancing structural elements, it is not necessary to attach any counterweights to that link for achieving full shaking force balancing of the linkage; otherwise, the sum of the number of force balancing structural elements and the required number of supplementary balancing conditions must be equal to four".

Applying these theorems one can easily determine if a spatial linakge can be fully force balanced and which link no counterweight is needed to be attached to.