材料力学习题解

下册

材料力学习题解

下册

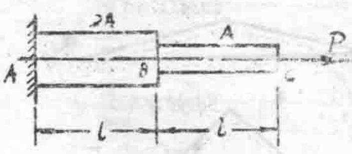
目　　录

下　　册

第十章　能量法

10—3　计算图示各杆的变形能。

(a)



题10—3（a）图

解：（a）一杆AC各横截面轴力$N=P$

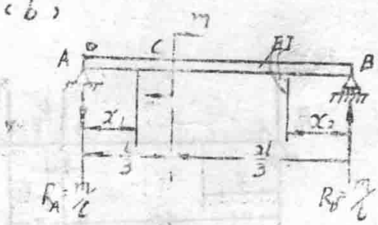
由$U=\dfrac{N^2l}{2EA}$

$$U=U_{AB}+U_{BC}=\frac{P^2l}{2E(2A)}+\frac{P^2l}{2EA}$$

$$=\frac{3P^2l}{4EA}$$

$\dfrac{N^2L}{2EA}$

(b)



题10—3(b)图

（b）梁各段弯矩为

$$AC:M(x_1)=-\frac{m}{l}x_1,$$

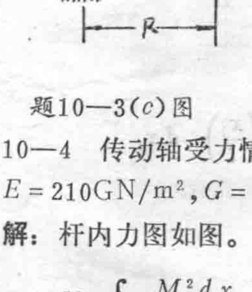
$$CB:M(x_2)=\frac{m}{l}x_2$$

由$U=\displaystyle\int_l\frac{M^2(x)dx}{2EI}$

$$U=U_{AC}+U_{CB}=\int_0^{\frac{l}{3}}\frac{\left(-\frac{m}{l}x_1\right)^2}{2EI}dx_1+\int_0^{\frac{2l}{3}}\frac{\left(\frac{m}{l}x_2\right)^2}{2EI}dx_2=\frac{m^2l}{18EI}$$

（c）小曲率曲杆弯矩

(c)



$$M(\theta)=PR\sin\theta\quad\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$dU=\frac{M^2(\theta)}{2EI}Rd\theta$$

$$U=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^2(\theta)}{2EI}Rd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{P^2R^3\sin^2\theta}{2EI}d\theta=\frac{\pi P^2R^3}{8EI}$$

题10—3(c)图

10—4　传动轴受力情况如图所示。轴的直径为40mm，材料为45号钢，$E=210\text{GN/m}^2,G=80\text{GN/m}^2$。试计算轴的变形能。

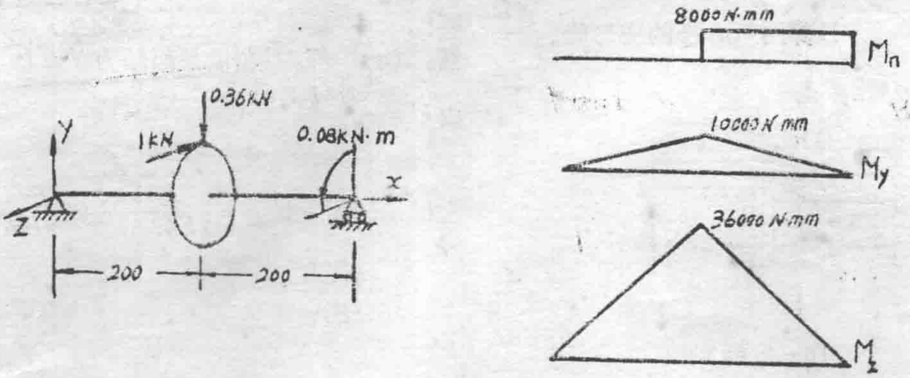
解：杆内力图如图。

李健

$$U=\int_l\frac{M_n^2dx}{2GI_P}+\int_l\frac{M_y^2dx}{2EI_Y}+\int_l\frac{M_Z^2dx}{2EI_Z}$$

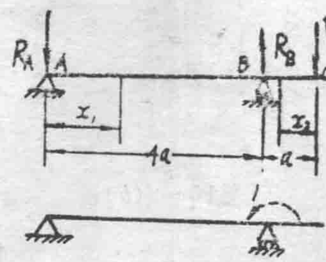
$$=\frac{64}{210\cdot10^3\cdot\pi\cdot40^3}\left[\frac{(8\cdot10^4)^2\cdot210}{2^2\cdot80\cdot10^3}+\int_0^{200}\left((50x)^2+(180x)^2\right)dx\right]$$

$=60.4\text{N}\cdot\text{mm}$



题10—4图

10—5　车床主轴如图所示，在转化为当量轴以后，其抗弯刚度EI可以作为常量。试求在载荷P作用下，截面C的挠度和前轴承B处的截面转角，



题10—5 图

解： 求f_c：支反力$R_A=\frac{P}{4}$，　$R_B=\frac{5}{4}P$

各段弯矩为AB：$M(x_1)=-\frac{P}{4}x_1$

CB：$M(x_2)=-Px_2$

由$U=W$得　$\int_0^{4a}\frac{\left(-\frac{Px_1}{4}\right)^2dx_1}{2EI}+\int_0^a\frac{(-Px_2)^2}{2EI}dx_2=\frac{P\cdot f_c}{2}$

解得　$f_c=\frac{5Pa^3}{3EI}$（向下）。

求θ_B：于B加单位力偶，引起的弯矩为

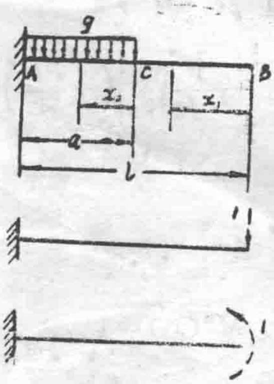
AB：$M^\circ(x_1)=\frac{x_1}{l}$，　CB：$M^\circ(x_2)=0$

由卡氏定理 $\theta_B=\int_l\frac{M(x)M^\circ(x)}{EI}dx=\frac{1}{EI}\int_0^{4a}\left(-\frac{Px_1}{4}\right)\left(\frac{x_1}{l}\right)dx_1$

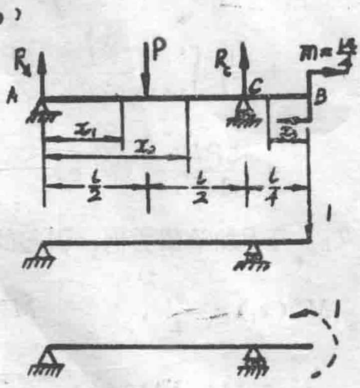
$=-\frac{4Pa^3}{3EI}$（顺）

10—6　试求图示各梁的截面B的挠度和转角，$EI=$常数。

解：（a）　图示梁弯矩



题10—6 (a)图



题10—6 (b)图

$M(x_1)=0\quad(0\leqslant x_1\leqslant l-a)$，$M(x_2)=-\dfrac{qx_2^2}{2}\ (0\leqslant x_2<a)$

求f_B：于B加图示单位力，引起的弯矩为 $M^\circ(x_2)=-(l-a+x_2)(0\leqslant x_2\leqslant a)$

解得 $f_B=\displaystyle\int_l\frac{M(x)M^\circ(x)}{EI}dx=\frac{1}{EI}\int_0^a\frac{qx_2^2(l-a+x_2)}{2}dx_2$

$=\dfrac{qa^3}{24EI}(4l-a)$（向下）

求θ_B：于B加一图示单位力偶。引起的弯矩为 $M^\circ(x_2)=1\quad(0\leqslant x_2\leqslant a)$

$\theta_B=\displaystyle\int_l\frac{M(x)M^\circ(x)}{EI}dx=\int_0^a\frac{(-qx_2^2/2)\cdot1}{EI}dx_2=-\frac{qa^3}{6EI}$（顺）

(b) 支反力$R_A=\dfrac{P}{2}-\dfrac{m}{l}=\dfrac{P}{4}$，$R_c=\dfrac{P}{2}+\dfrac{m}{l}=\dfrac{3P}{4}$

图示梁弯矩$M(x_1)=\dfrac{Px_1}{4}(0\leqslant x_1\leqslant l/2)$

$M(x_2)=\dfrac{P}{4}x_2-P(x_2-l/2)=\dfrac{Pl}{2}-\dfrac{3P}{4}x_2\qquad(l/2\leqslant x_2\leqslant l)$

$M(x_3)=-m=-\dfrac{Pl}{4}\quad(0<x_3\leqslant l/4)$

求f_B：于B加图示单位力，引起的弯矩

$M^\circ(x_1)=-\dfrac{x_1}{4}$，$\qquad M^\circ(x_2)=-\dfrac{x_1}{4}$，$\qquad M^\circ(x_3)=-x_3$

$$f_B=\int_l \frac{M(x)M^\circ(x)}{EI}\,dx=\frac{1}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{Px_1}{4}\right)\left(-\frac{Px_1}{4}\right)dx_1$$

$$+\frac{1}{EI}\int_{l/2}^{l}\left(\frac{Pl}{2}-\frac{3P}{4}x_2\right)\left(-\frac{x_2}{4}\right)dx_2+\frac{1}{EI}\int_0^{l/4}\left(-\frac{Pl}{4}\right)\left(-x_3\right)dx_3$$

$$=\frac{5Pl^3}{384EI}\text{（向下）}$$

求θ_B：于B加单位力偶，引起的弯矩

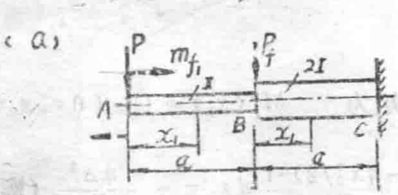
$$M^\circ(x_1)=\frac{x_1}{l},\qquad M^\circ(x_2)=\frac{x_2}{l},\qquad M^\circ(x_3)=1$$

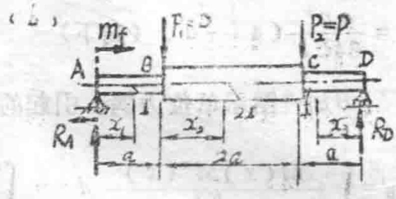
$$\theta_B=\int_l \frac{M(x)M^\circ(x)}{EI}\,dx=\frac{1}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{Px_1}{4}\right)\left(\frac{x_1}{l}\right)dx_1$$

$$+\frac{1}{EI}\int_{l/2}^{l}\left(\frac{Pl}{2}-\frac{3P}{4}x_2\right)\left(\frac{x_2}{l}\right)dx_2+\frac{1}{EI}\int_0^{l/4}\left(-\frac{Pl}{4}\right)\cdot 1\cdot dx_3$$

$$=\frac{-Pl^2}{12EI}\text{（顺）}$$

10—7　图示变截面梁，试求在P力作用下截面B的竖向位移和截面A的转角。





题10—7 (a) 图　　题10—7 (b) 图

解：（a）加图示附加力P_f及附加力偶m_f

弯矩：$M(x_1)=m_f-Px_1\quad(0<x_1\leqslant a)$

$M(x_2)=m_f-P(a+x_2)-P_fx_2\quad(0\leqslant x_2\leqslant a)$

求f_B：$\dfrac{\partial M(x_1)}{\partial P_f}=0$，$\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial P_f}=-x_2$

$$f_B=\int_l \frac{M(x)}{EI}\,\frac{\partial M(x_1)}{\partial P_f}dx_1=\frac{1}{2EI}\int_0^a(-P(a+x_2))(-x_2)dx_2$$

$$=\frac{5}{12}\,\frac{Pa^3}{EI}\text{（向下）}$$

求θ_A：$\dfrac{\partial M(x_1)}{\partial m_f}=1$，$\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial m_f}=1$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^a (-Px_1)\cdot 1 dx_1 + \frac{1}{2EI}\int_0^a (-P(a+x_2))\cdot 1 dx_2$$

$$= -\frac{5Pa^2}{4EI}\ （逆）$$

(b) 加图示附加力偶m_f，并以P_1、P_2表示作用于B、C处的力P

支反力$R_A = -\frac{m_f}{4a} + \frac{3P_1}{4} + \frac{P_2}{4}$，　$R_D = \frac{m_f}{4a} + \frac{P_1}{4} + \frac{3P_2}{4}$

梁各段弯矩

$M(x_1) = m_f + R_A x_1\ (0 < x_1 \leqslant a)$，

$M(x_2) = m_f + R_A(a+x_2) - P_1 x_2\ (0 < x_2 \leqslant 2a)$，

$M(x_3) = R_D \cdot x_3\ (0 \leqslant x_3 < a)$

求f_B：$\frac{\partial M(x_1)}{\partial_1 P} = x_1\frac{\partial R_A}{\partial P_1} = \frac{3}{4}x_1$，　$\frac{\partial M(x_2)}{\partial P_1} = (a+x_2)\frac{\partial R_A}{\partial P_1} - x_2 = \frac{3a}{4} - \frac{x_2}{4}$

$$\frac{\partial M(x_3)}{\partial P_1} = x_3\frac{\partial R_D}{\partial P_1} = \frac{x_3}{4}$$

$$f_B = \frac{1}{EI}\int_0^a (Px_1)\left(\frac{3}{4}x_1\right)dx_1 + \frac{1}{2EI}\int_0^{2a}(Pa)\left(\frac{3}{4}a - \frac{x_2}{4}\right)dx_2$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_0^a (Px_3)\frac{x_3}{4}dx_3$$

$$= \frac{5Pa^3}{6EI}\ （向下）$$

求θ_A：$\frac{\partial M(x_1)}{\partial m_f} = 1 + x_1\frac{\partial R_A}{\partial m_f} = 1 - \frac{x_1}{4a}$，

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial m_f} = 1 + (a+x_2)\cdot\frac{\partial R_A}{\partial m_f} = \frac{3}{4} - \frac{x_2}{4a}，$$

$$\frac{\partial M(x_3)}{\partial m_f} = x_3\frac{\partial R_D}{\partial m_f} = \frac{x_3}{4a}。$$

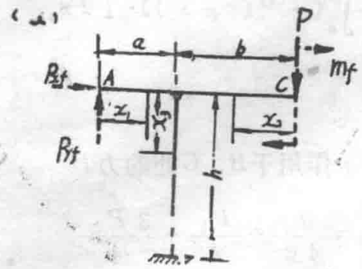
$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^a (Px_1)\left(1 - \frac{x_1}{4a}\right)dx_1 + \frac{1}{2EI}\int_0^{2a}(Pa)\left(\frac{3}{4} - \frac{x_2}{4a}\right)dx_2$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_0^a (Px_3)\cdot\frac{x_3}{4a}dx_3$$

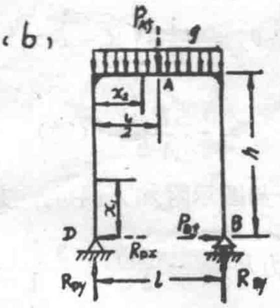
$$= \frac{Pa^2}{EI}\ （顺）$$

10—8　图示刚架的各杆的EI皆相等，试求截面A、B的位移和截面C的转角。

解：（a）　加图示附加力P_{xf}、P_{yf}及附加力偶m_f。各段梁弯矩



题10—8 (a)图



题10—8 (b)图

$M(x_1)=P_{yf}x_1$ $(0\leqslant x_1\leqslant a)$, $\quad M(x_2)=-m_f-Px_2$ $(0<x_2\leqslant b)$

$M(x_3)=-P_{xf}x_3-P_{yf}a-Pb-m_f$ $(0\leqslant x_3\leqslant h)$

求u_A: $\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial P_{xf}}=0$, $\quad \dfrac{\partial M(x_3)}{\partial P_{xf}}=-x_3$。

$$u_A=\int_l\frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial P_{xf}}dx=\frac{1}{EI}\int_0^h(-Pb)(-x_3)dx_3$$

$$=\frac{Pbh^2}{2EI}\text{（向右）}$$

求v_A: $\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial P_{yf}}=0$, $\quad \dfrac{\partial M(x_3)}{\partial P_{yf}}=-a$.

$$v_A=\frac{1}{EI}\int_0^h(-Pb)\cdot(-a)dx_3=\frac{Pabh}{EI}\text{（向上）}$$

求θ_c: $\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial m_f}=-1$, $\quad \dfrac{\partial M(x_3)}{\partial m_f}=-1$

$$\theta_c=\frac{1}{EI}\int_0^b(-Px_2)\cdot(-1)dx_2+\frac{1}{EI}\int_0^h(-Pb)\cdot(-1)dx_3$$

$$=\frac{Pb}{2EI}(b+2h)\text{（顺）}$$

(b) 加图示附加力P_{Af}、P_{Bf}。支反力$R_{Dx}=P_{Bf}$, $R_{By}=R_{Dy}=\dfrac{ql}{2}+\dfrac{P_{Af}}{2}$。结构、载荷对称，只分析一半。各梁段弯矩为

$M(x_1)=P_{Bf}\cdot x_1$ $\quad(0\leqslant x_1\leqslant h)$

$$M(x_2)=P_{Bf}h+\left(\frac{ql}{2}+\frac{P_{Af}}{2}\right)x_2-\frac{qx_2^2}{2}\quad(0\leqslant x_2\leqslant l/2)$$

求v_A: $\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial P_{Af}}=\dfrac{x_2}{2}$

$$\nu_A = \int_l \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial P_{Af}}\,dx = \frac{2}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{ql}{2}x_2 - \frac{qx_2^2}{2}\right)dx_2$$

$$= \frac{5ql^4}{384EI} \text{（向下）}$$

求 u_B： $\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial P_{Bf}} = h$

$$u_B = \frac{2}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{ql}{2}x_2 - \frac{qx_2^2}{2}\right)\cdot h\cdot dx_2 = \frac{ql^3h}{12EI} \text{（向右）}$$

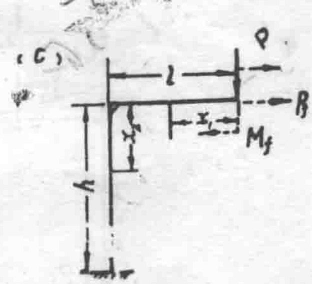
求 u_A： $u_A = \dfrac{u_B}{2} = \dfrac{ql^3h}{24EI}$（向右）

(c) 加图示附加力 P_f 及附加力偶 m_f。各梁段弯矩

$M(x_1) = -m_f - Px_1 \ (0 < x_1 \leqslant l)$

$M(x_2) = -m_f - Pl - P_f x_2 \ (0 \leqslant x_2 \leqslant h)$

$-Pl-P_f x_2-M_f$



题10—8 (c) 图

求 u_A： $\dfrac{\partial M(x_1)}{\partial P_f} = 0$， $\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial P_f} = -x_2$

$$u_A = \frac{1}{EI}\int_0^h(-Pl)(-x_2)\,dx_2 = \frac{Plh^2}{2EI} \text{（向右）}$$

求 v_A： $\dfrac{\partial M(x_1)}{\partial P} = -x_1$， $\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial P} = -l$.

$$v_A = \frac{1}{EI}\int_0^l(-Px_1)(-x_1)\,dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^h(-Pl)(-l)\,dx_2$$

$$= \frac{Pl^2}{3EI}(l + 3h) \text{（向下）}$$

求 θ_c： $\dfrac{\partial M(x_1)}{\partial m_f} = \dfrac{\partial M(x_2)}{\partial m_f} = -1$

$$\theta_c = \frac{1}{EI}\int_0^l(-Px_1)(-1)\,dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^h(-Pl)(-1)\,dx_2$$

$$= \frac{Pl}{2EI}(l + 2h) \text{（顺）}$$

10—9 刚架各杆的材料相同，但截面尺寸不一，所以抗弯刚度 EI 不同，试求在 P 力作用下，截面 A 的位移和转角。

解：(a) 支反力 $R_A = R_D = \dfrac{P}{2}$。各段弯矩 $M(x_1) = 0 \ (0 \leqslant x_1 \leqslant h)$，

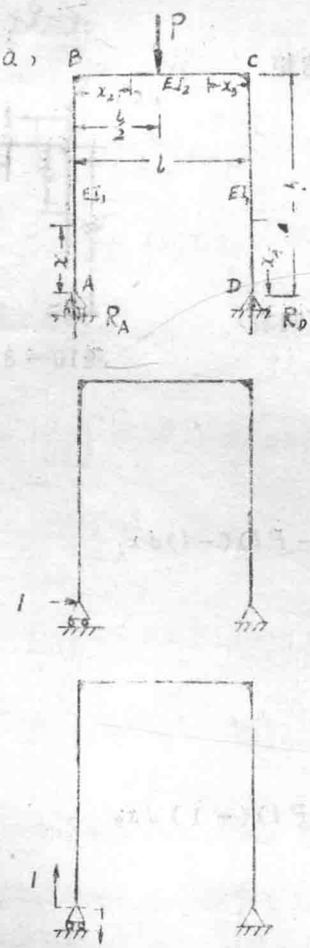
$$M(x_2)=\frac{Px_2}{2}\ (0\leqslant x_2\leqslant l/2),$$

$$M(x_3)=\frac{Px_3}{2}\ (0\leqslant x_3\leqslant l/2),\qquad M(x_4)=0\ (0\leqslant x_4\leqslant h)。$$

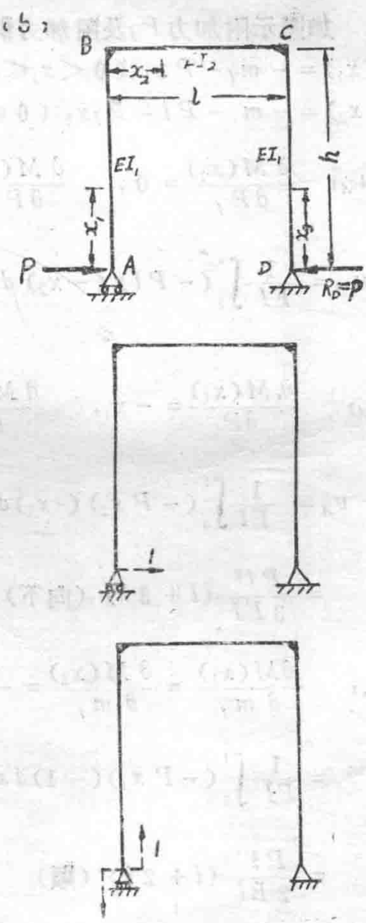
求u_A：于A加水平单位力，引起的弯矩 $M^\circ(x_2)=h$

由对称性 $u_A=\int_l\frac{M(x)M^\circ(x)}{EI}dx=\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{Px_2}{2}\right)\cdot h\cdot dx_2$

$$=\frac{Phl^2}{8EI_2}\ (向左)$$



题10—9 (a) 图



题10—9 (b) 图

求θ_A：于A加单位力偶，引起的弯矩 $M^\circ(x_2)=1-\frac{x_2}{l}$，$M^\circ(x_3)=\frac{x_3}{l}$

$$\theta_A=\frac{1}{EI_2}\left(\int_0^{l/2}\left(\frac{Px_2}{2}\right)\left(1-\frac{x_2}{l}\right)dx_2+\int_0^{l/2}\left(\frac{Px_3}{2}\right)\frac{x_3}{l}\ dx_3\right)$$

$$=\frac{Pl^2}{16EI_2}\text{（顺）}$$

（b） 图示刚架各梁弯矩为

$M(x_1)=-Px_1\ (0\leqslant x_1\leqslant h)$　　$M(x_2)=-Ph(0\leqslant x_2\leqslant l)$

$M(x_3)=-Px_3(0\leqslant x_3\leqslant h)$

求u_A：于A加水平单位力，引起的弯矩

$M^\circ(x_1)=-x_1$，　　$M^\circ(x_2)=-h$

由对称性 $u_A=\frac{2}{EI_1}\int_0^h(-Px_1)\cdot(-x_1)dx_1+\frac{2}{EI_2}\int_0^{l/2}(-Ph)(-h)dx_2$

$$=\frac{Ph^2}{3E}\left(\frac{2h}{I_1}+\frac{3l}{I_2}\right)\text{（向右）}$$

求θ_A：于A加单位力偶，引起的弯矩　$M^\circ(x_1)=-1$，　　$M^\circ(x_1)=-1+\frac{x_2}{l}$

$M^\circ(x_3)=0$

$$\theta_A=\frac{1}{EI_1}\int_0^h(-Px_1)(-1)dx_1+\frac{1}{EI_2}\int_0^l(-Ph)\left(-1+\frac{x_2}{l}\right)dx_2$$

$$=\frac{Ph}{2E}\left(\frac{h}{I_1}+\frac{l}{I_2}\right)\qquad\text{（逆）}$$

10—10　图示刚架，已知AC和CD两部分的$I=3\times10^3\,\text{cm}^4$，$E=200\text{GN/m}^2$，试求截面$D$的水平位移和转角，若$P=10\text{kN}$，$l=1\text{m}$。

解：刚架各段弯矩

$M(x_1)=-2Px_1-2Pl\ (0\leqslant x_1\leqslant l)$

$M(x_2)=-2Pl\ (0\leqslant x_2\leqslant l)$

$M(x_3)=-Px_3\ (0\leqslant x_3\leqslant 2l)$

求u_D：于D加水平单位力，引起的弯矩

$M^\circ(x_1)=M^\circ(x_2)=-2l$，

$M^\circ(x_3)=-x_3$

$$u_D=\int_l\frac{M(x)M^\circ(x)}{EI}dx$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\int_0^l(-2Px_1-2Pl)(-2l)\ dx_1+\int_0^l(-2Pl)(-2l)dx_2\right.$$

$$\left.+\int_0^{2l}(-Px_3)(-x_3)dx_3\right)$$

$$=\frac{38}{3}\ \frac{P\,l^{3}}{EI}=\frac{38\times10\times10^{3}\times10^{9}}{3\times200\times10^{3}\times3\times10^{7}}$$

$=21.1\text{mm}$　（向左）

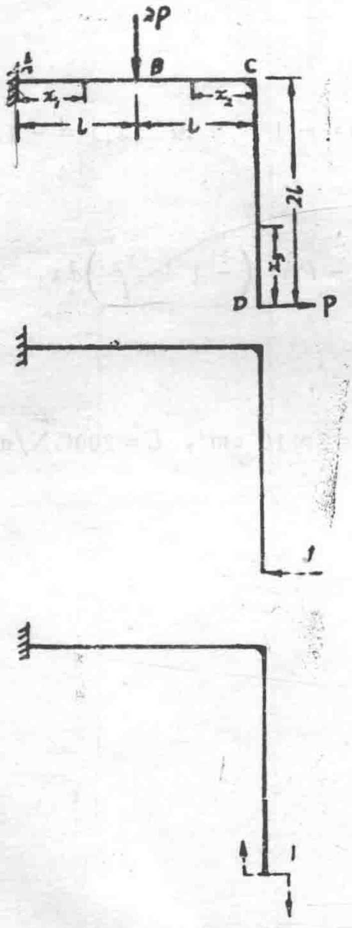
求θ_D：于D加单位力偶，引起的弯矩

$$M^{\circ}(x_1)=M^{\circ}(x_2)=M^{\circ}(x_3)=-1$$

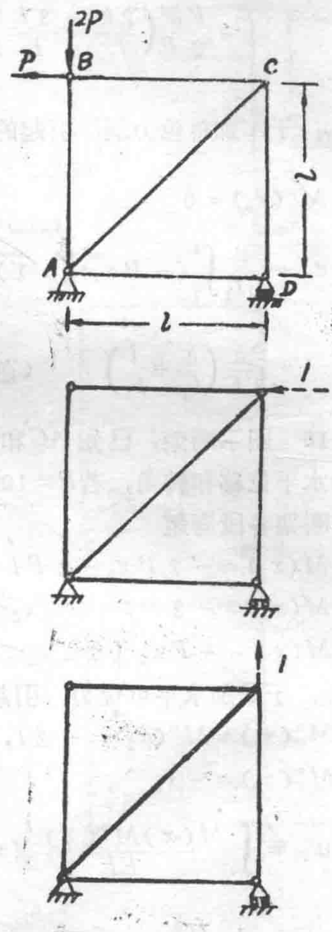
$$\theta_D=\frac{1}{EI}\Big(\int_0^{l}(-2Px_1-2Pl)(-1)\,dx_1+\int_0^{l}(-2Pl)(-1)\,dx_2$$

$$+\int_0^{2l}(-Px_3)(-1)\,dx_3\Big)$$

$$=\frac{7Pl^{2}}{EI}=\frac{7\times10^{4}\times10^{6}}{2\times10^{5}\times3\times10^{7}}=0.0117\ \text{rad}\qquad（顺）$$



题10—10图



题10—11图

10—11　图示桁架各杆的材料相同，截面面积相等，试求节点C处的水平位移和垂直位移。

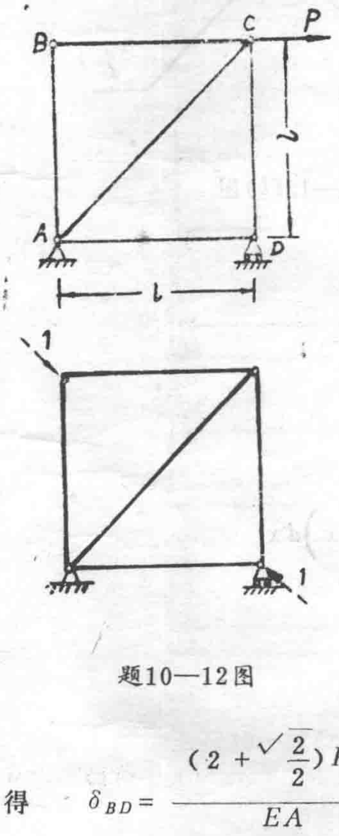
解：于C分别加水平和铅垂单位力。各杆由载荷和各单位力引起的轴力以及按公式

$\Delta=\sum_i \frac{N_i N_i^0}{EA} l_i$ 算位移的计算过程，列表如下。

杆	N_i	N_{ui}^0	N_{vi}^0	l_i	$N_i N_{ui}^0 l_i$	$N_i N_{vi}^0 l_i$
AB	$-2P$	0	0	l	0	0
BC	P	0	0	l	0	0
CD	P	1	1	l	Pl	Pl
DA	0	0	0	l	0	0
AC	$-\sqrt{2}P$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}l$	$2\sqrt{2}Pl$	0
Σ					$(1+2\sqrt{2})Pl$	Pl

得 $u_c=\frac{(1+2\sqrt{2})Pl}{EA}=3.83\frac{Pl}{EA}$ （向左）

$v_c=\frac{Pl}{EA}$ （向上）



题10—12图

10—12 图示桁架各杆的材料相同，截面面积相等，在载荷P作用下，试求节点B与D间的相对位移。

解：于B、D加一对单位力，各杆由载荷、单位力引起的轴力及由$\Delta=\sum_i \frac{N_i N_i^0}{EA} l_i$ 算位移的计算过程列表如下：

杆	N_i	N_i^0	l_i	$N_i N_i^0 l_i$
AB	0	$-\sqrt{2}/2$	l	0
BC	0	$-\sqrt{2}/2$	l	0
CD	$-P$	$-\sqrt{2}/2$	l	$\frac{\sqrt{2}}{2}Pl$
DA	0	$-\sqrt{2}/2$	l	0
AC	$\sqrt{2}P$	1	$\sqrt{2}l$	$2Pl$
Σ				$(2+\sqrt{2}/2)Pl$

得 $\delta_{BD}=\frac{\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Pl}{EA}=2.71\frac{Pl}{EA}$ （相近）

7/6

10—13 刚架各部分的EI相等，试求在图示一对P力作用下，A、B两点之间的相对位移。

解：（a） 刚架各段梁弯矩

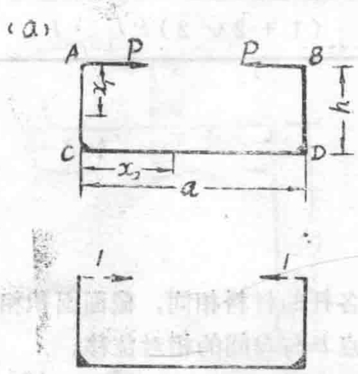
$$M(x_1)=P\,x_1\quad(0\leqslant x_1\leqslant h)$$

$$M(x_2)=P\,h\quad(0\leqslant x_2\leqslant a)$$

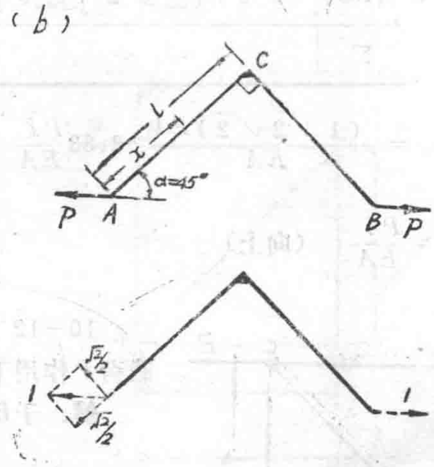
于A、B加一对单位力，引起的弯矩 $M^\circ(x_1)=x_1$， $M^\circ(x_2)=h$

由对称性 $\delta_{AB}=\dfrac{2}{EI}\left(\int_0^h P\,x_1\cdot x_1 d\,x_1+\int_0^{\frac{a}{2}}P\,h\cdot h d\,x_2\right)$

$$=\frac{P\,h^2}{3\,EI}(2\,h+3\,a)\ （相近）$$



题10—13(a)图



题10—13(b)图

（b） 刚架弯矩

$$M(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}P\,x\quad(0\leqslant x\leqslant l)$$

于A、B加一对单位力，引起的弯矩$M^\circ(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

$$\delta_{AB}=\int_l\frac{M(x)M^\circ(x)}{EI}d\,x=\frac{2}{EI}\int_0^l\left(\frac{\sqrt{2}}{2}P\,x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)d\,x$$

$$=\frac{P\,l^3}{3\,EI}\quad（相离）$$

若考虑轴力影响，再附加

$$N_{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}P,\qquad N^0_{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta\delta_{AB}=\sum_i \frac{N_i N_i^0}{EA} l_i=\frac{2}{EA}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}P\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}l=\frac{Pl}{EA}\ (\text{相离})$$

$$\delta_{AB}=\frac{Pl^3}{3EI}+\frac{Pl}{EA}\ (\text{相离})$$

10—15　试求题10—13中所示刚架的A、B两截面的相对转角。

解：（a）　于A、B加一对单位力。刚架M图、$M°$图如图。由图乘法

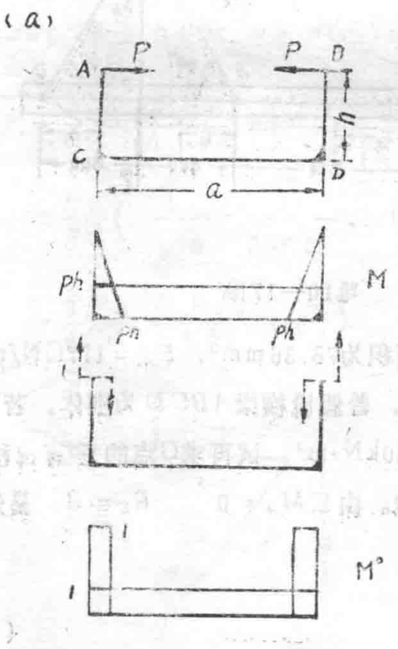
$$\theta_B=\sum_i \frac{\omega_i M_{ci}^0}{EI}=\frac{2}{EI}\left(\frac{1}{2}Ph\cdot h\cdot 1+\frac{1}{2}Ph\cdot a\cdot 1\right)$$

$$=\frac{Ph^2}{EI}(h+a)\quad(B\text{对}A\text{逆})$$

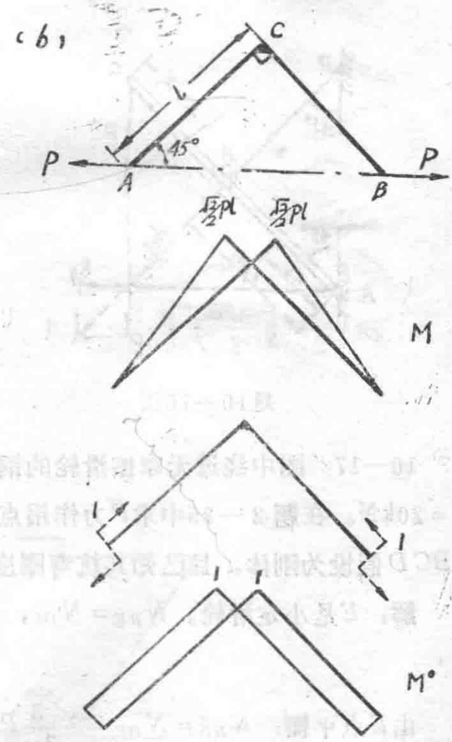
（b）　于A、B加一对单位力偶。刚架M图、$M°$图如图。由图乘法

$$\theta_B=\sum_i \frac{\omega_i M_{ci}^0}{EI}=\frac{2}{EI}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}Pl}{2}\cdot l\cdot 1\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}Pl^2}{2EI}\quad(B\text{对}A\text{逆})$$



题10—15(a)图



题10—15(b)图

10—16 图示简易吊车的吊重$P=2.83\text{kN}$。撑杆AC长为2m，截面的惯性矩为$I=8.53\times10^6\text{mm}^4$。拉杆$BD$的横截面面积为$600\text{mm}^2$。如撑杆只考虑弯曲的影响，试求$C$点的垂直位移。设$E=200\text{GN/m}^2$。

解：BD是二力杆，由AC受三力平衡易求 $N_{BD}=\sqrt{2}P$。 故各杆内力

BC：$M(x_1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}Px_1 \quad (0\leqslant x_1\leqslant 1)$ $\qquad BD$：$N_{BD}=\sqrt{2}P$

而 $\frac{\partial M(x_1)}{\partial P}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1$, $\qquad \frac{\partial N_{BD}}{\partial P}=\sqrt{2}$

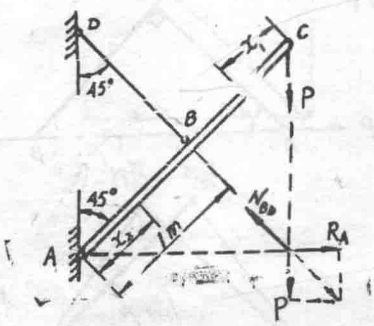
于是

$$v_c=\sum_i\frac{N_i}{EA}\frac{\partial N_i}{\partial P}l_i+\int_l\frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial P}dx$$

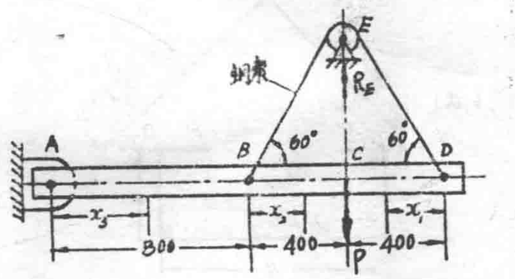
$$=\frac{\sqrt{2}P}{EA}\sqrt{2}\ l+\frac{2}{EI}\int_0^l\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}Px_1\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1\right)dx_1$$

$$=\frac{Pl}{E}\left(\frac{l^2}{3I}+\frac{2}{A}\right)=\frac{2830\times10^3}{2\times10^5}\left(\frac{10^6}{3\times8.53\times10^6}+\frac{2}{600}\right)$$

$$=0.600\text{mm（向下）}$$



题10—16图



题10—17图

10—17 图中绕过无摩擦滑轮的钢索的截面面积为76.36mm^2，$E_{索}=177\text{GN/m}^2$。$P=20\text{kN}$。在题2—25中求P力作用点C的位移时，曾假设横梁$ABCD$为刚体。若不把$ABCD$假设为刚体，且已知其抗弯刚度为$EI=1440\text{kN}\cdot\text{m}^2$。试再求$C$点的垂直位移。

解：E是小定滑轮。$N_{BE}=N_{DE}$，R_E与P共线。由$\Sigma M_A=0$ $\quad R_E=P$。易知$R_A=0$，

由E点平衡：$N_{BE}=N_{DE}=\frac{\sqrt{3}}{3}P$

DC弯矩：$M(x_1)=\frac{P}{2}x_1 \ (0\leqslant x\leqslant l/2)$，$AB$：$M(x_3)=0 \ (0\leqslant x_3\leqslant l)$。