概率统计复习参考

南京航空航天大学应用数学教研室编

二〇〇〇年三月

概率统计复习参考

南京航空航天大学应用数学教研室编

二〇〇〇年三月

编 者 说 明

本书重点总结了概率论与数理统计的基本概念、基本理论，并给出各种类型的例题，可作为本科学生学习《概率论与数理统计》课程的复习辅导参考材料。本书各章末的习题可供学习有余力的学生或准备考研的读者使用。

本书第一、二章及附录Ⅰ由叶尔骅老师编写，第三、四、五章由杨纪龙老师编写，第六、七、八、九章由顾玉娣老师编写。由于编写时间匆促，同时水平有限，本材料难免有不当之处，恳请读者指正。

编者

2000 年 3 月 4 日

目　录

第一章　概率论基本概念

内容提要

1.1　事件概念

1.1.1　随机试验的每个可能结果，称为**随机事件**，简称**事件**，常用英文字母 A、B、C 等表示。

1.1.2　随机试验的每个可能直接出现的结果，是最简单，不能再分解的事件，称为**基本事件**或**样本点**，记为 ω 或 e。

样本点 ω 全体组成一集合，叫**样本空间**，记为 Ω 或 S，即 $\Omega=\{\omega\}$或 $S=\{e\}$。

1.1.3　事件的集合表示

设有随机试验 E，相应的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$。事件 A 可定义为 Ω 的某个子集，它是由导致 A 发生的样本点 ω 全体所组成的一个集合，即

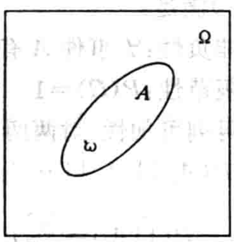
$A\triangleq\{\omega$：试验若出现 ω，则 A 发生$\}$

显然

$A\subset\Omega$（即 A 为 Ω 的子集）

A 发生$\Leftrightarrow$有一个且仅有一个 ω 发生，$\omega\in A$

样本空间 Ω 为**必然事件**，空集$\varnothing$为**不可能事件**。



1.2　事件间的关系及运算

设有随机试验 E，相应的样本空间为 Ω，A，B 等是 Ω 的子集（事件）。

1.2.1　包含：若事件 A 发生$\Rightarrow$事件 B 发生，称 B **包含** A 或 A **包含于** B 中，记为 $A\subset B$ 或 $B\subset A$。

易知，对任何事件 A 有 $A\subset\Omega$，$\varnothing\subset A$。

1.2.2　相等：若事件 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$。

1.2.3　和（并）："事件 A 与 B 至少有一个发生"是事件，称为 A 与 B 的**和**，记为 $A\cup B$。"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"是事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生"是事件，称为 $A_1,A_2,\cdots$的和，记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

1.2.4　交（积）："事件 A，B 同时发生"是事件，称为 A 与 B 的**交**（或**积**），记为 $A\cap B$ 或 AB。"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"是事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生"是事件，称为 $A_1,A_2,\cdots$ 的交，记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

1.2.5 差："事件 A 发生但事件 B 不发生"是事件，称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$。

1.2.6 对立事件(逆事件)："事件 A 不发生"是事件，称为 A 的**对立事件**，记为 $\overline{A}$。

易知 $$\begin{cases} A\overline{A} = \varnothing \\ A \cup \overline{A} = \Omega \end{cases} \Longleftrightarrow \overline{A} = \Omega - A \text{(称为 } A \text{ 的余集或补集)}$$

1.2.7 事件的运算与集合的运算一致。必然事件、不可能事件、事件分别相当于全空间、空集、全空间的某个子集。由集的运算性质可推知相应的事件运算性质，如事件的和(交)满足交换律、结合律、事件和(交)对交(和)满足分配律，事件运算中的对偶原理等(详见附录 I,A)

1.3 概率及其性质

1.3.1 概率的定义

设试验 E，样本空间 Ω，对每个事件 A，通过对应规划 P，有一实数 $P(A)$ 与之对应，如集函数 $P(\cdot)$ 满足：

(1) 非负性：$\forall$ 事件 A 有 $P(A)\geqslant 0$

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$

(3) 可列可加性：对两两互不相容事件 $A_i,i=1,2,\cdots$ 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$$

[或写成 $\quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),A_iA_j=\varnothing,i\neq j$]

则称 P 为**概率**，$P(A)$ 为事件 A(发生)的概率。

1.3.2 概率的基本性质

(1) $P(\varnothing)=0$

(2) 有限可加性：设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容(即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$)

则 $$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) 逆事件公式：$P(\overline{A})=1-P(A),P(A)=1-P(\overline{A})$。

(4) 减法及单调性：如 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B),P(B)\leqslant P(A)$。

注(i)对任何事件 A，因 $A\subset\Omega$，故 $P(A)\leqslant P(\Omega)=1$。

(ii)若无条件"$B\subset A$"，一般 $P(A-B)\neq P(A)-P(B)$。但因

$$A - B = A - AB, AB \subset A$$

故 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$(这是一般的减法公式)。

(5) 加法公式：设 A,B 为任意事件，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB), P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B) \text{(次可加性)}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

$$P(A \cup B \cup C) \leqslant P(A) + P(B) + P(C) \text{(次可加性)}$$

一般

$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$

$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$（次可加性）

1.4 古典概型

1.4.1 古典概型定义：如果一个随机现象或随机试验满足：

(1) 样本空间的元素只有有限个，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) 每个样本点发生的可能性相同，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\});$$

称此随机现象或随机试验为**古典概型**。

1.4.2 古典概型中，事件的概率计算：设

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\},A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$$

则 $P(A)=\dfrac{A\text{ 中包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中包含的样本点总数}}=\dfrac{m}{n}$（公式）。

1.5 条件概率

1.5.1 条件概率

若 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率，简称 B 关于 A 的**条件概率**。

$P(B|A)P(A)=P(AB)$

注 条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率。

1.5.2 乘法公式

设 $P(A)>0,P(B)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$

设 $P(AB)>0$，则 $P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$

设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

还可得带条件的乘法公式：

$P(ABC|D)=P(A|D)P(B|AD)P(C|ABD)$（设 $P(ABD)>0$）

$P(A_1A_2\cdots A_n|D)=P(A_1|D)P(A_2|A_1D)P(A_3|A_1A_2D)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}D)$

（设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}D)>0$）

1.5.3 全概率公式

设有随机试验 E，样本空间 Ω

(1) 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件，若

$(i)B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$，

$(ii)\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，

称 $\{B_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 Ω 的一个划分。

(2) 全概率公式：设 $\{B_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，A 为 E 的任一事件，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

还可得关于条件概率的全概公式：

$$P(A|C)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i|C)P(A|B_iC)(设\ P(B_iC)>0,i=1,2,\cdots,n)$$

注 若 $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，$B_iB_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则仍有全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

1.5.4 贝叶斯(Bayes)公式

设有随机试验 E，样本空间 Ω，事件 A，划分$\{B_i,1\leqslant i\leqslant n\}$，$P(A)>0$，$P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

1.6 事件的独立性

1.6.1 两个事件的独立性

若 $P(AB)=P(A)P(B)$，称事件 A,B **相互独立**，简称**独立**。

1.6.2 三个事件的独立性

若 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，称事件 A,B,C 相互独立。

1.6.3 n 个事件的独立性($n\geqslant2$)

若对任意 $k(1<k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

若对任意 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant n$ 有 $P(A_{i_1}A_{i_2})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})$，称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **两两独立**。

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立一定两两独立，但两两独立不一定相互独立。

1.6.4 相互独立事件的几个性质

(1) 若 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立。$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立。

(2) 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则

A,B 相互独立$\Longleftrightarrow P(B|A)=P(B)\Longleftrightarrow P(A|B)=P(A)$

(3) 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则“A,B 独立”与“A,B 互不相容”不能同时成立。

(4) 设 A,B,C 相互独立，则

(i)$A\cup B$ 与 C 独立；AB 与 C 独立；$A-B$ 与 C 独立。

(ii)$\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}$ 也相互独立，其中 $\widetilde{A}=A$ 或 $\overline{A}$，$\widetilde{B}=B$ 或 $\overline{B}$，$\widetilde{C}=C$ 或 $\overline{C}$。

注 这个性质可推广到 n 个相互独立事件场合。

(5) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i)$$

1.7 几何概型

设随机试验的样本空间 Ω 是某个区域，试验的各个可能结果是 Ω 中的各个点，并且这些点在 Ω 中的位置是等可能的，若某个事件可用 Ω 的子集 A 来表示，则该事件的概率定义为

$$p=\frac{S_A}{S_\Omega}$$

其中，S_A，S_Ω 分别表示 A，Ω 的度量（如长度、面积、体积等）。

例题

例 1.1　证明　$P(A_i)=0,i=1,2,\cdots,n\Longleftrightarrow P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=0$

证　若 $P(A_i)=0,i=1,2,\cdots,n$，则由概率的次可加性及非负性得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=0,\text{即 }P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=0$$

反之，若 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=0$，则对每个 $i(i=1,2,\cdots,n)$，因

$$A_i\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

故由概率的单调性及非负性得

$$P(A_i)\leqslant P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=0,\text{即 }P(A_i)=0(i=1,2,\cdots,n)\text{，证毕。}$$

注　如 $P(A)=0$ 不一定有 $A=\varnothing$。

例 1.2　证明　$P(B_i)=1,i=1,2,\cdots,n\Longleftrightarrow P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i)=1$。

证　由例 1、逆事件概率公式以及对偶原理得

$P(B_i)=1,i=1,2,\cdots,n\Longleftrightarrow P(\overline{B}_i)=0,i=1,2,\cdots,n\Longleftrightarrow P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{B}_i)=0\Longleftrightarrow P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i)=1$，证毕。

注　如 $P(B)=1$ 不一定有 $B=\Omega$。

例 1.3　设 $\{B_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为一个划分，A,C 为事件，$P(B_iC)>0,i=1,2,\cdots,n$，证明：

$$P(A|C)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i|C)P(A|B_iC)$$

证法一　因条件概率 $P(\cdot|C)$ 为概率，故由概率可加性得

$$P(A|C)=P[(\bigcup_{i=1}^{n}B_iA)|C]=\sum_{i=1}^{n}P(B_iA|C)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i|C)P(A|B_iC)$$

证法二　$P(A|C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}=\dfrac{1}{P(C)}\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_iAC)=\dfrac{1}{P(C)}\sum\limits_{i=1}^{n}P(C)P(B_i|C)P(A|B_iC)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i|C)P(A|B_iC)$.

例 1.4　证明　事件 A 与任一事件 B 独立的充要条件为 $P(A)=1$ 或 0。

证　若 A 与任一事件 B 独立，则有 $P(AB)=P(A)P(B)$，取 $B=A$ 得

$$P(A)=[P(A)]^2,P(A)[1-P(A)]=0,\therefore P(A)=1\text{ 或 }0\text{。}$$

反之若 $P(A)=0$，B 为任一事件，则 $P(AB)\leqslant P(A)=0$，$\therefore P(AB)=0=P(A)P(B)$，即 A,B 独立。

若 $P(A)=1$，B 为任一事件，因 $P(\overline{A})=0$，故 $P(\overline{A}B)=0$，

$\therefore$ $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=P(B)=P(A)P(B)$，即 A,B 独立，证毕。

例 1.5 将 n 个球随机地放入 n 个盒中，记事件

A=“每个盒中恰有一个球”，B=“恰有一个空盒”，

试求：$P(A)$，$P(B)$

解 求解古典概型时，计算样本点数需要用到排列组合知识。

由附录 I，B 中例 1 知，样本点总数为 n^n 个。A 中的每个样本点可看作 n 个球的一个排列，共有 $n!$ 个，故

$$P(A)=\frac{n!}{n^n}$$

由附录 I，B 中例 6 知，B 中样本点共有 $C_n^1C_{n-1}^1C_n^2(n-2)!=C_n^2n!$ 个，故

$$P(B)=\frac{C_n^2n!}{n^n}$$

注(1) 例中“随机地”与“任意地”、“等可能地”含意相同。

(2)假定球可辨，每个盒子容纳的球数不限，以下类似问题，都作这样假定。

例 1.6 将 r 个球随机地放入 n 个盒中，求：一个指定的盒中恰有 k 个球的概率($k\leqslant r$)。

解 记事件 A=“一个指定的盒中恰有 k 个球”。

由附录 I，B 中例 1 知，样本点总数为 n^r 个。事件 A 中的样本点可看作“从 r 个球中任取 k 个放入指定的一个盒中”且“将剩下的 $r-k$ 个球放入剩下的 $n-1$ 个盒中”的结果，共有 $C_r^k(n-1)^{r-k}$个，故

$$P(A)=\frac{C_r^k(n-1)^{r-k}}{n^r}=C_r^k\frac{1}{n^k}(1-\frac{1}{n})^{r-k}$$

例 1.7 在 $0,1,2,\cdots,9$ 中任取 4 个排成一行，求排成四位偶数的概率。

解 记事件 A=“排成四位偶数”。

样本点总数为 A_{10}^4个，由附录 I，B 中例 5 知，A 中样本点共有 $A_9^3+4(A_9^3-A_8^2)=5A_9^3-4A_8^2$ 个。

所以 $P(A)=\dfrac{5A_9^3-4A_8^2}{A_{10}^4}=\dfrac{41}{90}$

例 1.8 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

这个题有多种解法，记事件 A=“至少配成一双”

解法一 求逆事件的概率较简便。从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，相当于从 10 只不同的鞋子中任取 4 只，由于只关心鞋子是否配成双，故是组合问题，共有样本点 C_{10}^4个。事件 $\overline{A}$ 表示所取出的 4 只鞋子中任何两只都不配对。这相当于从 5 双中选定 4 双，再从这 4 双中的每一双任取 1 只，故由乘法原理知，$\overline{A}$ 含有样本点 $C_5^42^4$ 个，所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^42^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法二 事件 A 表示在取出的 4 只鞋子中，或者“恰好配成 1 双”，或者“配成 2 双”。

“恰好配成 1 双”相当于从 5 双中取出 1 双，再从剩下的 4 双中选定 2 双并对其中每一双任取 1 只，共有 $C_5^1C_4^2 2^2$ 种取法。“配成 2 双”相当于从 5 双中取出 2 双，共有 C_5^2 种取法。故由加法、乘法原理知，A 中共有样本点 $C_5^1C_4^2 2^2+C_5^2$ 个。所以

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2 2^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法三 这个解法有错误。有人认为，事件 A 相当于从 5 双中任取 1 双，再在剩下的 8 只鞋子中任取 2 只，共有样本点 $C_5^1C_8^2$ 个，所以

$$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2}{C_{10}^4}=\frac{14}{21}$$

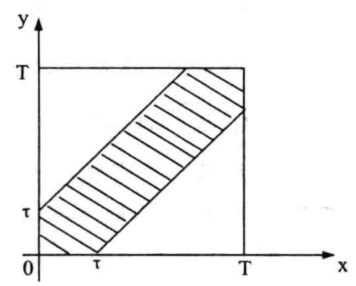
这个结果与前面不同，错在哪里呢？究其原因，发现错在计算 A 中样本点数时，把重复的样本点也算进去了。

为了说明这个问题，不妨记这 5 双鞋为$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_5,b_5)$，其中 a_i,b_i 表示第 i 双鞋的左右两只鞋$(i=1,2,\cdots,5)$。按照解法三的理解，在计算 A 中样本点数时，对形如$(a_i,b_i,a_j,b_j)(i,j=1,2,3,4,5,i\neq j)$的样本点作了重复计数。这种重复的样本点共有 C_5^2 个，所以本解法正确的计算是

$$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

例 1.9 在时间区间$[0,T](T>0)$内的任何时刻，两信号等可能地进入收音机。如果这两个信号的间隔时间小于 τ，则收音机受到干扰，试求收音机受到干扰的概率。

解 这是一个几何概型问题。设 x,y 分别为两个信号进入收音机的时刻，则 x,y 的值构成样本空间 $\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T\}$，事件“收音机受到干扰”构成区域 $A=\{(x,y):|x-y|\leqslant\tau\}=\{(x,y):x-\tau\leqslant y\leqslant x+\tau\}$（图中阴影部分），$\Omega$ 的面积为 $S_\Omega=T^2$，A 的面积为 $S_A=T^2-(T-\tau)^2$，故“收音机受到干扰”的概率为



$$p=\frac{S_A}{S_\Omega}=1-(1-\frac{\tau}{T})^2$$

例 1.10 三个人依次掷一硬币，先出现正面者获胜，求各人获胜的概率。

解 设三人为甲、乙、丙，掷硬币次序为：先甲，然后乙，最后丙；再循环下去。记事件 $A=$“甲获胜”，$B=$“乙获胜”，$C=$“丙获胜”，则事件 A 可表为互不相容事件“正”，“反反反正”，“反反反反反反正”，$\cdots$之和（注：“正”表示第 1 次甲掷出现正面；“反反反正”表示第 1，2，3 次依次由甲，乙，丙掷均出现反面，第 4 次甲掷出现正面；其余类似理解）。事件 B 可表为互不相容事件“反正”，“反反反反正”，“反反反反反反反正”，$\cdots$之和。事件 C 可表为互不相容事件“反反正”，“反反反反反正”，“反反反反反反反反正”，$\cdots$之和。故由概率可加性得

$$P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\cdots=\frac{4}{7}$$

$$P(B)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\cdots=\frac{2}{7}$$

$$P(C)=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{1}{7}$$

例 1.11 已知在 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取两次，每次任取一只，作不放回按序抽样。求下列事件的概率：

(1) 两只都是正品　　　　　　(2) 两只都是次品

(3) 一只是正品，一只是次品　(4) 第二次取出的是次品

解法一 用古典概型计算

(1) $P(\text{两只正品})=\dfrac{8\times 7}{10\times 9}=\dfrac{28}{45}$

(2) $P(\text{两只次品})=\dfrac{2\times 1}{10\times 9}=\dfrac{1}{45}$

(3) $P(\text{一正一次})=\dfrac{8\times 2+2\times 8}{10\times 9}=\dfrac{16}{45}$

(4) $P(\text{第二次取出次品})=\dfrac{8\times 2+2\times 1}{10\times 9}=\dfrac{1}{5}$

注　从题意看，考虑了抽样次序，故在计算样本点数目时用了排列。

解法二 用乘法公式与条件概率计算

设事件 A_i=“第 i 次取出次品”，$i=1,2$

(1) $P(\text{两只正品})=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\dfrac{8}{10}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{28}{45}$

(2) $P(\text{两只次品})=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{45}$

(3) $P(\text{一正一次})=P(\overline{A}_1A_2\cup A_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1A_2)+P(A_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)+P(A_1)P(\overline{A}_2|A_1)=\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{10}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{16}{45}$

(4) $P(\text{第二次取出次品})=P(A_2)=P(A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{5}$

例 1.12 盒中有 $n+m$ 个球，其中有 n 个白球，m 个黑球，$m\geqslant n$。今连续抽取 n 次，每次抽取两个球，且取后不放回，求每次取出的球为不同颜色的概率。

解 设事件 A=“每次取出的球为不同颜色”，

A_i=“第 i 次取出的球为不同颜色”，$i=1,2,\cdots,n$

则 $A=A_1A_2\cdots A_n$，由乘法公式得

$$P(A)=P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$
$$=\frac{C_n^1C_m^1}{C_{n+m}^2}\cdot\frac{C_{n-1}^1C_{m-1}^1}{C_{m+n-2}^2}\cdots\frac{C_1^1C_{m-(n-1)}^1}{C_{m+n-2(n-1)}^2}=\frac{2^n n!\,m!}{(m+n)!}$$

例 1.13 有两箱同种类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。试求(1)第一次取到的零件是一等品的概率。(2)已知第一次取到的零件是一等品，第二次取到的也是一等品的概率。

解 设事件 A_i=“第 i 次取到一等品”，B_i=“零件来自第 i 箱”，$i=1,2$，则$\{B_i\}$是一个划分。要求 $P(A_1)$，$P(A_2|A_1)$。

(1) 由题意，$P(B_1)=P(B_2)=\dfrac{1}{2}$，

$$P(A_1|B_1)=\frac{10}{50},\ P(A_1|B_2)=\frac{18}{30}$$

故由全概公式

$$P(A_1) = \sum_{i=1}^{2} P(B_i)P(A_1|B_i) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{50} + \frac{1}{2} \times \frac{18}{30} = 0.4$$

$$(2)\ P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{1}{P(A_1)} \sum_{i=1}^{2} P(B_i)P(A_1A_2|B_i)$$

$$= \frac{1}{0.4}\left(\frac{1}{2} \times \frac{10 \times 9}{50 \times 49} + \frac{1}{2} \times \frac{18 \times 17}{30 \times 29}\right) = 0.4856$$

例 1.14 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，每人射击一次，三人击中的概率分别为 0.4，0.5，0.7。飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2，被两人击中而被击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落，求飞机被击落的概率。 B_i 击中 i 次.

解 设事件 A="飞机被击落"，

$P(B_1)=$

B_i="击中飞机 i 次"，$i=0,1,2,3$，则$\{B_i\}$为划分，

C_1="甲击中飞机"，C_2="乙击中飞机"，C_2="丙击中飞机"，

则 C_1,C_2,C_3 相互独立（注：$\{C_i\}$不是划分）。

由全概公式

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(B_i)P(A|B_i)$$

由题意，$P(A|B_0)=0$，$P(A|B_1)=0.2$，$P(A|B_2)=0.6$，$P(A|B_3)=1$，$P(C_1)=0.4$，$P(C_2)=0.5$，$P(C_3)=0.7$

$P(B_1)=P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3 \cup \overline{C}_1C_2\overline{C}_3 \cup \overline{C}_1\overline{C}_2C_3)=P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1C_2\overline{C}_3)+P(\overline{C}_1\overline{C}_2C_3)$（注：$C_1\overline{C}_2\overline{C}_3$，$\overline{C}_1C_2\overline{C}_3$，$\overline{C}_1\overline{C}_2C_3$ 是试验的基本事件，两两互不相容）

$$=P(C_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3) + P(\overline{C}_1)P(C_2)P(\overline{C}_3) + P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)$$

$$=0.4(1-0.5)(1-0.7) + (1-0.4)0.5(1-0.7) + (1-0.4)(1-0.5)0.7$$

$$=0.36$$

$$P(B_2) = P(C_1C_2\overline{C}_3 \cup C_1\overline{C}_2C_3 \cup \overline{C}_1C_2C_3)$$

$$=0.4 \times 0.5(1-0.7) + 0.4(1-0.5)0.7 + (1-0.4) \times 0.5 \times 0.7 = 0.41$$

$$P(B_3) = P(C_1C_2C_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14$$

所以

$$P(A) = 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.41 \times 1 = 0.458$$

例 1.15 一随机点落在区域 S 内的任意一点是等可能，区域 S 分为 4 个部分，它们各占区域的 50%，30%，12%及 8%。当随机点落在这 4 个部分中事件 A 出现的概率相应地为 0.01，0.05，0.2 及 0.5。若已知在实验中事件 A 出现，试问随机点落在 S 中的哪一个部分的可能性最大？

B_i $P(A|B_1)=0.01$ $P(A|B_2)=0.05$.

解 设 B_i="随机点落在第 i 个部分"，$i=1,2,3,4$，则$\{B_i\}$为划分。

$P(B_1)=0.5$，$P(B_2)=0.3$，$P(B_3)=0.12$，$P(B_4)=0.08$，$P(A|B_1)=0.01$，$P(A|B_2)=0.05$，$P(A|B_3)=0.2$，$P(A|B_4)=0.5$.

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum P(A|B_i)P(B_i)}$$

由全概公式

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A|B_i) = 0.5 \times 0.01 + 0.3 \times 0.05 + 0.12 \times 0.2 + 0.08 \times 05 = 0.084$$

由 Bayes 公式

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.5\times 0.01}{0.084}=0.059,$$
$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.3\times 0.05}{0.084}=0.178,$$
$$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{0.12\times 0.2}{0.084}=0.286,$$
$$P(B_4|A)=\frac{P(B_4)P(A|B_4)}{P(A)}=\frac{0.08\times 0.5}{0.084}=0.476.$$

可见，随机点落在区域 S 的第 4 部分的可能性最大。

习题

1. 设 A、B 为事件，$P(A)=a$，$P(B)=b$，若

(1) A，B 互不相容

(2) A，B 独立

试求：$P(A\cup\overline{B})$，$P(A\overline{B})$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})$，$P(\overline{A}\ \overline{B})$.

2. 设 A，B，C 为事件，填空：

(1) 设 $P(A)=0.6$，$P(A-B)=0.2$，则 $P(\overline{AB})=$__________。

(2)设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，则 $P(A\overline{B})=$__________。

(3) 设 $P(AB)=P(\overline{A}\ \overline{B})$，$P(A)=a$，则 $P(B)=$__________。

(4) 设 $P(A)=a$，$P(A\cup B)=b(0<a<b<1)$，若 A，B 相互独立，则 $P(B)=$__________，$P(\overline{A}|B)=$__________，$P(A-B)=$__________。若 A，B 互不相容，则 $P(A|\overline{B})=$__________。

(5) 设 $P(B)>0$，$P(C)>0$，$P(A|C)=1$，则 $P(\overline{A}C)=$__________，$P(C|B)-P(AC|B)=$__________。

3. 设 A，B，C，D 为事件，证明：

(1) 若 $AB\subset C$，则 $P(A)+P(B)-P(C)\leqslant 1$。

(2) 若 $ABC\subset D$，则 $P(A)+P(B)+P(C)-P(D)\leqslant 2$。

(3) 若 $P(A)=a$，$P(B)=b(b\neq 0)$，则 $P(A|B)\geqslant\dfrac{a+b-1}{b}$。

(4) 若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，$P(A|B)>P(A)$，则 $P(B|A)>P(B)$。

(5) 若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A|B)=P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则 A，B 独立。

4. 已知 $P(AB)=P(A)P(B)$，$C\supset AB$，$\overline{C}\supset\overline{A}\ \overline{B}$，证明：$P(AC)\geqslant P(A)P(C)$。

5. 将字母 a，b，c，d 排成一行，记事件 A="a 在 b 左边"，B="c 在 d 左边"，证明：A，B 独立。

6. 把 1，2，3，4，5 诸数各写在一小纸片上，任取其三而排成自左向右的次序，求所得三位数是偶数的概率。

7. 在相应地写有 2，4，6，7，8，11，12 及 13 数字的八张相同的卡片中，任意取出两张。求由所取得的两个数构成的分数为可约的概率。

8. 为减少由 $2n$ 个运动代表队参加的比赛总次数，将其分成两组。求两个最强队被划在(1)不同组内；(2)一个组内的概率。

9. 一块各面均涂有油漆的正方体被锯成 1000 个同样大的小正方体。将这些小正方体均匀地搅混在一起。试求任意取出的一个小正方体只有两面涂有油漆的概率。

10. 有五条线段，其长度分别为 1，3，5，7，9 个单位。求从这五条线段中任意取出三条能构成三角形的概率。

11. 将 n 个球随机地放入 N 个盒子中($n\leqslant N$)，试求下列各事件的概率：

A：某指定 n 个盒中各有一个球；

B：恰有 n 个盒，其中各有一个球；

C：某指定盒中恰有 m 个球($m\leqslant n$)。

12. 有 k 个盒子，每一个装有 n 个球，分别编有 1 至 n 的号码。今从每个盒子中取出一个球，问 m 是所取的球中的最大号码的概率为多少？

13. 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r$ 只($2r<n$)。求下列事件的概率：(1) 没有成对的鞋子；(2) 只有一对鞋子；(3) 恰有两对鞋子；(4) 有 r 对鞋子。

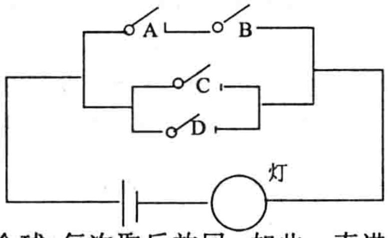
14. 有一个由 $2n$ 人组成的社会团体中男人与女人的数目相等。他们随机地坐在一排椅子上。求同性的两人不相邻而坐的概率。

15. 在由 5 个男人及 10 个女人所组成的一个社会团体中，随机地分为五个组，每组各有 3 人。求每一组内只有一个男人的概率。

16. 盒中装有 n 个球，分别编有 1 至 n 的号码。任意地抽球，每次只抽一个，抽出后不再放回。试问：在头 k 次抽球中，球的号码与抽球的次序相同的概率是多少？

17. 盒中有 2 个球(一个白球一个黑球)。每次抽一个，直到出现黑球为止，并且当抽出白球后再放回盒子，另外再补充进两个白球。求在头 50 次抽球中黑球中不出现的概率。

18. 如图所示的开关电路中，开关 A、B、C、D 断或通相互独立，它们的概率均为 $\frac{1}{2}$，求(1)灯亮的概率；(2)已见灯亮，开关 A，B 同时通的概率。



19. 甲、乙两人依次掷一硬币(设甲先掷)，先出现正面者获胜，求各人获胜的概率。

20. 盒中有 n 个白球及 m 个黑球。两人依次各取一个球，每次取后放回。如此一直进行到他们之中的某人得到白球时为止。求首先取球者先得到白球的概率。

21. 甲，乙两人比赛射击，每进行一次，胜者得 1 分。在一次射击中，甲胜的概率为 α，乙胜的概率为 β。设 $\alpha>\beta$，$\alpha+\beta=1$。射击进行到有一个超过对方 2 分就停止，多得 2 分者为胜。试分别求甲获胜的概率和乙获胜的概率。

22. 盒中有 n 个球，编号 1 至 n。从中依次取球二次，每次取一球。如第一次取到的球不是 1 号球就放回盒中，再进行第二次取球。如第一次取到的球是 1 号球就不放回盒中，再进行第二次取球。试求第二次取到的球是 2 号球的概率。

23. 已知在 1000 个灯泡中坏灯泡所占的数目由 0 到 5 是等可能的。

(1) 求任取 100 个灯泡均为好的概率；

(2) 若任取 100 个灯泡，发现均为好的，求在这 1000 个灯泡中没有坏灯泡的概率。

24. 在右边衣袋中装有 3 个 5 角及 4 个 1 角的的硬币，而在左边衣袋中装有 6 个 5 角及 3 个 1 角的硬币。从右边袋中任取 5 个硬币，放入左袋中，再从左袋中任取一个硬币，试求此

硬币是 5 角的概率(假定各硬币的抽取是等可能的)。

25. 若工厂将某些污物排入污水系统，则污水处理过程就可能失效。试验表明，因各种污物而造成失效的相对频率如下：油类，0.9；酸类，0.8；砷类，0.6；正常污物，0.001。记录表明排出各种污物的相对频率如下：油类，0.015；酸类，0.020；砷类，0.025；正常污物，0.94。假定相对频率可作为概率，问污水处理过程失效的概率是多少？若厂方获悉处理过程已告失效，问哪种污物是造成失效的最可能原因？

26. 有 10 个盒子，其中 9 个各装有 2 个黑球 2 个白球，而另一个盒子装有 5 个白球 1 个黑球。今任意地从 1 个盒子中取出 1 个球，发现是白球，试求此球是从装有 5 个白球及 1 个黑球的盒子中取出的概率。

27. 三名射手一次发射的命中率分别为$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$。他们同时各打一发，结果有两发命中。求第三名射手脱靶的概率。

28. 有 n 个盒子，每个盒子各有 m 个白球 k 个黑球。今从第一个盒子中任取一球，放入第二个盒子中。然后再从第二个盒子中任取一球放入第三个盒子中，并依次继续下去。试求从最后一个盒子中取出一个白球的概率。

29. 在长为 l 的线段上任取两点。试问这两点间的距离小于 kl 的概率是多少？其中 $0<k<1$。

30. 一根长为 l 的杆子，任意地折成三段。试求用所得的三段能构成一个三角形的概率。

31. 在半径为 R 的园周上任取 A,B,C 三点，试求三角形 ABC 为锐角三角形的概率。

32. 试问任取三条长度均不大于 l 的线段能构成三角形的概率是多少？

33. 试求关于 x 的二次方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实根概率，假定方程的系数 a,b 的值在矩形 $|a|\leqslant n,|b|\leqslant m$ 内是等可能的。

34. 从(0,1)中随机地取两个数，求下列概率：(1)两数之和小于 1.2；(2)两数之积小于 $\frac{1}{4}$；(3)以上两个要求同时满足。

35. 在尺寸为 10×20 米^2 的矩形中，画有五个半径为 12 厘米的园。其中三个是在面积为 8 米^2 的区域 S 内，而另 2 个是在 S 外。假设 A 表示任意投一点且落在区域 S 内的事件，而 B 表示该点落在五个园中任一园的事件，试问这两个事件是否独立？

第二章　随机变量及其分布

内容提要

2.1　随机变量与分布函数

2.1.1　随机变量定义

设有随机试验 E，相应的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，定义在 Ω 上的单值实函数 $X=X(\omega)$，称为**随机变量**，简记 r.v.，常用 $X,Y,Z,\cdots$表示，相应的可能值分别用 $x,y,z,\cdots$表示。

2.1.2　分布函数

设 r.v. X，称 $F(x)\triangleq P\{X\leqslant x\}=P\{\omega : Z(\omega)\leqslant x\}(x\in R^1)$为 r.v. X 的**分布函数**，简记 d.f.。

当 $a<b$ 时，$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$.

分布函数有下列性质：

(1) $\forall\ x\in R^1, 0\leqslant F(x)\leqslant 1$。

(2) $F(x)$单调增加。

(3) $F(+\infty)\triangleq \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1, F(-\infty)\triangleq \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$。

(4) $F(x)$是右连续函数，即 $F(x+0)=F(x)$，其中 $F(x+0)=\lim\limits_{t\to x+0} F(t)$。

分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性。

2.1.3　随机变量的分类

常用的随机变量有两类：离散型随机变量与连续型随机变量。

2.2　离散型随机变量

若 r.v. X 的可能值为有限个或可列个，称 X 为离散型 r.v.。

2.2.1　分布列

设离散型 r.v. X 的可能值为 $x_1,x_2,\cdots$，记 $p_k=P\{X=x_k\}(k=1,2,\cdots)$，称$\{p_k\}$为 r.v. X 的**分布列**或**概率分布**。也可用表格表示

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

(2.1)

分布列有下列性质：

(1) $p_k\geqslant 0, k=1,2,\cdots$,

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

设离散型 r.v. X 的分布列由表(2.1)给出，则 X 的分布函数 $F(x)$是一个阶梯函数，间断点为 $x_1,x_2,\cdots$，在各个间断点的跳跃度分别为 $p_1,p_2,\cdots$。其表达式为