

材料力学

下册第三分册

〈化机专业用〉

华东化工学院

1961.3.

第十六章

考虑材料的塑性时构件的計算

§ 16.1 按承载力法計算构件的基本概念

到现在为止，我们在設計或校核构件时，认为构件中的最大应力 σ_{max} (如为复杂受力状态，则为最大設計应力 σ_{rmax}) 达到材料的危险应力 (塑性材料的屈服极限 σ_T 或脆性材料的强度极限 σ_B) 时，构件就处在危险状态，因此强度条件是

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad \text{或} \quad (\sigma_r)_{max} \leq [\sigma]$$

其中 $[\sigma]$ 是材料的許用应力，它等于材料的 σ_T 或 σ_B 除以适当的安全系数。这种按最大应力不超过許用应力的計算方法称为許用应力法。在这方法中，我们假定 (1) 材料直到破坏完全服从虎克定律及 (2) 构件内任一处的应力达到危险应力时，构件即告破坏。这样的計算方法对于由脆性材料所制成的构件可以认为是正确的，因为脆性材料从受力开始到破坏，近似地服从虎克定律。并且构件内任一处的应力达到 σ_B 时，构件即告破坏。但对于由塑性材料所制成的构件，在静载荷的作用下，实际情况不是这样的。首先，塑性材料在到达屈服极限 σ_T 以前可以认为是服从虎克定律的，但到达 σ_T 以后，应力与应变就不再保持直线关系。於是构件内各截面上应力的分布情况与弹性阶段的分布情况不再相同而引起了所谓应力的重分布。这样就失去了按許用应力法計算的基础。并且，从实践得知，由塑性材料制成的构件，当危险截面上某些处的应力 (或設計应力) 达到屈服限 σ_T 时，塑性变形将首先出現于这些部分 (例如梁的最外侧纤维，厚壁筒的内侧边缘等)。但是，这一现象仅表示材料局部失去弹性，並不等于整个构件已达到危险状态，只有当载荷继续增加，使构件内危险截面上的任何地方都出現塑性变形时，整个构件才到达危险状态 (即在这样的载荷下整个构件的变形将变得很大)。因此近年来，对于某些受静载荷的由塑性材料制成的构件，設計者已开始采用另一种計算方法，就是先算出整个构件达到危险状态的极限载荷 P_T ，然后除以适当的安全系数，得到其許可承受的载荷 $[P]$ ，按这种方法进行的

強度計標稱為按承載能力的計標，或稱為許可載荷法。我們可以看到，按這種方法來計標構件，由於考慮到了整個構件的承載能力（不象按許用應力法僅考慮了按彈性階段計標的某些尖的最大應力），必然更正確地反映了構件破壞時的實際情況，從而提高了設計的经济性。這裡必須指出，這方法只適用於塑性材料（更正確地說材料處在塑性狀態）制成的構件在靜載荷作用下的情況；如果是脆性材料（更正確地說材料處在脆性狀態）制成的構件，或構件在交變載荷的作用下，這方法就不能應用了。

按承載能力來計標構件時，須了解當構件中的應力超過材料的彈性極限時應力與應變間的關係（這時虎克定律不適用）。在第二章中，我們已得到過具有顯著屈服階段的塑性材料（低碳鋼）的應力應變圖如圖 16.1 (a) 所示。為了簡化計算，不少設計者採用普朗特簡化曲線來代替實際的應力應變曲線，如圖 16.1 (b) 所示。這裡認為材料在到達屈服極限前是服從虎克定律的，在到達屈服極限以後則轉變為所謂理想塑性體，即在應力 σ_T 下將無限制地流動。這石石的理想對於象低碳鋼這一類具有顯著屈服階段的材料來講，在應變不大的情況下基本上是正確的，對於其他不具有顯著屈服階段的塑性材料或是象低碳鋼這一類材料在應變很大的情況下，上述的理想與實際情況相差較大。關於這個問題的說明將在本章的最後一節 § 16.6 中提到。

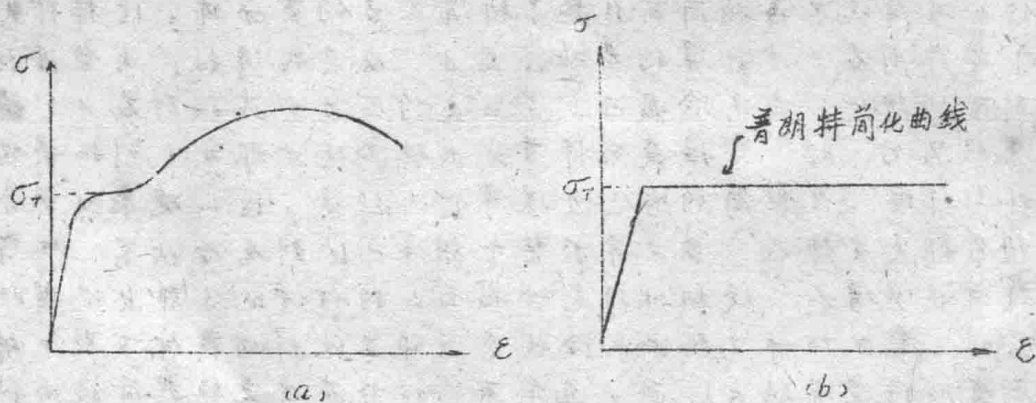


圖 16-1

按承载能力的计算，还可应用在分析超静定杆系的问题中。在超静定杆系（例如如图 16-2 所示的杆系）中，当其中一根杆的应力达到屈服极限 σ_T 时（在图 16-2 所示的杆系中，如各杆的材料相同，截面积相等，则根据第二章的分析，中间的一根杆 AD 的应力将先达到 σ_T ），并不等于整个体系已达到危险状态，因为其它剩下的杆件，仍然能形成几何不变的结杆，它们的应力还没有达到 σ_T ，还能承受继续增加的载荷（这时各杆的内力已重新分配，详见下节）。我们可以算出整个杆系达到危险状态的极限载荷 P_L ，然后除以适当的安全因数，得到其许可载荷 (P) ，这就是按承载能力或许可载荷法来计算。（详见下节）。

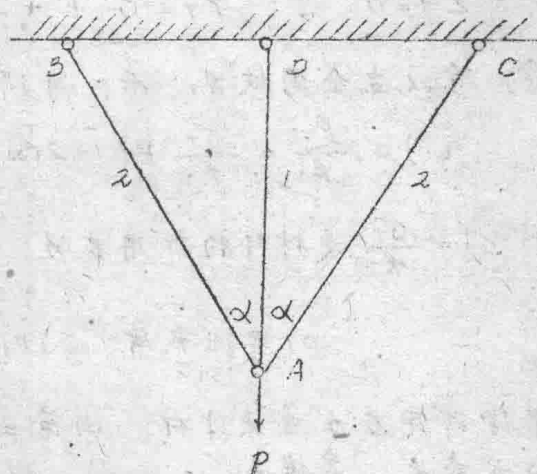


图 16-2

下节将分别就超静定杆系（拉压问题）、轴（扭转问题）、梁（弯曲问题）及厚壁筒（三向受力状态问题）具体地介绍如何按承载能力来进行计算。

§ 16.2 按承载能力法计算超静定杆系

仍以图 16-2 所示的超静定杆系为例。假定各杆的材料相同（同一塑性材料），横截面积都为 F ，中间杆的轴向力为 N_1 ，两根侧杆的轴向力为 N_2 （由对称关系可知两根侧杆的轴向力恒相等）。由第二章 § 2.15 例 2.5 的分析，在弹性阶段内 $N_1 > N_2$ ，因此中间杆的应力首先达到屈服极限 σ_T 。以后如果载荷 P 继续增加，由于中间杆已进入塑性流动阶段，它的变形继续增加而应力不增加（

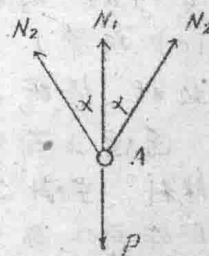


图 16-3

根据普朗特简化曲线的情况), 它的应力保持常数等于 σ_T , 而其他两根杆因尚未进入塑性流动阶段, 它的应力将随着变形的增加而增加, 直至这两根杆内的应力也达到 σ_T 时, 节点 A 的位移将无限制地增大 (註) 而整个杆系达到了危险状态。设这时的载荷为 P_T (P_T 即是这杆系的极限载荷), 则由节点 A 的平衡条件

$$\sum Y = 0 \quad P_T = \sigma_T F + 2\sigma_T F \cos \alpha = \sigma_T F (1 + 2 \cos \alpha)$$

将 P_T 除以安全因数 K_T 后, 可得许可载荷

$$[P] = \frac{P_T}{K_T} = \frac{\sigma_T}{K_T} F (1 + 2 \cos \alpha) = [\sigma] F (1 + 2 \cos \alpha) \quad (a)$$

其中 $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{K_T}$ 是材料的许用应力, 从而得到强度条件如下:

$$P(\text{实际载荷}) \leq [P] = [\sigma] F (1 + 2 \cos \alpha)$$

如果按许用应力法来计算, 由第二章 §2.15 的分析, 中间杆的轴向力最大, 其值为

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

强度条件是

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{P}{F (1 + 2 \cos^3 \alpha)} \leq [\sigma]$$

由此得许可载荷

$$[P] = [\sigma] F (1 + 2 \cos^3 \alpha) \quad (b)$$

比较 (a), (b) 两式, (假定两种方法中所取的安全因数相等, 因此 $[\sigma]$ 相等) 可见按承载能力计算得出的 $[P]$ 较大, 例如 $\alpha = 30^\circ$ 时, 根据 (a) 式算出的 $[P]$ 将较 (b) 式算出的约大 12%。通过上述的分析, 可知按承载能力来计算杆系, 可以节省材料, 在计算上也是比较方便的, 因为这里不必求出在载荷 P 作用下各杆杆件内的实际应力, 因此也就不必解超静

(註): 这是根据普朗特简化曲线得出的情况, 事实上由于材料具有强化作用 (详见本章 §16.6), 这时节点 A 的位移虽是很快地增长, 但不会变为无限大的。

定问题。按承载力计算的困难在于：判断整个杆系达到危险状态时哪些杆内的应力达到 σ_T ，而哪些杆内的应力没有达到 σ_T ，因为超静定杆系并不一定要所有的杆内的应力都达到 σ_T 才进入危险状态（图 16.2 及 16.3 的情况，因两根侧杆的轴向力相等的原因，所以三根杆都会达到危险状态，这仅是一个特殊情况）。判别的方法是根据杆系的静力平衡条件，可以看出某些杆内的应力达到 σ_T 时，而剩下某些杆内的应力还没有达到 σ_T ，（有时还要用假想和试算的方法来确定），如果剩下的杆件不能组成几何不变结构，则整个杆系就达到了危险状态。下面再举些例子来说明这方法的应用。

（例 16.1）计算图 16.4 所示的超静定杆系的许可载荷 P 。假定各杆的截面面积均为 $F = 5 \text{ cm}^2$ ，材料均为三号钢 $\sigma_T = 2400 \text{ kg/cm}^2$ ，规定的安全系数 $K_T = 1.5$ 。

（解）根据节点 D 的静力平衡条件：

$$\sum X = 0,$$

$$N_2 \cos \alpha = N_3$$

由于二桿横截面积相等，因此

$$\sigma_2 \cos \alpha = \sigma_3$$

这样可看出：当杆 2 的应力达到 σ_T 时，杆 3 的应力只达到 $\sigma_T \cos \alpha$ 。以后：如继续增加载荷 P ， σ_3 也不可能增加，所以当杆 1 及杆 2 的应力达到了 σ_T 后，杆 3 的应力虽还没有达到 σ_T ，但也不能再继续增加载荷（剩下的杆 3 不可能组成几何不变结构），这就确定了当杆 1 及杆 2 的应力达到了 σ_T 时，整个杆系，就达到了危险状态，这时杆 1 的

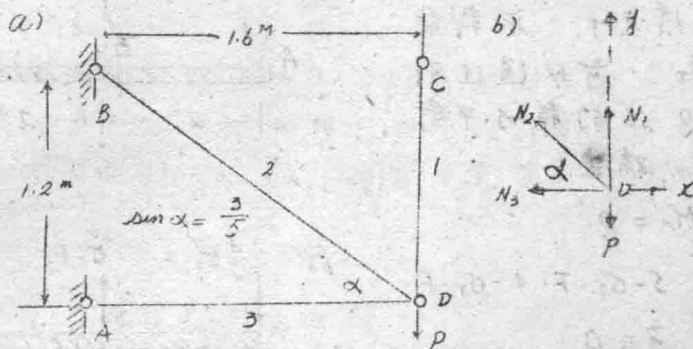


图 16-4

杆 3 不可能组成几何不变结构），这就确定了当杆 1 及杆 2 的应力达到了 σ_T 时，整个杆系，就达到了危险状态，这时杆 1 的

16-6

载荷即寻求极限载荷 P_T 。由静力平衡条件。

$$\Sigma T = 0 \quad P_T = \sigma_T F + \sigma_T F \sin \alpha = 2400 \times 5 + 2400 \times 5 \times \frac{3}{5} = 19200 \text{ Kg}$$

$$\text{从而求出} \quad (P) = \frac{P_T}{K_T} = \frac{19200}{1.5} = 12800 \text{ Kg} = 12.8 \text{ t}$$

(例 16.2) 图 16.5 所示的超静定杆系中各杆的长度与横截面积均相等，材料均为三号钢，其屈服极限 $\sigma_T = 2400 \text{ Kg/Cm}^2$ (假设压杆的柔度不大使其不致丧失稳定)，规定的安系数 $K_T = 1.5$ ，若该杆系所受的荷载为 $P = 6 \text{ t}$ ，试设计各杆的截面积 F 。

(解) 根据作用在刚杆 AD 上各力的平衡条件 ($\Sigma Y = 0$ 及 $\Sigma M = 0$)，杆 1、2、3 的应力不可能都达到屈服极限 σ_T ，而只要其中二根杆内的应力达到 σ_T 后，剩下的一根杆不可能承担继续增加的荷载 (因剩下的杆不可能组成几何不变结拼)，所以只要有二根杆的应力达到 σ_T 时，整个杆系就达到了危险状态。至于哪二根杆的应力达到 σ_T 而哪一根杆的应力尚小于 σ_T ，须用假定和试标的方法。

假定杆 2、3 的应力到达 σ_T 而杆 1 内的应力尚小于 σ_T ，在此情况下，承载力 P_T ，可以通过刚杆 AD 上的静力平衡条件以确定。

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P_T \cdot 5 - \sigma_T \cdot F \cdot 4 - \sigma_T \cdot F \cdot 2 = 0$$

从而求得

$$P_T = \frac{6}{5} \sigma_T \cdot F$$

再用 $\Sigma F_y = 0$ 可求出 σ_1 。

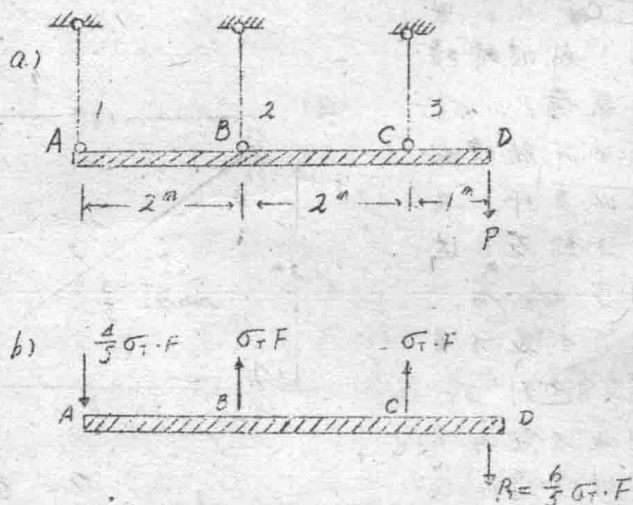


图 16.5

$$P_T - \sigma_T \cdot F - \sigma_T \cdot F - \sigma_T \cdot F = 0$$

$$\therefore \sigma_1 = \frac{6}{5} \sigma_T - 2\sigma_T = -\frac{4}{5} \sigma_T \quad (\text{压力})$$

从而肯定了原先的假定，杆1内的应力尚小于 σ_T ，因此所假定的危险状态是正确的。

根据承载力 P_T 可以求出许可载荷 (P)

$$(P) = \frac{P_T}{K_T} = \frac{\frac{6}{5} \sigma_T \cdot F}{K_T} = \frac{\frac{6}{5} \cdot 2420 \cdot F}{1.5} = 1920 F$$

又根据强度条件：

$$P \leq (P) \quad \text{可得}$$

$$6000 \leq 1920 F \quad \therefore F \geq \frac{6000}{1920} = 3.13 \text{ cm}^2$$

讨论：如果开始时假定杆1、3杆内的应力达到 σ_T （其中1为压）而杆2内的应力尚小于 σ_T ，这样也可以由杆AD静力平衡条件来确定 P_T 值，并检查原先假定是否正确

$$\sum M_B = 0 \quad P_T \cdot 3 - \sigma_T \cdot F \cdot 2 - \sigma_T \cdot F \cdot 2 = 0 \quad P_T = \frac{4}{3} \sigma_T \cdot F$$

$$\sum Y = 0 \quad P_T - \sigma_T \cdot F + \sigma_T \cdot F - \sigma_2 \cdot F = 0 \quad \therefore \sigma_2 = \frac{4}{3} \sigma_T$$

由于 $\sigma_2 > \sigma_T$ ，因此可知原先假定是错误的，这样就应该更换一个假定。

最后，这里再次强调指出：按承载力计算静定杆系仅适用于由塑性材料或处在塑性状态的材料所制成的杆系在静载荷作用下的情况，对于处在脆性状态的材料或在交变载荷作用下的杆系均不适用。

§16-3 按承载力设计承受扭转的圆轴

前已按许用应力法设计承受扭转的圆轴时，强度条件是

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P} \leq [\tau]$$

这里的 $\tau_{\max}$ 是在圆轴横截面的边缘处的剪应力

事实上由塑性材料制成的，圆轴受着扭转，当横截面边缘

16-8

处的剪应力达到 τ_T 时, 还不致於破坏, 这是由于 $\tau-\rho$ 曲线上也有同样的普朗特曲线的水平段 (图 16-6. a), 当扭矩继续增加时, 边缘上的剪应力将停留於 τ_T 而剪应变继续增加, 此时内部各点的剪应力却在继续增加, 直到全都到达 τ_T 为止, 整个轴才被扭坏 (图 16-6. b),

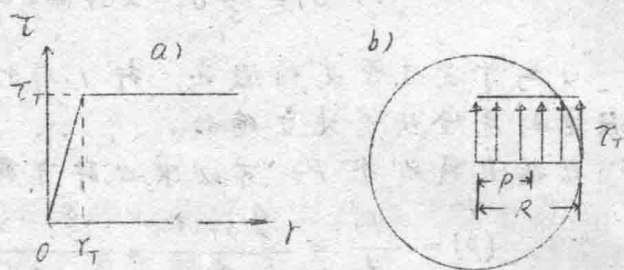


图 16-6

也就是在受扭时,

剪应力也会出现重分布的现象。此时, 扭矩与剪应力之间关系为:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \quad M_K = \int_0^R \tau_T \cdot 2\pi \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \tau_T = M_{KT} \end{aligned}$$

式中 M_{KT} 即为整个截面全都到达塑性范围 (图 16-6. b) 时的扭矩, 也就是扭轴的承载能力

则许用载荷 (扭矩) 为:

$$[M_K] = \frac{M_{KT}}{K_T} = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\tau_T}{K_T} = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot [\tau] \quad (16-1)$$

从而得到按承载能力计称塑性材料轴的强度条件为:

$$M_{Kmax} \leq [M_K] = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot [\tau] \quad (16-2)$$

如用许用应力法

$$M_{Kmax} \leq [M_K] = [\tau] W_p = \frac{1}{2} \pi R^3 [\tau]$$

将它与 (16-2) 式比较一下, 可以看出, 按承载能力法计称出来的安全扭矩的值要比按许用应力法计称出的数值大 25%。

同理, 可得到空心圆轴的承载能力为:

$$M_{KT} = \int_r^R \tau \cdot 2\pi \rho^2 d\rho = \tau_T \cdot \frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3)$$

$$= \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \alpha^3) \tau$$

(16-3)

其中 $\alpha = \frac{r}{R}$ = 内外半径之比 (参看图16-7)

按承载能力法的强度条件为

$$M_{x \max} \leq [M_k] = \frac{M_{kr}}{k_T} = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \alpha^3) (\tau) \quad (16-4)$$

必须指出, 按承载能力法用以上公式计算扭矩只适用于静载荷 (或等速旋转) 作用下用塑性材料制成的圆轴中。若扭矩的截面不是圆形, 或扭矩是由脆性材料制成的, 或载荷是交变的, 则均不能按承载能力法计算。

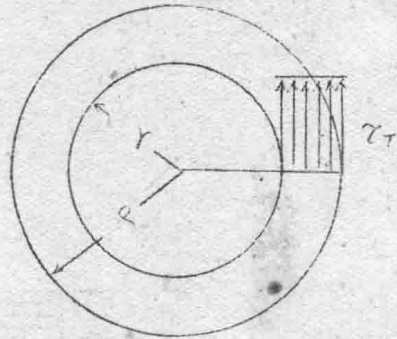


图 16-7

§ 16-4 按承载能力法计算梁的平弯弯曲问题

前已按许用应力法计算梁的平弯弯曲问题时, 强度条件是

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]$$

这里的 $\sigma_{\max}$ 是在梁的横截面 (危险截面) 上最外纤维处的正应力。

事实上, 由塑性材料制成的梁作平弯弯曲时, 当横截面上最外纤维处的正应力达到屈服极限 σ_T 时, 梁还不致于破坏而可以继续承受更多的载荷。当弯矩继续增加时, 根据普朗特-李斯纳的假定, 最外纤维处的应力将停留在 σ_T 而应变继续增加, 这时内部各纤维的应力却在继续增加, 直到全部到达 σ_T 时, 即整个横截面出现塑性变形时, 梁上的载荷不能再增加了, 也就梁到达了危险状态。图16-8表示由拉伸和压缩时的 σ 相等的塑性材料所制成的梁内横截面上正应力的分布情况随着载荷的增加而变化的情况。图16.8 (a) 表示整个横截面处在弹性范围, (b) 表示局部区域产生了塑性变形, (c) 表示整个横截面到达了塑性范围。

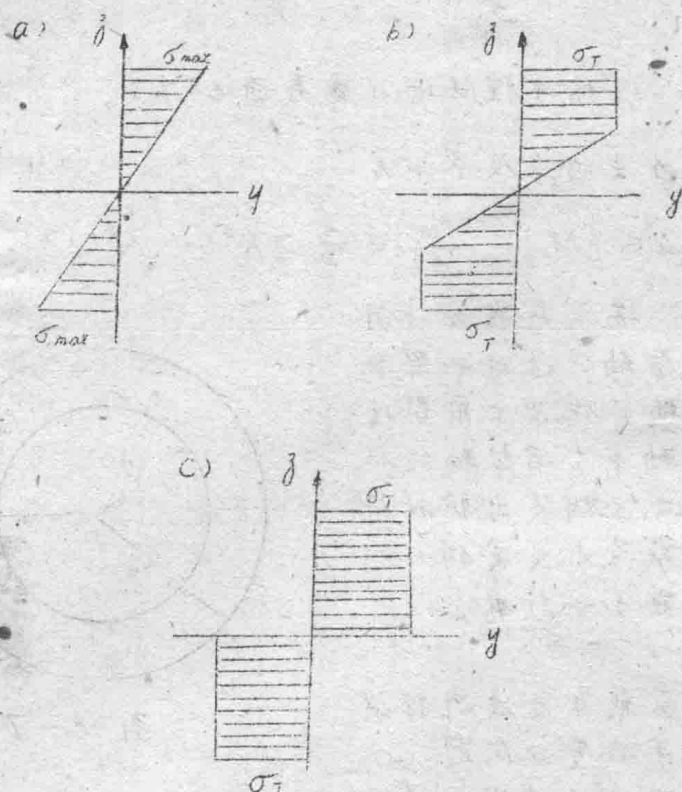


图 16-8

当整个横截面上的正应力都达到屈服极限 σ_T 时 (图 16-8 c) 由静力平衡条件, 得:

$$\sum X = 0 \quad \int_{F_1} \sigma_T dF + \int_{F_2} (-\sigma_T) dF = 0$$

式中 F_1 , F_2 分别代表横截面上受拉部分和受压部分的面积, 从而可得

$$F_1 = F_2 \quad (16-5)$$

由此可见, 当梁到达了危险状态时, 横截面的中性轴将横截面分为两个面积相等的部分。我们早已知道, 在弹性范围内, 梁的中性轴是通过形心的。所以, 在铅直载荷作用下, 如果梁具有水平形心轴是对称轴的截面 (例如矩形, 工字形, 圆形等), 则在危险状态时和在弹性范围时的中性轴位置是相同的; 但如果梁具有水平形心轴不是对称轴的截面 (例如 T 字形截面) 则

两种情况中的中性轴的位置是不同的。换言之，当超过弹性范围时随着载荷的增加中性轴的位置也在移动。

再由平衡系，可求出梁的承载能力 M_T 为

$$\begin{aligned}\sum M_y = 0, \quad M_T &= \int_{F_1} \sigma_T y dF + \int_{F_2} \sigma_T y dF = \sigma_T \left(\int_{F_1} y dF + \int_{F_2} y dF \right) \\ &= \sigma_T (S_1 + S_2) \quad (16-6)\end{aligned}$$

式中 S_1, S_2 分别代表横截面受拉部分与受压部分面积对中性轴的静矩，(都认为是正值的)。

(16.6) 式又可改写为下列形式：

$$M_T = \sigma_T \cdot W_T \quad (16-7)$$

其中 $W_T = S_1 + S_2$ ，可以称为塑性抗弯截面模数。

在水平形心轴是对称轴的截面中(例如矩形，工字形，圆形等)，中性轴是与水平形心轴重合的。因此

$$S_1 = S_2 = S \quad (\text{半个截面面积对于水平形心轴的静矩})$$

$$\text{於是} \quad W_T = S_1 + S_2 = 2S$$

截面的塑性抗弯截面模数 W_T 通常较抗弯截面模数 W 来得大，例如：

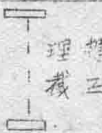
$$\text{在矩形截面中: } W_T = 2 \left(\frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} \right) = \frac{bh^2}{4}, \quad \frac{W_T}{W} = \frac{\frac{1}{4}bh^2}{\frac{1}{6}bh^2} = 1.5$$

$$\text{在圆形截面中: } W_T = 2 \left(\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} \right) = \frac{4}{3}r^3, \quad \frac{W_T}{W} = \frac{\frac{4}{3}r^3}{\frac{\pi}{4}r^3} = 1.7$$

为了计算方便起见，将几种常用截面的 $\frac{W_T}{W}$ 比值标出列表

如下(表16.1)，应用这表查出 $\frac{W_T}{W}$ 的比值，乘以截面的抗弯截面模数 W 即可求出 W_T ，再应用(16-7)式即可得出梁的承载能力 M_T 。

表 16.1 几种常用截面的 $\frac{W_T}{W}$ 比值

截面形状						
$\frac{W_T}{W}$	1.0	1.15~1.17	1.27	1.50	1.70	2.00

按承载力法可写出梁的强度条件如下：

$$M_{max} \leq [M] = \frac{M_T}{K_T} = \frac{\sigma_T W_T}{K_T} = [\sigma] \cdot W_T \quad (16-8)$$

如用许用应力法，

$$M_{max} \leq [M] = [\sigma] W$$

将它与 (16-8) 式比较一下，且知 $W_T > W$ ，可以看出，按承载力法计算出来的安全弯矩的值要比按许用应力法计算出的数值来得大。

§ 16.5 厚壁圆筒的极限压力及按承载力法的计算，

在第十一章中，已知在均匀内压力 p 的作用下，开口厚壁圆筒的各横截面上及距 α 厚壁圆筒不靠近封盖的横截面上，在弹性范围内，最大的 σ_t 和 σ_r (绝对值) 都在筒的内壁，其值为

$$\sigma_t = \frac{p(r_1^2 + r_2^2)}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \sigma_r = -p$$

按许用应力法，如果采用第三强度理论，则强度条件是

$$\sigma_{t_3} = \sigma_t - \sigma_r = \frac{2pr_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{K_T}$$

如果采用第四强度理论，则强度条件是

$$\sigma_{t_4} = \frac{\sqrt{3} p r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{K_T}$$

在第十一章中已指出，当内侧表面上的设计应力到达屈服极限时，仅表示材料局部失去弹性，并不意味着整个圆筒的承载能力已经耗尽，所以根据弹性范围内最大设计应力来计算的许用应力法，对于材料的利用总是不充分的。事实证明，在设

备的压力大，超过内壁开始屈服时的压力时，仍未发生设备的破坏，因此近年来，设计者已按承载能力法来进行计算和设计，其结果是大，节省了材料的消耗。按照这个方法，认为内壁纤维屈服后，还可继续增加压力，使塑性区域逐渐向外扩展，直到整个圆筒出现了塑性变形，圆筒才达到了危险状态。在这种情况下，内压力 p_T 就是这厚壁圆筒的极限压力。

厚壁圆筒的筒壁处在三向受力状态，在三向受力状态下的变形物体，在怎样的条件下会产生塑性变形，这条件叫做塑性条件。通常采用的塑性条件有下列两种形式：

(1) 脱里斯加 塑性条件：认为材料内某单元体的最大剪应力达到单向拉伸下使材料屈服的最大剪应力（即等于 $\frac{\sigma_T}{2}$ ）时，则这单元体发生塑性变形。这一塑性条件的表达式是

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_T}{2}$$

或

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T \quad (16-9)$$

式中 σ_T 为单向拉伸时材料的屈服极限

(2) 米塞司 塑性条件：认为材料内某单元体的八面体剪应力达到单向拉伸下使材料屈服的八面体剪应力时，则这单元体发生塑性变形。所谓八面体剪应力就是这样——个斜截面上的剪应力，这斜截面的法线与三个主应力

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的作用线间的夹角都是相等的。（图 16-9）。经过演算，八面体剪应力的数值等于（注）

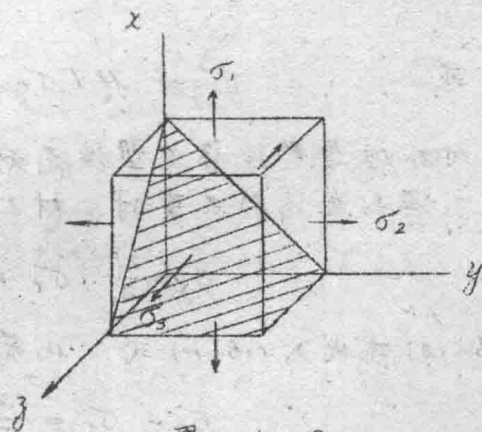


图 16-9

（注）：在上册附录（一）中，曾导出三向受力状态的单元体的斜截面上的 σ 及 τ 分别为

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3$$

$$\tau = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma^2}$$

今知 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ，且知 $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$

$$\therefore \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{于是 } \sigma_i = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

如为单向拉伸,

$$\tau_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma$$

所以, 米塞司塑性条件的表达式是

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_T$$

$$\text{或} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T \quad (16-10)$$

实验证明: 米塞司塑性条件更符合实际情况

将米塞司条件应用于厚壁圆筒的问题上, 这时 $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_j$, $\sigma_3 = \sigma_r$, 於是塑性条件为

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_t - \sigma_j)^2 + (\sigma_j - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2} = \sigma_T$$

(16-11)

根据大量的试验结果表明厚壁圆筒在內压作用下, 其轴向应变几乎为零, 即 $\varepsilon_y = 0$, 因而由广义虎克定律, 可得

$$\sigma_j - \mu(\sigma_t + \sigma_r) = 0$$

$$\text{或} \quad \sigma_j = \mu(\sigma_t + \sigma_r) \quad (a)$$

对于理想塑性体在塑性流动时, 体积是不变的, 由第四章 § 4.7 得知当体积不变时, 材料的 $\mu = \frac{1}{2}$, 代入 (a) 式得:

$$\sigma_j = \frac{1}{2} (\sigma_t + \sigma_r) \quad (16-12)$$

将 (16-12) 式代入 (16-11) 式, 化简后得:

$$\sigma_T - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \quad (16-13)$$

假定材料是理想塑性体, 即材料产生塑性流动时, 入百体剪应力维持不变, 於是沿着整个筒的厚度 (16-12) 式的关系都正确:

由第十一章 (11.1) 式, 已得到图 16-10 所示的单元体的平衡方程式为:

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (11-1)$$

这方程式与材料的性质无关，所以即使进入塑性阶段，这方程式仍为正确。

将 (16-12) 式代入 (11-1) 式，得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_r}{r} = 0$$

分离变量后，进行积分，得

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln r + C \quad (16)$$

式中 C 为积分常数，可由边界条件确定，即当 $r = r_2$ 时， $\sigma_r = -p$ 。

故得

$$C = -p - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln r_2$$

代入 (16) 式，得

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{r_2} - p \quad (16-14)$$

将 (16-14) 式代入 (16-13) 式及 (16-12) 式，得

$$\sigma_t = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{r}{r_2} + 1 \right) - p \quad (16-15)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{r}{r_2} + \frac{1}{2} \right) - p \quad (16-16)$$

(16-14) ~ (16-16) 诸式是处在塑性范围内的厚壁圆筒的应力分布情况。

• 当内压力 p 逐渐增加时，圆筒内壁首先开始产生塑性变形，根据普朗特简化曲线的假定，这时还可用弹性计称公式：

$$\sigma_t = \frac{p(r_1^2 + r_2^2)}{r_1^2 - r_2^2} \quad \sigma_r = -p$$

代入 (16-13) 式，经过计算，得出圆筒内壁开始产生塑性变形时的压力为：

$$p_0 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) \quad (16-17)$$

如果内压力 p 继续增加，整个圆筒将分为两个区域，内部为塑性区域，外部为弹性区域，随着内压力 p 的增加，内部的塑性

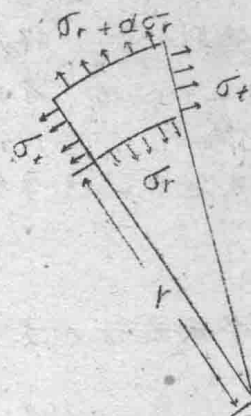


图 16-10

区域将不断扩大，外部的弹性区域将不断缩小。当整个因筒（从内壁到外壁）都产生塑性变形时，应力的分布规律将如 (16-14) ~ (16-16) 诸式所表示。将因筒外壁的边界条件：\$r = r_2\$ 时，\$\sigma_r = 0\$ 代入 (16-14) 式，求出使整个因筒产生塑性变形时的压力也就得到厚壁圆筒的极限压力 p_T 之值（註）为：

$$p_T = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

按承载能力法可写出厚壁圆筒的强度条件如下：

$$p(\text{工作压力}) \leq \frac{p_T}{k_T} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_T}{k_T} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (16-19)$$

如果假定工作压力的安全因数 k_T 和许用应力法内以屈服极限为根据的强度安全因数相等，则强度条件为

$$p \leq \frac{2(\sigma)}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (16-20)$$

如按许用应力法，根据第四强度理论，则强度条件是

$$\frac{\sqrt{3} p r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \leq (\sigma) \quad \text{或} \quad p \leq \frac{(\sigma)}{\sqrt{3}} \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] \quad (16-21)$$

根据这两种方法求出的最大许可工作压力之比值

$$\frac{p}{p'} = \frac{2 \ln \frac{r_1}{r_2}}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2} \quad (16-22)$$

由此可见，在不同的半径比 r_1/r_2 下， p/p' 之值也不同，随着 r_1/r_2 的增大， $\frac{p}{p'}$ 之值也逐渐增大。例如当 $r_1/r_2 = 1.4$ 时， $p/p' = 1.38$ ；当 $r_1/r_2 = 1.8$ 时， $p/p' = 1.70$ ，也就是说，在半径比 r_1/r_2 越大时，用两种方法计算出来的结果相差也越大。

（註）这是根据普朗特假定的理想塑性体得出的结论。事实上由于材料具有强化作用（详见 § 16-6），厚壁圆筒的极限压力将大于此值。