

强迫布鲁塞尔振子中的阵发混沌

王光瑞

(北京 8009 信箱)

陈式刚

(中国科学院物理研究所)

郝柏林

(中国科学院理论物理研究所)

1982年8月20日收到

提 要

用数值计算证实了在周期外力作用下的三分子反应模型(布鲁塞尔振子)中存在着走向混沌状态的阵发道路。研究了阵发混沌的发展过程。讨论了数值研究中区分阵发混沌和暂态过程的方法。我们的工作进一步说明,原来在参数空间中发现的嵌在混乱带中的大片周期为3的区域(以及周期为4,5,6,7等的较小区域),对应于一维非线性映象相像的切分岔,每个切分岔开始前均可看到阵发混沌。因此,走向混沌的倍周期分岔道路和阵发道路乃是孪生现象,应在更多的由非线性微分方程描述的系统观察到。

一、引 言

物理系统远离平衡之后,可能进入两大类性质不同的状态。一类是时空有序、对称更低的“耗散结构”,另一类是更为无序的混沌(chaos)状态。这两类状态在参数连续变化的过程中还可能交替出现。前一类状态作为非平衡相变的结果,七十年代以来已经有比较详尽的研究^[1],而混沌状态则随着其中普适性、标度律的发现,正在成为八十年代的重要研究课题(可参阅综述文献[2])。

由于人们正试图把混沌状态与流体中的湍流发生机制联系起来,从有序走向混沌的道路目前几乎被等同为走向湍流的道路。近十年来这方面经历了一个思想解放的过程, Landau 和 Hopf 在四十年代提出的道路基本上被从数学和实验角度否定。人们又建议了多种其它可能性,形成了“条条道路通湍流”的局面^[3]。

在各种走向混沌的道路中,倍周期分岔和阵发式(intermittent)混沌看来是孪生现象,凡是观察到倍周期分岔的系统,原则上均有可能发现阵发式混沌。然而除了最早发现阵发混沌的 Lorenz 模型外^[4],关于这一现象的研究均是在非线性映象上进行的^[5-9]。在已经知道有倍周期分岔的其它非线性微分方程描述的模型中,迄今未见发现阵发混沌的报道。我们曾经仔细研究的强迫布鲁塞尔振子^[10-12],是一个典型的倍周期分岔的系统,特别是在文献[11]中发现参数空间中有大片周期为3的区域嵌在混沌区中。这些区域的性质曾经在文献[11]中存疑。本文将说明,这些周期与一维离散映象中的切分岔对应,这些切分岔的起始处,正是应寻找阵发混沌的地方。

二、阵发混沌

我们仍以一维离散现象

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) \quad (1)$$

为例,说明混沌是怎样出现的^[6]. (1) 式中 μ 为参数, x 属于线段 I . 定义复合函数

$$F(p, \mu, x) = \underbrace{f(\mu, f(\mu, \dots, f(\mu, x)))}_{p \text{ 次}} \quad (2)$$

设 f 是使线段 I 映象到自身的单峰函数,考察 $F(3, \mu, y)$ 导致的映象

$$y_{n+1} = F(3, \mu, y_n). \quad (3)$$

当然, y_n 可以从 (1) 式迭代所得序列中留下 x_{3n} 子序列而得到 (根据初始时刻的差异, 可有三个这样的子序列, 它们都满足 (3) 式).

对于某个特定的 $\mu = \mu_c$, 函数 $F(3, \mu_c, x)$ 具有图 1 所示的形状. 曲线和图中 45° 分角线有一处相交, 三处相切. 这四个点都是迭代 (3) 式的不动点. 与分角线相交处, 曲线斜率大于 1, 对应不稳定的不动点, 而三个相切处斜率等于 1, 恰好在稳定边界上. 考察 μ 稍稍偏离 μ_c 的情形. 设 $\mu > \mu_c$ 时, 三个切点变成三对交点. 简单的分析表明, 每

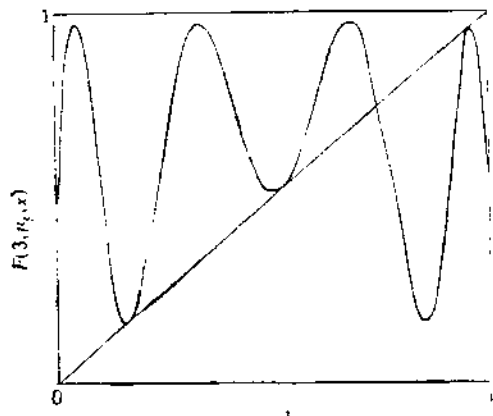
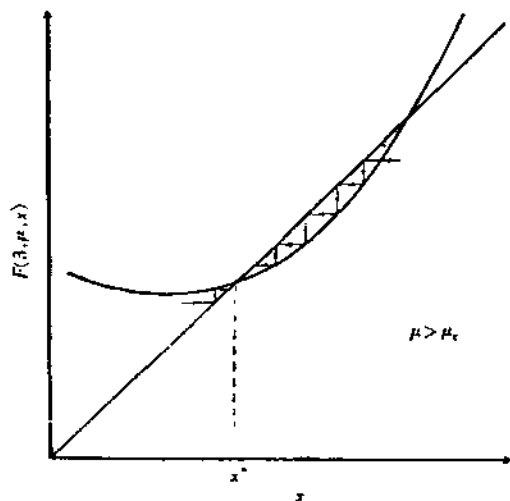


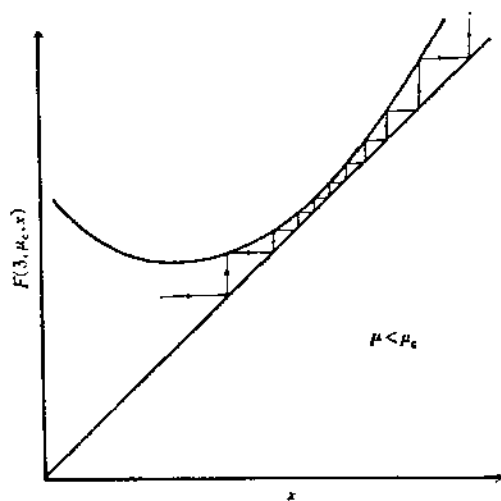
图 1 $F(3, \mu_c, x)$ 示意

对交点中一个是稳定不动点, 另一个是不稳定不动点. 图 2(a) 放大了一对交点附近的迭代过程. 容易看出, 只要初值落在 x^* 附近, 迭代结果就一定趋向稳定不动点 x^* . 这样, 映象 (3) 式有了三个稳定不动点, 它们自然构成映象 (1) 式的三点周期.

$\mu < \mu_c$ 时出现什么情况呢? 这时 $\mu = \mu_c$ 后将与分角线相切的三点都尚未碰到分角线, 在曲线和分角线之间留下三处狭窄的“走廊”. 如果迭代过程中一个点落到了某个“走廊”附近, 就可能发生图 2(b) 所示的过程: 一开始好像是往不动点收敛, 但由于并不存在



(a) $F(3, \mu, x)$, $\mu > \mu_c$



(b) $F(3, \mu, x)$, $\mu < \mu_c$

图 2

从动点, 迭代过程限在“走廊”中多次之后, 终于从另一端离去。经过一些大幅度的跳跃之后, 又可能来到这个或另一个“走廊”附近, 再次重复以上过程。然而每一次都不是准确重复过去有过的事件。这样, 在“走廊”中的迭代很像是在不动点附近踏步, 对应近乎周期的或“层流”运动, 而在不同“走廊”之间的跳跃, 对应混沌的“湍流”相。这就说明, 为什么整个迭代过程看起来就像是周期运动中随机地夹杂了一些混沌阶段, 层流时而被阵发的湍流打断。μ 越是接近 μ_c, “走廊”越是狭窄, 层流时间即通过“走廊”所需的时间就越长。μ 达到 μ_c 时, 层流时间“发散”, 即达到完全的周期状态。这个过程倒过来看, 层流时间随 μ 偏离 μ_c 而愈来愈短, 终于完全成为湍流状态。这就是由有序(周期)进入混沌的阵发道路。层流时间的发散方式, 可以简单地估计如下:

在不动点 x^* 和 μ_c 附近, 可把 $F(3, \mu, x)$ 展开

$$F(3, \mu, x) = x^* + \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, \mu_c)(x - x^*) + \frac{\partial F}{\partial \mu}(x^*, \mu_c)(\mu - \mu_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^*, \mu_c)(x - x^*)^2 + \dots,$$

在 $\mu = \mu_c$ 处, $F(x^*)$ 曲线斜率为 1。对应图 2(b) 的情形, 上式可写为

$$F(3, \mu, x^*) = x^* + (x - x^*) + a(\mu_c - \mu) + b(x - x^*)^2 + \dots,$$

a, b 都是正数(在其它“走廊”附近 a, b 的数值不同)。如果 $(x - x^*)^2$ 项的系数为零, 则取下一个非零项, 记为 $b(x - x^*)^3$ 。于是在图 2(b) 所示的走廊附近, 迭代(3)式成为

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* + a(\mu_c - \mu) + b(x - x^*)^2. \quad (4)$$

将 n 看作 $\Delta t = 1$ 的离散时间, 在“走廊”中 x_n 与 x_{n+1} 相差很少, 可引用连续变量 $y = x - x^*$, 将(4)式换成微分方程

$$\frac{dy}{dt} = a(\mu_c - \mu) + by^2. \quad (5)$$

积分时应从“走廊”入口 y_1 到出口 y_2 计算时间, 当 $\mu \rightarrow \mu_c + 0_-$ 时, 结果是

$$t \sim [ab(\mu_c - \mu)]^{-(1-\frac{1}{2})}. \quad (6)$$

$\alpha = 2$ 时, 指数为 $-1/2$ 。这个结果应与连续相变点附近关联长度的发散

$$\xi \sim |T_c - T|^{-\nu}$$

对比。在这个意义下, (6) 式的临界指数取平均场值 $1/2$ 。以上讨论当然适用于其它 $F(p, \mu, x)$, $p = 4, 5, 6, 7, \dots$ 等导致的切分岔点附近, 只不过 $p = 3$ 时运动形态比较单纯。

顺便指出, 这里“阵发”一词用法与普通湍流理论中^[13]稍有差别。大片流体中湍流与非湍流部分之间有明确边界, 但边界形状是无规的, 且随着流体不断运动和改变。如果固定取边界附近一点, 则此点忽而落入湍流区, 忽而置身区外, 其速度变化显示出湍流与层流随机交替的“阵发”行为。本文所述阵发混乱, 则是动力系统本身的时间行为, 完全没有涉及空间分布。

三、强迫布鲁塞尔振子

我们仍然研究周期外力作用下的三分子反应模型^[10-12]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A - (B+1)x + x^2y + \alpha \cos(\omega t), \\ \frac{dy}{dt} &= Bx - x^2y.\end{aligned}\quad (7)$$

这个非自治方程组可用多种方式写为自治方程. 我们把它写成布鲁塞尔振子与一个线性振子的耦合形式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A - (B+1)x + x^2y + \alpha z, \\ \frac{dy}{dt} &= Bx - x^2y, \\ \frac{dz}{dt} &= -\omega u, \quad \frac{du}{dt} = \omega z.\end{aligned}\quad (8)$$

只要取初值 $z(0) = 1, u(0) = 0$, 方程组 (7) 和 (8) 就完全等价, 然而 (8) 式在数值计

算中更方便.

这个模型有四个参数 A, B, α, ω . 首先遇到的问题是, 参数空间中何处去寻找阵发混沌. 由于我们在 $A-\omega, B-\omega, \alpha-\omega$ 三个截面对分岔谱已经有了比较详细的了解^[11], 知道过去人们采用^[12,14]的参数范围 $A = 0.4, B = 1.2, \alpha = 0.05$, 变 ω (即图 3 中水平虚线), 只能遇到较长的周期嵌在高阶的混沌带中. 这是不利于观察阵发混沌的. 因此, 我们把注意力集中到 $A-\omega$ 平面上大片周期 3 附近.

图 3 是一幅比文献 [11] 中图 9 范围更大的 $A-\omega$ 相图. 这是参数空间中 $B = 1.2, \alpha = 0.05$ 的截面, 它反映了大量分频采样^[15]和部分功率谱分析的结果. 图中数字表示周期, 黑点代表混沌区, 嵌在混沌区中的高阶分岔序列和不同周期的混沌带的边界都没有标出. 我们仍沿用文献 [11] 中的记法, 以 nP 表示周期为 n 的轨道, 而以 nI 代表周期为 n 的混沌带. 在文献 [11] 中已经指出, $A-\omega$ 相图中从 $1I$ 到 $3P$ 不再经过任何分岔序列; 很可能两者之间有一个 $3I$ 的区域, 但很难与走向 $3P$ 的暂态过程相区分. 下面将说明, 这个看起来

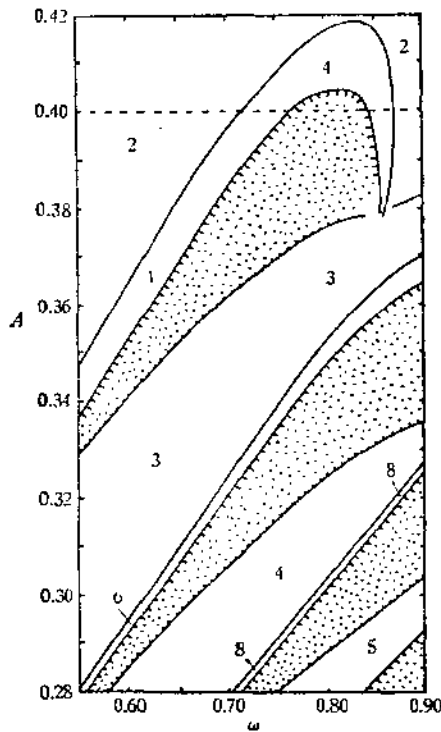


图 3 $A-\omega$ 相图 ($B = 1.2, \alpha = 0.05$)

▮ 为倍周期分岔序列; ▮ 为经阵发混沌到周期; | 为周期区边界

像 $3I$ 的狭窄区域, 就是出现阵发混沌的地带, 它是可以与暂态过程区别开的. 事实上, 图 3 中从左上角往右下角看, 由 $2P$ 开始的倍周期分岔序列进入混沌区, 再经过阵发混沌过渡到 $3P$; 以 $3P$ 为基础的倍周期分岔序列进入下一个混沌区, 再经过阵发混沌过渡到 $4P$ 区; 如此类推, 对 $4P, 5P \cdots$ 重复以上过程. 每个混沌区, 一面以倍周期分岔序列为边界, 另一面以阵发混沌为边界 (除去各种不同制度相会的小区域, 以后另行讨论).

四、主要结果

根据上面所述,我们首先在 $A-\omega$ 相图上从 $1P$ 到 $3P$ 的过渡区寻找阵发混沌现象. 图 4 和图 5 分别给出两组阵发混沌结果. 图 4 是沿 $A-\omega$ 相图中 $\omega = 0.75$, $B = 0.4$, $\alpha = 0.05$ 的直线, 七条 $y(t)$ 曲线自上而下对应 $A = 0.36997$; 0.36998 ; 0.36999 ; 0.37002 ; 0.37013 ; 0.37046 和 0.37150 . 图 5 是沿 $\omega = 0.80$, $B = 1.2$, $\alpha = 0.05$ 直线, 自上而下对应 0.37644 到 0.37650 , 间隔 0.00001 , 给出的是 $x(t)$ 曲线. 两个图中最上面的曲线, 除起始部分与暂态过程交迭外, 都对应周期 3, 而最下面的一条已经接近完全的混沌态. 由这些图可以测量出“层流”时间所占比例, 但对于什么状态应算作“层流”有一定的任意性. 我们约定, 凡连续振动五个周期以上, 幅度接近 $3P$ 者, 即看作“层流”. 这样测得最大层流时间 $\tau_{\max}$ 和“湍流”时间所占比例, 按下式拟合:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \tau_0(A - A_c)^{-p}, \\ r &= r_0(A - A_c)^q.\end{aligned}\quad (9)$$

靠有限的计算时间不能精确地定出从 $3P$ 到阵发混沌的转变点 A_c . 拟合结果稍稍依赖于 A_c 的选取. 例如, 沿 $\omega = 0.75$ 直线, 即由图 4 中的七条曲线得

$$A_c \quad 0.369974 \quad 0.369975 \quad 0.369976$$

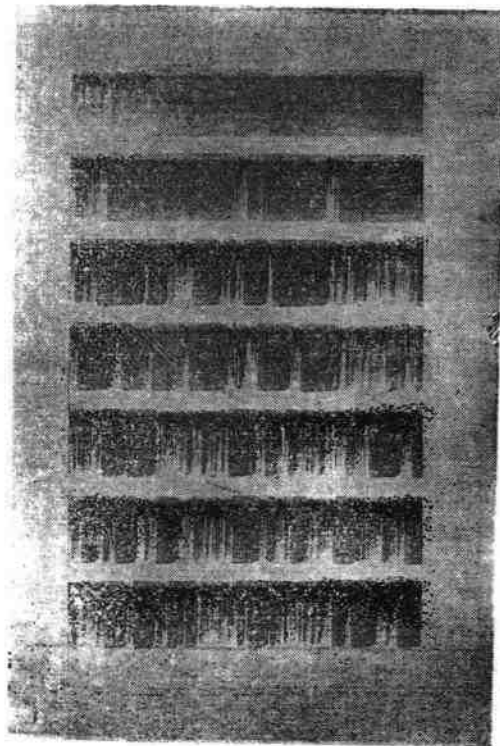


图 4

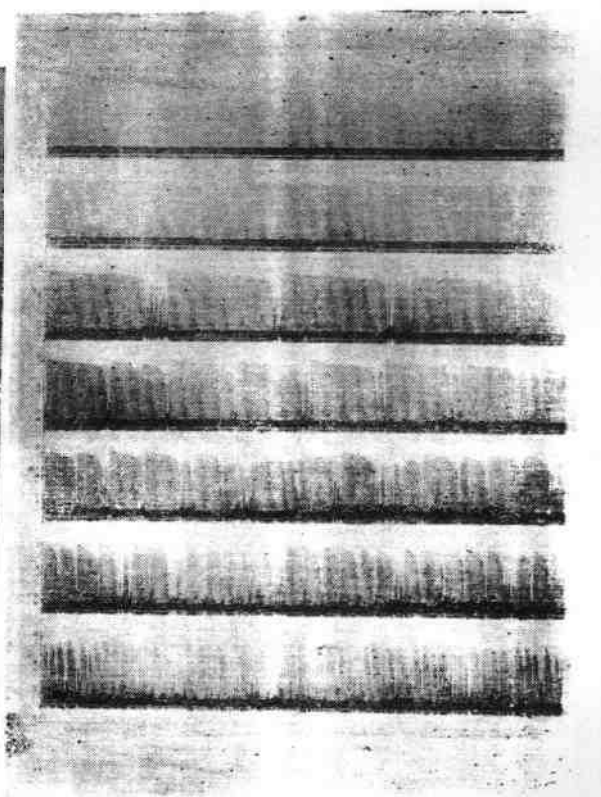


图 5

ν	0.516	0.502	0.486
β	0.562	0.552	0.559

此外, $\tau_{\max}$ 、特别是 ν 的数值在有限长的计算时间内(我们计算到 1236 个周期)也达不到较高精度。因此,应认为(9)式中 ν 和 β 两个指数的值均在 0.5 左右。

分频采样^[5]是辨认混沌带的有效手段,但须学会区分阵发式混沌和趋向周期轨道的暂态过程。图 6(b) 是对应图 5 中间那条曲线的分频采样图,即 $A = 0.37647$, $\omega = 0.8$ 的情形,而图 6(a) 对应 $A = 0.378$, $\omega = 0.8$, 即完全的混沌状态。为了回避暂态过程,这些图都是先舍去 160 个周期,然后每个周期采样一次,共采 256 点绘制的。图 5 最上面那条曲线, $A = 0.37644$, 对应 $3P$, 采样图中只有干干净净的三个点,这里没有给出。

趋向 $3P$ 的暂态过程采样图,与图 6(b) 有相像之处。但它含有周期 3, 因此只要改为每 $3T$ 采样一次(采样起点可以移动 0, 1, 2 个周期), 就能分别取出三个点列中的一个。阵发混沌对应的图 6(b) 不包含周期 3。改用 $3T$ 采样后, 图 7(a), (b), (c) 中每一张都仍然反映全部三个点列。然而三张图中, 轮流有一个点列的权重较小。我们目前还不能很好地解释这一现象(文献[7]图 3 也有类似现象, 那里讨论的是离散映象 $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$)。采样时间太短, 或长周期的 MSS 序列^[10](阵发混沌可以看作 $3P$ 之前长周期或无穷长周期的 MSS 序列, 在接近 $3P$ 切分岔处无穷长序列的测度趋近 1) 中采样点之间的关联, 都可能造成这种现象。

这样, 我们看到微分方程组(7)或(8)描述的系统, 其阵发混沌行为与一维映象很相像。这是因为耗散系统的相体积在演化过程中沿某些空间方向不断收缩, 结果 $t \rightarrow \infty$ 时的极限集合(所谓奇怪吸引子)在某些截面中看起来具有准一维的结构。图 6(a) 即为一例。原则上当然可以沿这个准一维结构引入距离参数, 用数值方法恢复相应的一维映象。这时应得到类似图 1 的曲线。然而, 这条曲线接近 45 度分角线的部分(有如图 2(b) 所

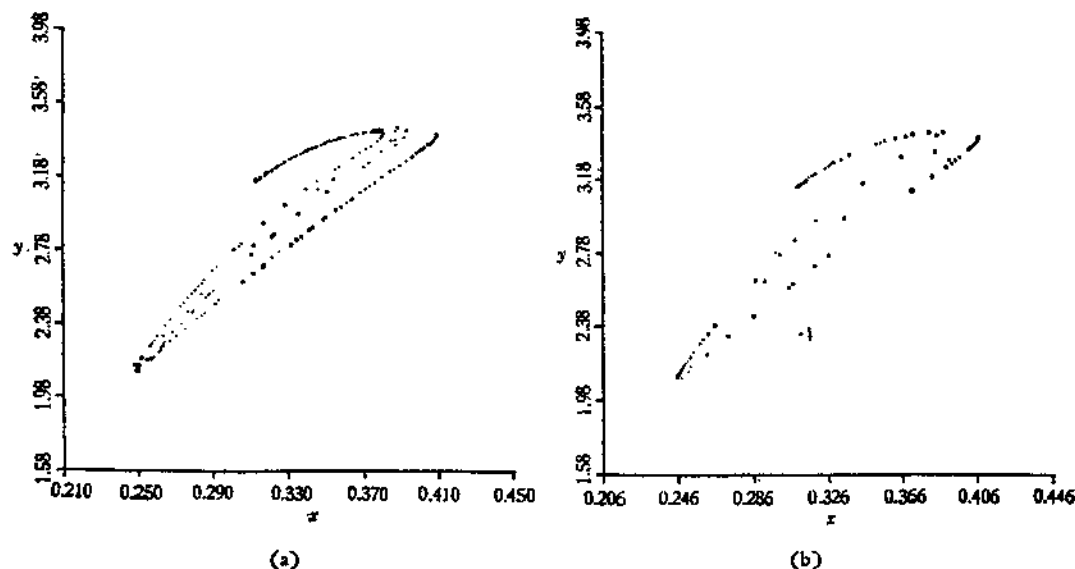


图 6 1T 采样图(256 点)

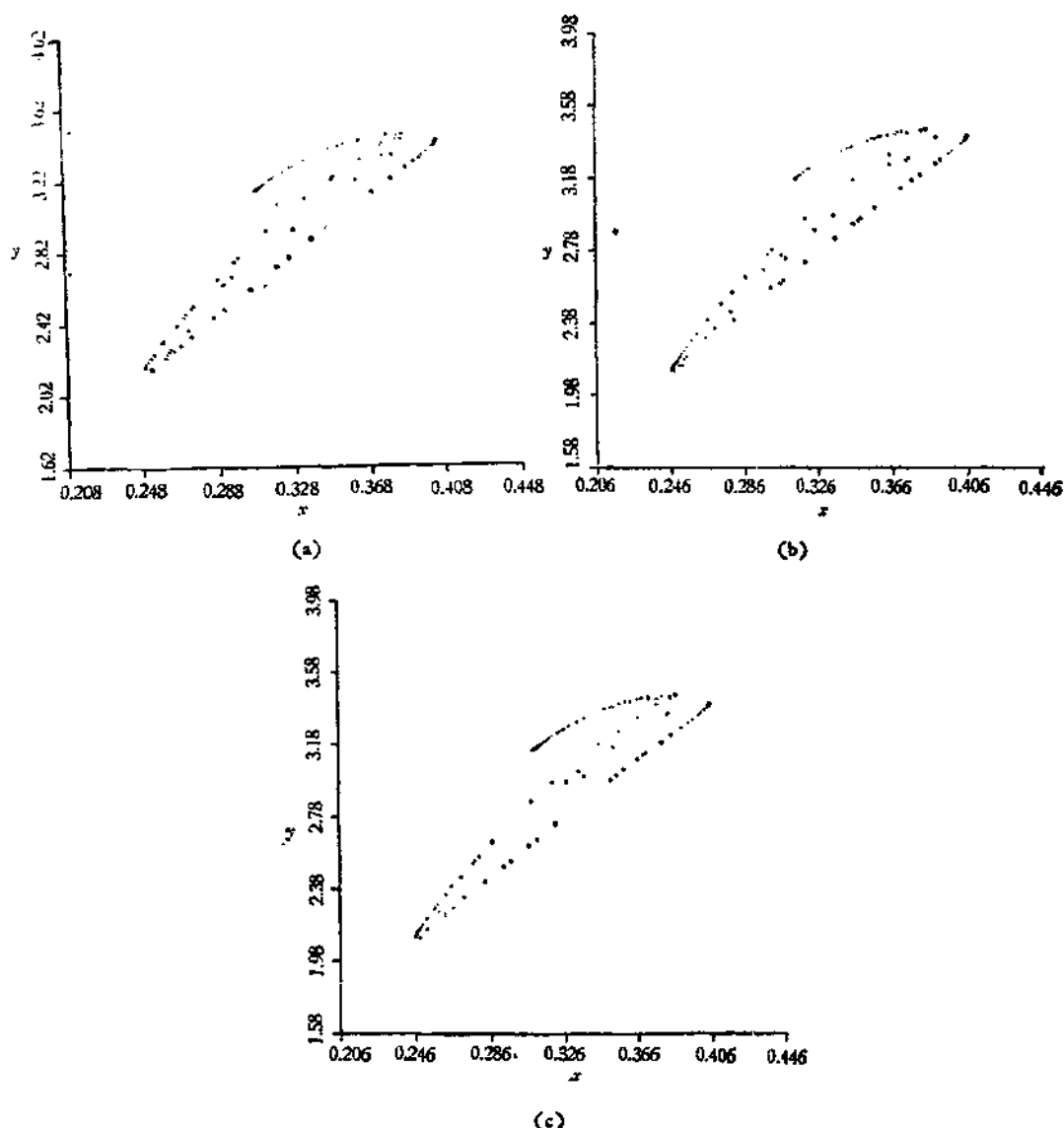


图7 3T采样图(256点) 参数同图6(b), 三张图采样起点各差一个周期

示), 可用更简单的办法得到。这就是取出 x_i (或 y_i) 的序列, 然后以 (x_i, x_{i+3}) 作为横纵坐标绘图。如果参数值正好对应 $3P$, 显然将得到位于分角线上的三个点。如果参数值对应图 2(b) 那样靠近不动点的“走廊”, 结果就如图 8 所示。这个图中画出了 (y_i, y_{i+3}) 的分布, 参数为 $A = 0.37650$, $B = 1.2$, $\alpha = 0.05$, $\omega = 0.80$, 即与图 5 最下面一条曲线对应。可以看出, 在三处靠近分角线的“走廊”处, 它很好地绘出了相应一维映象的轮廓。如果对于处于完全混沌区的参数值作类似的图, 其结果将是或多或少对称地分布在分角线两侧的点。这是识别阵发混沌的又一手段。

在 $1-\omega$ 相图(图 3) 中基本周期 $n = 4, 5, \dots$ 等切分岔序列开始处, 都先经过阵发混沌区。周期愈长, 振动形态愈复杂, 靠直接观察 $x(t), y(t)$ 曲线就更难于作出判断。这时分

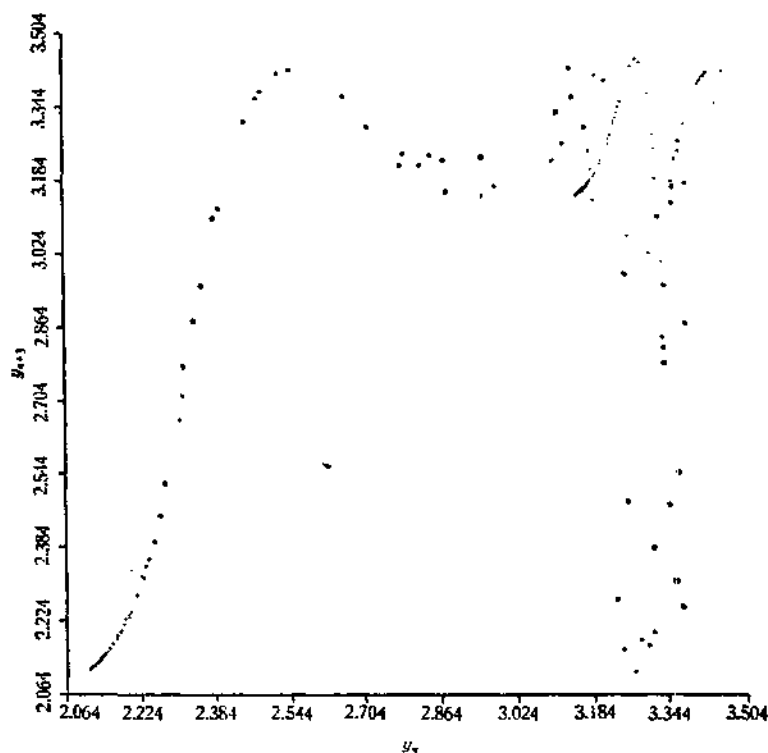
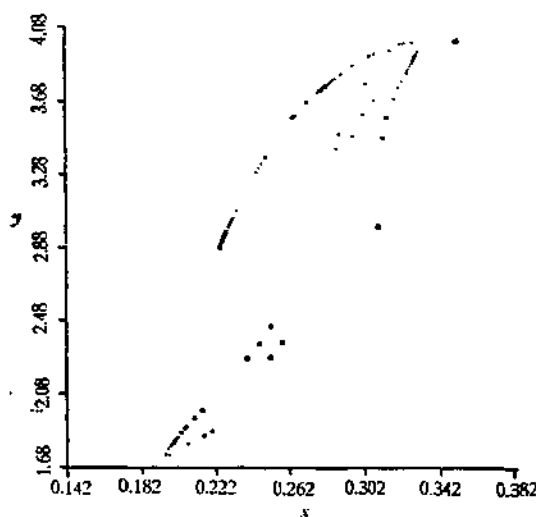
图 8 (y_n, y_{n+1}) 分布图

图 9

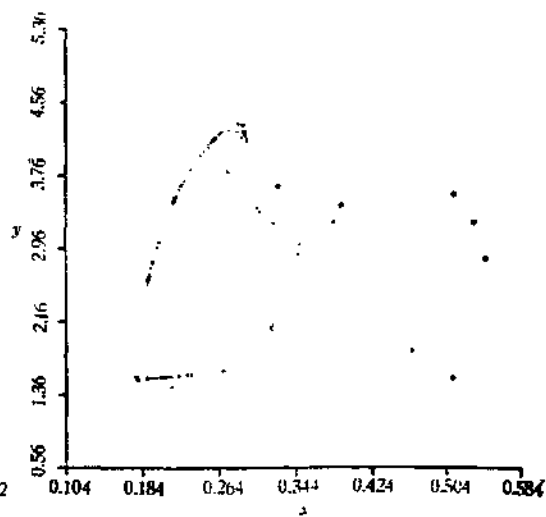


图 10

频采样和 (x_i, x_{i+n}) 映象成为更有效的手段。图 9 是 $A = 0.32$, $B = 1.2$, $\alpha = 0.05$, $\omega = 0.768$, 即 $4P$ 切分岔开始前混沌区的分频采样图。这是四张 $4T$ 采样图中的一张。四张图大同小异, 因此不包含周期 4, 不是经 $4P$ 过渡的暂态过程。图 10 是 $A = 0.29$, $B = 1.2$, $\alpha = 0.05$, $\omega = 0.804$, 即 $5P$ 开始前的五张 $5T$ 采样图之一。图 3 中各个区域

的性质就是用这种办法确定的。

五、讨 论

均匀系统时间演化行为中的阵发混沌已在化学反应^[17]和对流不稳定实验^[18]中观察到。计算机实验的结果则限于离散映象和 Lorenz 微分方程组^[4]。我们用直接观察时间行为^[12], 分频采样^[13]和 (x_i, x_{i+n}) 映象三种方法, 确定了强迫布鲁塞尔振子中存在着阵发混沌现象。同时说明在 $A-\omega$ 相图中的大片 $3P, 4P, 5P \cdots$ 区域, 与一维映象的切分岔相像, 其起始处出现阵发混沌的机制也是一样的。在这个意义上, 阵发混沌不是一条独立的走向混沌的道路, 它与倍周期分岔是孪生现象。任何已观察到倍周期分岔的系统中, 也应当发现阵发混沌。对于常微分方程描述的系统, 我们提供了除 Lorenz 模型外的另一个实例。

实际上过去研究微分方程的工作中, 已经多次见到阵发混沌, 但由于只采用 Poincaré 映象或分频采样, 而未直接考察时间行为, 因此未能识别这一现象。Pomeau 等人^[4]的贡献在于指出了阵发混沌与切分岔的关系。在文献 [4] 中曾经提到, 文献 [19] 中列为“在原有不稳定点附近扩散”的 Poincaré 映象(该文图 4(b)), 其实是阵发混沌的表现。Franceschini 和 Tebaldi^[20] 研究五个模的截断流体力学方程时发现, 当里亚彭诺夫矩阵有一个本征值经过 +1 穿出单位圆时, Poincaré 映象中出现长度不趋近于零的线段(见文献 [20] 中图 4)。我们曾见到难于和 $3P$ 暂态过程区分的 $3I$ 采样图^[11]。从本文结果回顾这些报道, 都是反映了阵发混沌行为。

参 考 文 献

- [1] G. Nicolis, I. Prigogine, *Self-organization in Nonequilibrium Systems*, Wiley, (1977); 方福康、刘若庄, 统计物理学进展, 科学出版社, 第七章 (1981)。
- [2] E. Ott, *Rev. Mod. Phys.*, 53(1981), 655; 郝柏林, 全国统计物理和凝聚态理论学术会议综述报告汇编, 华中工学院出版社, 1982 (将出版); H. Haken (ed.), *Chaos and Order in Nature*, Springer, (1981)。
- [3] A. C. Mohuh, *YQZ*, 125(1978), 97; G. Iooss, W. F. Langford, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 357(1980), 489; J.-P. Eckmann, *Rev. Mod. Phys.*, 53(1981), 643。
- [4] P. Manneville, Y. Pomeau, *Phys. Lett. A*, 75(1979), 1; *Commun. Math. Phys.*, 74(1980), 189。
- [5] G. Mayer-Kress, H. Haken, *Phys. Lett. A*, 82(1981), 151; *J. Stat. Phys.*, 26(1981), 149。
- [6] J.-P. Eckmann, L. Thomas, P. Wittwer, *J. Phys. A*, 14(1981), 3153。
- [7] J. E. Hirsch, B. A. Huberman, D. J. Scalapino, *Phys. Rev. A*, 25(1982), 519。
- [8] J. E. Hirsch, M. Nauenberg, D. J. Scalapino, *Phys. Lett. A*, 87(1982), 391。
- [9] B. Hu, J. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.*, 48(1982), 1645。
- [10] B.-L. Hao (郝柏林), S.-Y. Zhang (张淑馨), *Commun. Theor. Phys.*, 1(1982), 111。
- [11] B.-L. Hao (郝柏林), S.-Y. Zhang (张淑馨), *J. Stat. Phys.*, 28(1982), 待出版。
- [12] 王光瑞, 物理学报, 待发表。
- [13] D. J. Tritton, *Physical Fluid Mechanics*, Van-Norstand, (1977), p. 265。
- [14] K. Tomita, T. Kai, *J. Stat. Phys.*, 21(1979), 65; T. Kai, *Phys. Lett. A*, 86(1981), 263。
- [15] B.-L. Hao (郝柏林), S.-Y. Zhang (张淑馨), *Phys. Lett. A*, 87(1982), 267; 物理学报, 32(1983), 198。
- [16] N. Metropolis, M. L. Stein, P. R. Stein, *J. Combinatorial Theory*, 15(1973), 25。
- [17] Y. Pomeau, J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, C. Vidal, *J. de Phys. Lett.*, 42(1981), 271。

- [18] P. Berge, M. Dubois, P. Manneville, Y. Pomeau, *J. de Phys. Lett.*, 41(1980), 341.
[19] N. Morioka, T. Shimizu, *Phys. Lett. A*, 66(1978), 447.
[20] V. Franceschini, C. Tebaldi, *J. Stat. Phys.*, 21(1979), 707.

INTERMITTENT CHAOS IN THE FORCED BRUSSELATOR

WANG GUANG-RUI

CHEN SHI-GANG

(P. O. Box 8009, Beijing)

(Institute of Physics, Academia Sinica)

HAO BAI-LIN

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

We show numerically that in the model of trimolecular reaction under external periodic force (the forced Brusselator) there exists the intermittent route to chaos. The time development of intermittent chaos and the method to distinguish intermittency from transients are studied. The large region of period 3 in the parameter space, discovered previously in the forced Brusselator, as well as smaller regions of periods 4, 5, 6 ... etc., correspond to tangent bifurcations in one-dimensional mappings. Intermittency appears just before the start of every tangent bifurcation. Therefore, the period-doubling and the intermittent routes to chaos are "twin" phenomena and they should be observable in many other systems described by nonlinear differential equations.