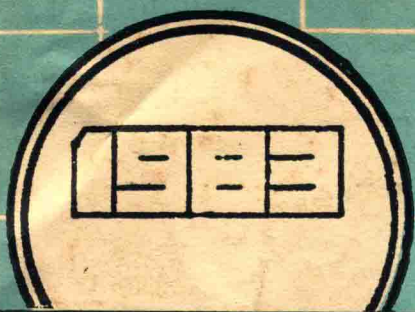




国际图形会议译文集

A类6册

武汉工业控制计算机外部设备研究所
情 报 室

目 录

一、各种三维模型的说明和估价.....	(1 ~16)
二、产生插值曲面确定一组B—仿样控制结点	(17~35)
三、单值B—仿样曲线和曲面的终端条件 和边界条件的描述.....	(36~49)
四、TRANSPLINE —— 用四个仿样公式的变换表示曲线的系统... ..	(50~62)

各种三维模型的说明和估价

美国加利福尼亚大学计算机科学系.伯克利计算机

图形研究室. Brian A. Barsky

摘 要

参数曲线和曲面早已在数学F中定义过,并广泛应用于工程方面,最近亦用于计算辅助设计。在除计算机辅助设计以外的计算机图形中,它们的应用,可以是几个碎片组成的简单物体模型到数百个碎片组成的三维活动模型。

尽管已有这些方面的应用,但是对于从事计算机图形的大多数人似乎仍然有点令人生畏。本文希望通过对最普通类型的参数曲线和曲面的原旨性质和引证的描述来讨论这个问题。

1、前言

最近十年,在计算机图形中,由直线段和平面多边形近似地表示曲线和曲面,受到目前电子计算机工艺水平的限制是显而易见的了。即使用最复杂的连续明暗样式,多边形的表示方法,但是得到的是用肉眼就能分辨的不好的图形。在相邻多边形的边界上明显有许多条纹,即总是锯齿状的多边形轮廓。此外,多边形的表示方法还常常需要大量的存贮。而基于所存贮的多边形数据库的清晰度是固定的,又与最终的显示无关。与曲面表示方法不同的是它可用计算机产生图形,为此图形能达到状态要求的任何精确程度。

Coons^{13,14,16}和Bezier^{6,10,11}早期的著作中介绍了对于可拼合成分段曲线和曲面的补片,用非线性参数多项式表示,从而确定其可行性。最近,Riesenfeld^{22,21}主张用B一样条去表示这种多项式,是因为它具有更大的灵活性和有效性。

参数B一样条有许多优点。其中之一是在相邻曲线段之间的联结点 and 曲面片之间的边界外能够控制连续度:它与线段的顺序和控制顶点的数量无关。然而在连接处,参数的一或二连续度的解并不总是与直观或理想的物理意义一致。对于分段三次曲线和双三次曲面,这些参数的连续性条件可以由更有意义的连续单位切向量和曲率向量的条件来代替,为此,对参数的一次,二次导数引入一些有约束性的不连续点。用参数 β_1 和 β_2 来表示位移和张力的,从而得到 β -仿样曲线和曲面。

对于Hermite似参数总式, coons参数公式,Bezier参数公式,B一样条和 β -仿样曲线和曲面公式的原旨,特性和引证。将予以叙述。参数表示有许多理想的特性,如可用于多值曲线和曲面,它与选择的坐标系无关等。与此类似,对于多项以外的函数(除去表示圆、椭圆和球的三角函数)只要指数有微小的增加,其计算的耗费将很大。当然,理论上任何曲线都可用多项式逼近到任意精度。(带有一些通常的防此误解的分析说明)。

2、曲线和曲面公式

2.1. Hermite插值和Coons曲面

Hermite插值是由一系列的点和它的导插值来确定的。在用三次导数的情况下，这些导数是一阶导数，而所产生的曲线有连续变动的位置与方向 [C⁽¹⁾]。特别的，令 $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ 是 $m+1$ 个插值

点， $\{p'_j, P'_1, \dots, p'_m\}$ 是相应的一阶导向量的值。ith 曲线段描写为参数 u 的函数，就是说，曲线段可写成：

$$Q_i(u) = \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 G_{j,k}(u) P_{ji-1+k}$$

函数 $g_{j,k}(u)$ 是三次 Hermite 基本函数：

$$G_{0,0}(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$$

$$G_{0,1}(u) = 2u^3 + 3u^2$$

(1)

$$G_{1,0}(u) = u^3 - 2u^2 + u$$

$$G_{1,1}(u) = u^3 - u^2$$

用短阵表示为：

$$[G_{0,0}(u), G_{0,1}(u), G_{1,0}(u), G_{1,1}(u)] = [u^3, u^2, u, 1] \quad [H] \quad (2)$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

曲面表示基本方法之一，是由 Coons^{13,14,19} 提出的，其基本思想是混合四条边界曲线来生成一个曲面。简单的 coons 曲面可表示成：

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \sum_{i=0}^1 f_i(u) p(i, v) + \sum_{j=0}^1 f_j(v) p(u, j) \\ &\quad - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 f_i(u) f_j(v) p(i, j) \end{aligned}$$

或角矩阵形式：

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= [f_0(u), f_1(u)] \begin{bmatrix} p(0, v) \\ p(1, v) \end{bmatrix} \\ &\quad + [p(u, 0), p(u, 1)] \begin{bmatrix} f_0(v) \\ f_1(v) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} f_0(u), f_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(0, 0) & p(0, 1) \\ p(1, 0) & p(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(v) \\ f_1(v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这里 $p(u, 0)$, $p(u, 1)$, $p(0, v)$, $p(1, v)$ 是边界曲线， $p(0, 0)$, $p(0, 1)$, $p(1, 0)$ 和 $p(1, 1)$ 是四个角点， $f_0(t)$, $f_1(t)$ 是混合函数（见图 1）。注意，混合函数必须满足 $f_i(j) = \delta_{i,j}$ ， $\delta_{i,j}$ 是 Kronecker 记号。这个简单的 Coons 曲面不受边界交叉点导数的限制。因此，应用合成曲面时，在交接处保证比位置的更高连续性是不可能的。

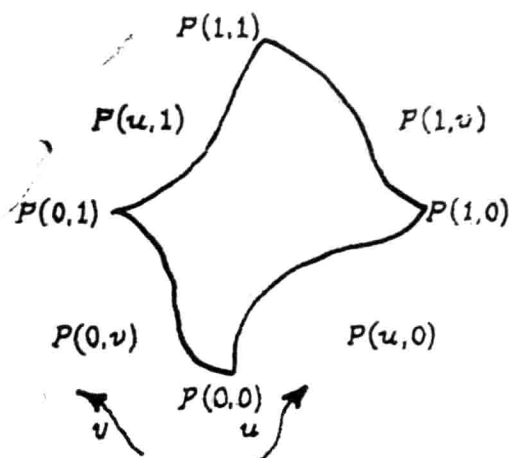


图1 Coons 曲面边界曲线和角点

为得到一阶导数连续性，这个方法被推广，而使用户能够给定边界交叉点的导数。这需要四个混合函数 $G_{0,0}(t)$, $G_{0,1}(t)$, $G_{1,0}(t)$, $G_{1,1}(t)$, 这个曲面现在可以写成：

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{r=0}^1 P^{(r,0)}(i,v) G_{r,i}(u) + \sum_{j=0}^1 \sum_{s=0}^1 P^{(0,s)}(u,i) G_{s,j}(v) \\ - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^1 P^{(r,s)}(i,j) G_{r,i}(u) G_{s,j}(v)$$

或者用矩阵形式：

$$Q(u,v) = [G_{0,0}(u), G_{0,1}(u), G_{1,0}(u), G_{1,1}(u)] \begin{Bmatrix} p(0,v) \\ p(1,v) \\ p(1,0)(0,v) \\ p(1,0)(1,v) \end{Bmatrix} \\ + [p(u,0), p(u,1), p(0,1)(u,0), p(0,1)(u,1)] \begin{Bmatrix} g_{0,0}(v) \\ g_{0,1}(v) \\ g_{1,0}(v) \\ g_{1,1}(u) \end{Bmatrix} \\ - [G_{0,0}(u), G_{0,1}(u), G_{1,0}(u), G_{1,1}(u)] \begin{Bmatrix} p(0,0) & p(0,1) & p(0,1)(0,0) & p(0,1)(0,1) \\ p(1,0) & p(1,1) & p(1,0)(1,0) & p(1,0)(1,1) \\ p(1,0)(0,0) & p(1,1)(0,0) & p(1,1)(0,1) & p(1,1)(1,1) \\ p(1,0)(1,0) & p(1,1)(1,0) & p(1,1)(1,1) & p(1,1)(1,1) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{0,0}(v) \\ G_{0,1}(v) \\ G_{1,0}(v) \\ G_{1,1}(v) \end{Bmatrix}$$

$$\text{其中 } p(a,b)(u_i, v_j) = \frac{\delta a + b}{\delta u a} \frac{p(u,v)}{\delta v b} \Big|_{u=u_i, v=v_j}$$

虽然coons公式很有用，而且很普遍，但它大量缺乏直观解释的数据说明。其中简化方程(3)的方法是使用下面的边界函数：

$$p^{(0,s)}(u,j) = \sum_{i=0}^1 \sum_{r=0}^1 P^{(r,s)}(i,j) G_{r,i}(u) \quad (4)$$

$$p(r,o)_{(i,v)} = \sum_{j=0}^1 \sum_{s=0}^1 p(r,s)_{(i,j)} G_{j,s}(v)$$

将方程(4)代入方程(3), 三项相等, 于是方程(3)化简为:

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^1 p(r,s)_{(i,j)} G_{r,i}(u) G_{s,j}(v)$$

或用矩阵形式:

$$Q(u,v) = [G_{0,0}(u), G_{0,1}(u), G_{1,0}(u), G_{1,1}(u)] [p] \begin{bmatrix} g_{0,0}(v) \\ g_{0,1}(v) \\ g_{1,0}(v) \\ g_{1,1}(v) \end{bmatrix}$$

其中

$$p = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,1} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{0,1} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,0} & p_{1,0} & p_{1,1} \\ p_{1,0} & p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,1} \end{bmatrix}$$

混合函数必须满足:

$$\begin{aligned} G_{0,i}(j) &= G_{1,i}^{(1)}(i) = S_{i,j} \\ G_{1,i}(j) &= G_{0,i}^{(1)}(j) = G_{0,i}^{(2)}(j) = G_{1,i}^{(2)}(j) = 0 \end{aligned}$$

这些条件由方程(1)和(2)给出的三次Hermite 基本函数满足。

2.1 Bezier曲线和曲面

回顾一下概率论和统计学中的二项分布, 如果每次成功的概率是 u , 那么, m 次试验中恰为 i 次成功的概率为:

$$B_{i,m}(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i}$$

$$\text{其中: } i = 0, 1, \dots, m \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (6)$$

现在, 考虑由控制结点的有序序列形成的控制多边形,

$$[V_0, V_1, \dots, V_m]$$

通过研究下面的游戏可将概率 $B_{i,m}(u)$ 与上述顶点联系起来。游戏者开始在点 V_0 , 令移到一点的概率为 u , 停在当前顶点的概率为 $1-u$, 那么 $B_{i,m}(u)$ 是做了 m 次后在顶点 V_i 的概率。由

$$\text{此} m \text{次后的期望位置一定是: } Q_m(u) = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(u) V_i \quad (7)$$

其次, 因 $B_{i,m}(u)$ 是概率密度函数, 所以

$$\sum_{i=0}^m B_{i,m}(u) = 1$$

多项式 $B_{i,m}(u)$ 称作Bernstein多项式, 它们形成Bernstein基, 因为它们是次数不超过 m 的多项式的向量空间的一组基。表达期望位置的式(7)亦可看作是控制结点序列的Bernstein逼近。Bernstein多项式加权因子, 故这个表达是 $m+1$ 控制结点的加权平均值, 且定义了一个 m 次Bezier曲线。注意, 在整个定义域 $0 \leq u \leq 1$, 每一个多项式是非零的。这就是为什么它是整体的, 非局部的控制原因。

现在讨论三次Bezier曲线, 这意味着 $m = 3$, 存在一个有四个控制结点 $[V_0, V_1, V_2,$

v_3] 组成的控制多边形。根据方程(6), 此时Bernstein多项式为:

$$B_{0,3}(u) = (1-u)^3 = -u^3 + 3u^2 - 3u + 1$$

$$B_{1,3}(u) = 3u(1-u)^2 = -3u^3 + 6u^2 - 3u$$

$$B_{2,3}(u) = 3u^2(1-u) = -3u^3 + 3u^2 \quad (8)$$

$$B_{3,3}(u) = u^3$$

图2画出这些多项式的图形, 其定义域是 $0 \leq u \leq 1$ 。合并方程(7)和(8), Bezier曲线为:

$$Q_3(u) = (1-u)^3 v_0 + 3u(1-u)^2 v_1 + 3u^2(1-u) v_2 + u^3 v_3 \quad (9)$$

可以用短阵记号来改这些方程, 根据方程(7)曲线可以表示为:

$$Q_3(u) = [B_{0,3}(u), B_{1,3}(u), B_{2,3}(u), B_{3,3}(u)] \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

由方程(8), 多项式可以写作:

$$[B_{0,3}(u), B_{1,3}(u), B_{2,3}(u), B_{3,3}(u)] = [u^3, u^2, u, 1] [B]$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据方程(6), 曲线能改写成下面的矩阵形式:

$$Q_3(u) = [u^3, u^2, u, 1] [B] \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

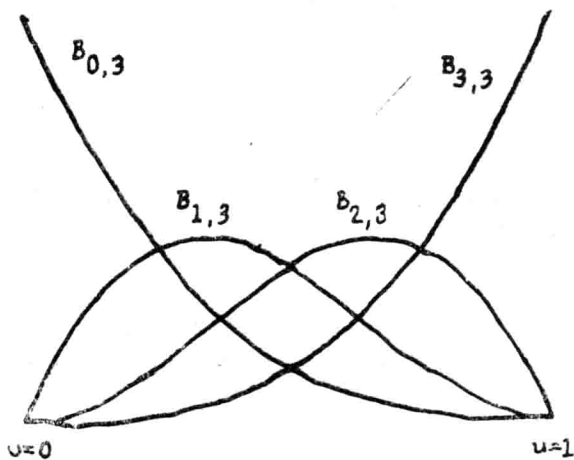


图2 对于 $0 \leq u \leq 1$ 的 Bernstein 二次多项式

Bezier公式得以形成的最初考虑基于多项式的导数与控制多边形的边之间的关系。据根式(9)或(10), 容易验证:

$$Q_3(0) = v_0$$

$$Q_3(1) = v_3$$

$$Q_3^{(1)}(0) = 3(V_1 - V_0)$$

$$Q_3^{(1)}(1) = 3(V_3 - V_2)$$

这说明控制多边形和Bezier曲线有密切关系，曲线起于第一个结点(V_0)，而终止于最后一个结点(V_3)，并且在这两个结点处与控制多边形相切。

一个Bezier曲面是Bezier曲线的张量积，它通过在三维 $X-Y-Z$ 空间中的一组控制结点来定义。这些结点构成一个带有矩形拓扑的二维图形。表面上的点是这些控制点的加权平均值：

$$Q_{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) V_{i,j}$$

或用矩阵形式记为：

$$Q_{m,n}(u,v) = [B_{0,m}(u), B_{1,m}(u), \dots, B_{m,m}(u)] [V] \begin{bmatrix} B_{0,n}(v) \\ B_{1,n}(v) \\ \vdots \\ B_{n,n}(v) \end{bmatrix}$$

其中

$$V = \begin{bmatrix} V_{0,0} & \vdots & \vdots & \vdots & V_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{m,0} & \vdots & \vdots & \vdots & V_{m,n} \end{bmatrix} \quad (11)$$

在 $m=n=3$ 的情况下，这是一个双三次Bezier曲线面，其基函数是在方程(8)中被定义的那些函数。比较在方程(5)和(11)中的矩阵公式：

$$HPH^t = BVB^t$$

由此可以得知：为了产生一个相同的曲面， P 矩阵表达或可以求出，作为用控制结点表示的矩阵 P 中的元素，特别地，

$$P = H(-1)BVB^tH(-1)$$

其值为：

$$P = \begin{bmatrix} V_{0,0} & V_{0,3} & 3(V_{0,1} - V_{0,0}) & 3(V_{0,3} - V_{0,2}) \\ V_{3,0} & V_{3,3} & 3(V_{3,1} - V_{2,0}) & 3(V_{3,3} - V_{3,2}) \\ 3(V_{1,0} - V_{0,0}) & 3(V_{1,3} - V_{0,3}) & 9(V_{0,0} - V_{1,0} - V_{0,1} + V_{1,1}) & 9(V_{3,3} - V_{1,2} - V_{0,3} + V_{1,3}) \\ 3(V_{3,0} - V_{2,0}) & 3(V_{3,3} - V_{2,3}) & 9(V_{2,0} - V_{3,0} - V_{2,1} + V_{1,1}) & 9(V_{3,3} - V_{3,2} - V_{2,3} + V_{3,3}) \end{bmatrix}$$

应注意，Bezier曲线和曲面以下这些性质：它们与坐标系的选择无关；对于曲线有偏差变小的特性；有凸包性；具有整体控制（非局部）和对于保证相邻曲线和曲面之间连续性有一定的能力。

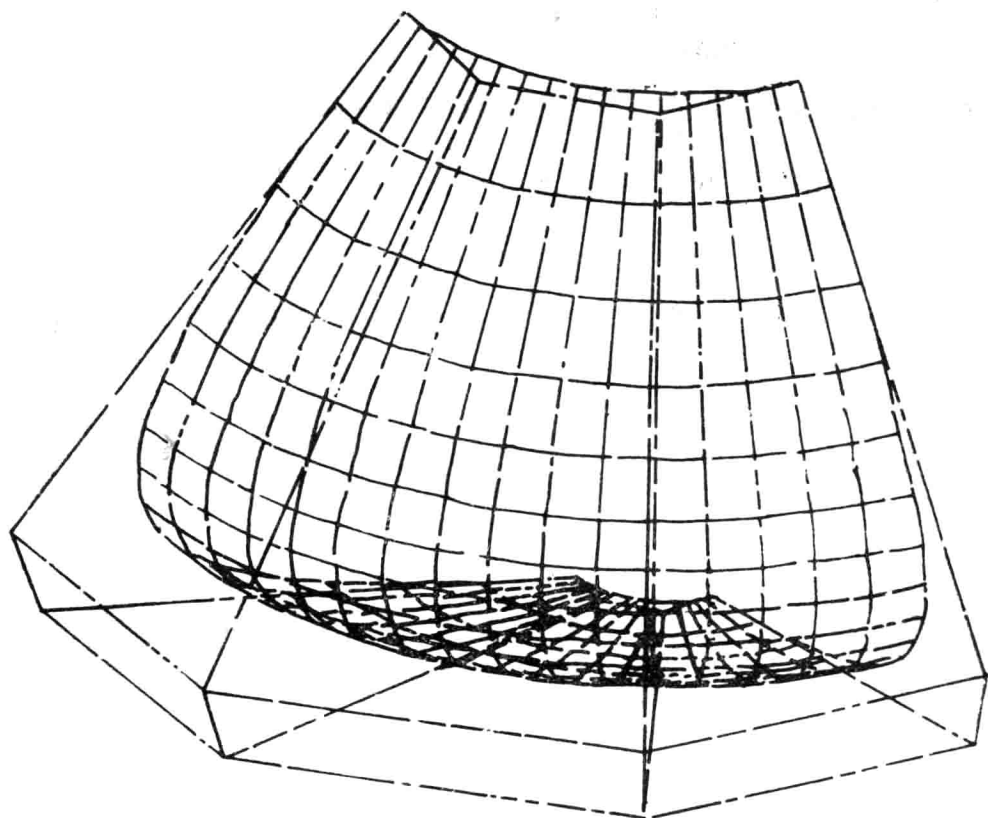


图3. 控制图形与对应的 Bezier 曲面

2.3 B—仿样曲线和曲面

样条这个概念首先由Schoenberg引用,它的命名来源于画曲线的绘图员和造船的设备。一个物理样条很象 F_n 应用在给定数据点间连接为一条光滑曲线修整的French曲线。它由一此称之为“duck”的附加铅垂重物固定,通过变动“duck”的数目与位置,可迫使样条通过给定的数据点。一条被某些点约束的软尺将描出一条使得各约束点之间有最小张力的曲线。

若设想物理样条是一个有弹定的细木条,则可援用Bernoulli—Euler方程。当偏差甚小时,可以略去曲率公式中的一阶导数项,从而曲率可以用假定曲线的二阶导数近似表示,假定这样“duck”仅起简单的支撑作用。可以证明这个函数计算问题的解是一个分段三次多项式,在给定点有直到二阶的连续导数。

一个样条被解析地定义一族结点向量上的多项式。所谓结点向量是一个按不减顺序排列的实数组,其中各实数称为结,即:

$$u = [u_0, u_1, \dots, u_Q]$$

$$\text{且 } u_i \leq u_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, q$$

一个 K 次样条数学上定义为一个分段 $(k-1)$ 次多项式,此多项式是 $C[k-z]$ 连续;即在每个区间 $[u_{i-1}, u_i)$ 上,是一个至多为 $k-1$ 次的多项式,并且有一阶 $k-z$ 连续导数。

对应结点向量 $[u \cdots u_{i+k}]$ 的 K 次 B —样条的第 i 个函数记为 $N_{i,k}(u_i \cdots u_{i+k}; u)$, 且能够表示成为如下的逆推关系:

$$N_{i,k}(u_i \cdots u_{i+k}; u) = \frac{(u - u_i)}{u_{i+k-1} - u_i} N_{i,k-1}(u_i \cdots u_{i+k}; u) + \frac{(u_{i+1} - u)}{u_{i+1} - u_{i+k}} N_{i+1,k-1}(u_{i+1} \cdots u_{i+k+1}; u) \quad (12)$$

其中 $u_i \leq u \leq u_{i+1}$
且 $N_{i,k-1}(u_i, u_{i+1}; u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

总而言之, 方程(12)意味着在 K 次 B —样条第 i 个基函数是 $K-1$ 次 B —样条第 i 个与第 $i+1$ 个基函数的加权平均值。而每个加权是参数与端点间的距离和 $K-1$ 步之长的比。注意, 计算 $N_{i,k}(u_i, \cdots, u_{i+k}; u)$ 包含从 u_i 到 u_{i+k} 中全部结点。

Curry 和 Choen berg¹⁶ 证明了 $N_{i,k}(u)$ 的确是一组基, 使得任何一个定义在给定结点向量上的 K 次或小于 K 次的样条, 可以表示成定义在相同结点向量下 B —样条基函数的线性组合, 而这个相同结点的向量是由 $K-1$ 次不定结点的端点扩展的。

对于给定结点向量仅有的限制是相同的值出现不能多于 K (K 是次数) 次, 且这些结点必须是非递减的顺序。当相同结点值出现多于一次时, 我们称它为多重结点。更确切的说, 如果:

$$u_i = u_{i+1} = \cdots = u_{i+m-1} \quad M \leq K$$

则称 u_i 是一个 m 重结点。

在这个结点上的连续性减少了 $m-1$ 。因一般的结点是 $C[k-2]$ 连续, 因此在一个 m 结点处就是 $C[k-m-1]$ 连续。例如: 一个三次样条 ($k=4$) 通常是 $C[2]$ 连续的, 如果出现一个三重点, 在该点处连续性就为 $C[0]$ 。这样在样条曲线中就容易出现不连续。

虽然结点的值不怎么受约束, 一什特别实用的情况是结点等距, 此处 $u_i = i^2$ 。当 $K=4$, 生成规范形式的三次 B —样条基函数:

$$N_{i,4} = \begin{cases} 0 & u < u_i \\ u_{i+1}^3 / 6 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ (3u_{i+1}^3 - 3u_{i+1}^2 + 3u_{i+1} + 1) / 6 & u_{i+1} \leq u < u_{i+2} \\ (3u_{i+2}^3 - 6u_{i+2}^2 + 4) / 6 & u_{i+2} \leq u < u_{i+3} \\ (1 - u_{i+3}^3) / 6 & u_{i+3} \leq u < u_{i+4} \\ 0 & u_{i+4} \leq u \end{cases}$$

其中 $U_j = U - U_{i+j} \quad j = i, i+1, \cdots, i+3$

一个重要的事实是, 这些基函数的形式是相同的, 不取决于 i 。就是说, 所有的 $N_{i,k}(u)$ 是可以相互平移的。

根据已记录的基函数的表达式, 在 u 的末端值是不是 K 次非零基函数。为了建立 K 次非零基函数 (结点本身除外), 采用对上述的结点向量稍作一点修改, 使得结点间是等距的, 而在两个端点处每个结点的值重复 K 次。

这非常类似 Bernstein 多项式的情况 (Bezier 曲线), 在结点向量中, 如果没有内部结点存在, B —样条恰是 Bernstein 多项式, 对应的结点向量是:

$$\underbrace{[0, 0, \dots, 0]}_{K \text{ 次}}, \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{K \text{ 次}}$$

方程(12)成为:

$$N_{i,k}(u) = u N_{i,k-1}(u) + (1-u) N_{i+1,k-1}(u)$$

$$\text{其中 } N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

它是Bernstein多项式的递推关系。

正如Bernstein多项式和Bezier曲线的情况一样，B——样条基函数能用来近似地表达控制结点序列，这个表达式也是控制结点的加权平均值：

$$Q_k(u) = \sum_{i=0}^m N_{i,k}(u) V_i$$

其中结点向量是：

$$[u_0, u_1, \dots, u_g]$$

因为控制多边形有 $m+1$ 个控制结点，而每一个控制结点有相应的基函数，所以有 $m+1$ 个基函数。沿结点向量移动时，每个基函数在相继的 $K+1$ 个结点上是非零的，于是 $k+m+1$ 个点对于 $m+1$ 个控制结点的 $m+1$ 个函数加以定义。由此可见，具有重端结点的一致结点向量为：

$$\underbrace{[0, 0, \dots, 0]}_{k-1}, \underbrace{[0, 1, \dots, \gamma]}_{m-k+2}, \underbrace{[\gamma, \gamma, \dots]}_{k-1}$$

其中 $r = m - k + 2$ ，即：

$$u_i = \begin{cases} 0 & i = 0, \dots, k-2 \\ i - k + 1 & i = k-1, \dots, m+1 \\ m - k + 2 & i = m+2, \dots, m+k \end{cases}$$

如同Bezier曲线从Bezier曲线构成一样，一个B——仿样曲面是B——仿样曲线的张量积：

$$Q_{k,l}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{ik}(u) N_{jl}(v) v_{i,j}$$

类似Bezier曲线，B——样条与坐标系的选择无关；而曲线偏差变小的特性和凸包性。此外，B——样条有局部控制的优点（因为每一个B——样条基函数仅在 K 跨间 $K+K$ 面域上是非零的）和容易保持高阶的连续度。B——仿样曲线和曲面的公式，可用类似于方程(10)的方式给出：

$$X(u) = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] [S] \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中: } S = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

而曲面公式为：

$$X(u) = [u_3 \ u_2 \ u \ 1] [S] [V] [S]^T \begin{bmatrix} V^3 \\ V^2 \\ V \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 $[S]$ 与上面相同， $[V]$ 如同在(11)中一样是控制结点的矩阵。

2.4 β ——仿样曲线和曲面

在计算机绘图和计算机辅导几何设计中， β —样条是一种强有力的新的曲线和曲面的表示方法。 β —样条是由一组决定曲线位置的控制结点来定义的，基本的教学形式取决于连续单位切向量与曲率的约束，这些基本的几何量较之传统的基于导数的代数量更为适用。几何量的使用也增加了可以求取的自由度，以提供进一步的形状控制，其方式是通过两固有的形状参数 β_1, β_2 控制分段三次多项式曲线的边缘和张力^{4,5}。例如：一个高张力的 β —仿样曲线比一个类似的低张力的 β —样仿曲线更靠近控制结点。于是设计者为了得到一个粗略的形状，可以舍去些点，然后修改点和形状参数来使它精确， β —样条表示法还有局部控制性这个重大优点。

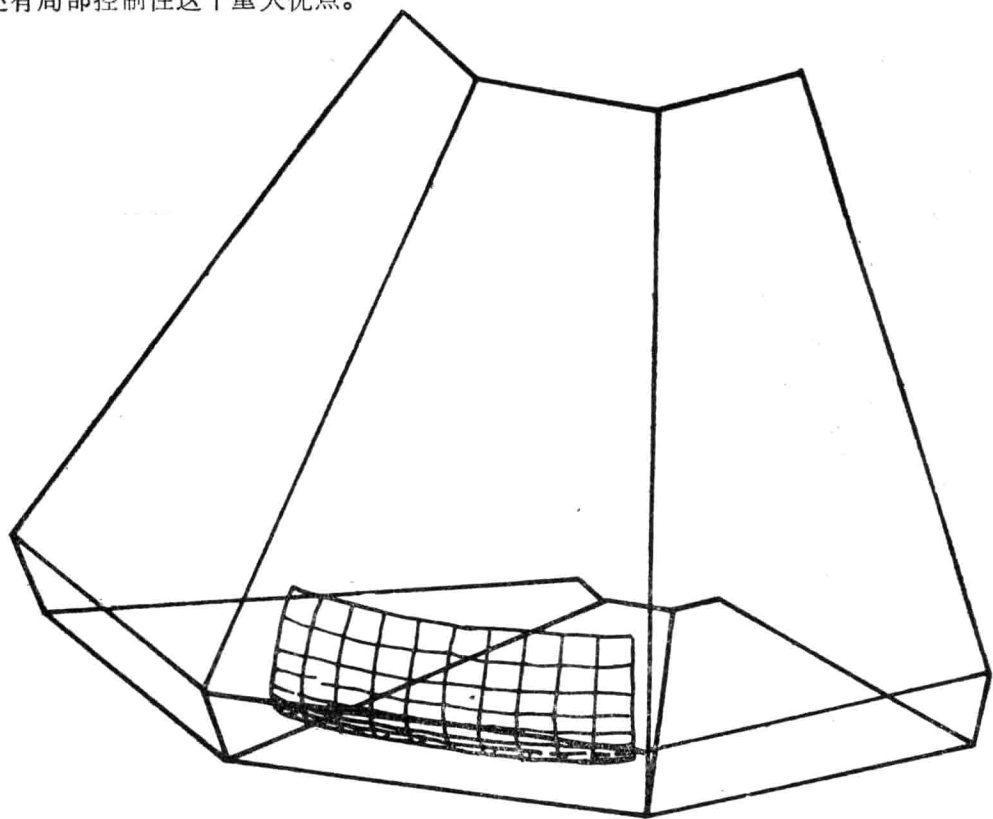
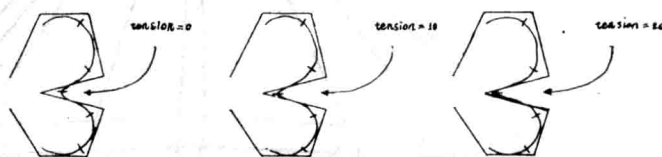


图4 由同一组控制结点定义的 β -仿样曲面

改变张力形状参数 β_2 的效果在图5和图6中有说明。图5示明了对应于增加张力的一系列曲线，其中每条曲线沿整个曲线有均匀张力。图6和它类似，不同的只是一条曲线在一点改变张力值，导致张力参数值沿整个曲线改变。

图6 沿 β -仿样曲线顺次序变动张力



一个 β -仿样曲线段上和曲面由一族控制结点决定。在第 i 曲线段上的一点是四个控制结点 $(\gamma = -2, -1, 0, 1)V_{i+r}$ 的加权平均值。在第 i 曲线段的点 $Q_i(u)$ 的坐标为:

$$Q_i(u) = \sum_{r=-2}^1 b_r(\beta_1, \beta_2, u) V_{i+r} \quad 0 \leq u < 1$$

当参数 u 从0变到1时, 描出第 i 段曲线。

加权因子是参数 u , 形状参数 β_1 和 β_2 的某些值取数值的基本函数。 β -样条的基本函数为:

$$\begin{aligned} b_{-2}(\beta_1, \beta_2, u) &= 2\beta_1^3 (1-u)^3 / \Delta \\ b_{-1}(\beta_1, \beta_2, u) &= [2\beta_1^3 u (u^2 - 3u + 3) + 2\beta_1^2 (u^3 - 3u^2 + 2) \\ &\quad + 2\beta_1 (u^3 - 3u + 2) + \beta_2 (2u^3 - 3u + 1)] / \Delta \\ b_0(\beta_1, \beta_2, u) &= [2\beta_1^2 u^2 (3-u) + 2\beta_1 u (3-u^2) \\ &\quad + \beta_2 (2u^3 - 3u + 1)] / \Delta \\ b_1(\beta_1, \beta_2, u) &= 2u^3 / \Delta \end{aligned}$$

其中 $\Delta = 2\beta_1^3 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1 + \beta_2$

在 (i, j) β -仿样曲面片上的一点是十六个控制结点的加权平均值。十六个控制结点为:

$$V_{i+r, j+s} \quad \gamma = -2, -1, 0, 1, \quad S = -2, -1, 0, 1$$

$$\text{于是曲线面 } Q_{i,j}(u, v) = \sum_{r=-2}^1 \sum_{s=-2}^1 b_r(\beta_1, \beta_2, u) V_{i+r, j+s} b_s(\beta_1, \beta_2, v)$$

其中 $0 \leq u < 1 \quad 0 \leq v < 1$

3、结论

参数曲线和曲面早已被人们采用, 且它们在计算机绘图中与计算机辅助几何设计相反模型的应用依然在增长。然而, 是因为他们用的公式和计算复杂, 得不偿失。于是本文就其意义和用途加以阐明, 并对其公式的不同形式有多少共同点并加以说明。给从而进一步指明 Hermite, Coons, Bezier, β -仿样和 β -仿样曲线和曲面的原旨, 特性和引证, 关系。

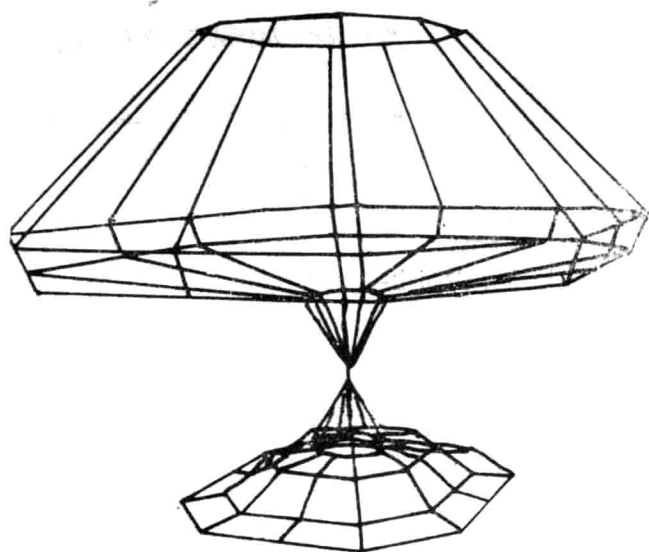


图7 贝斯尔玻璃杯的控制图形

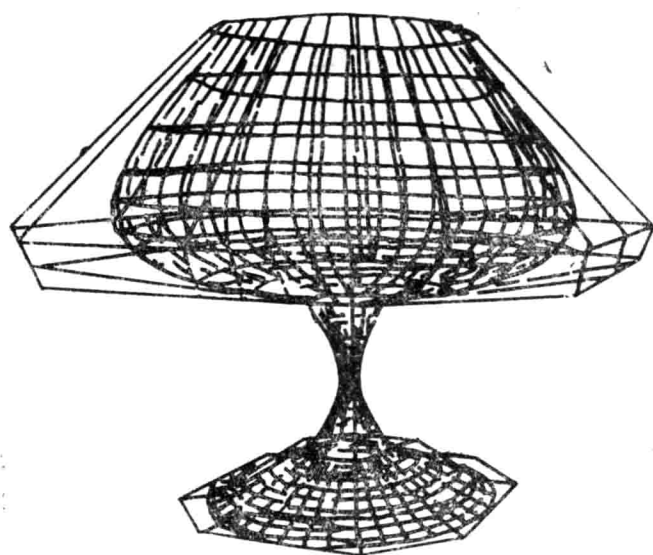


图8 贝斯尔曲面与它的控制图形

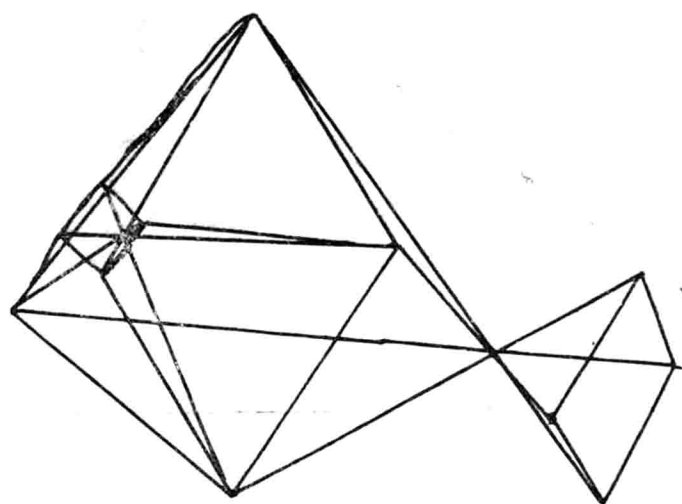


图9 B-仿样酒杯的顶的控制图形

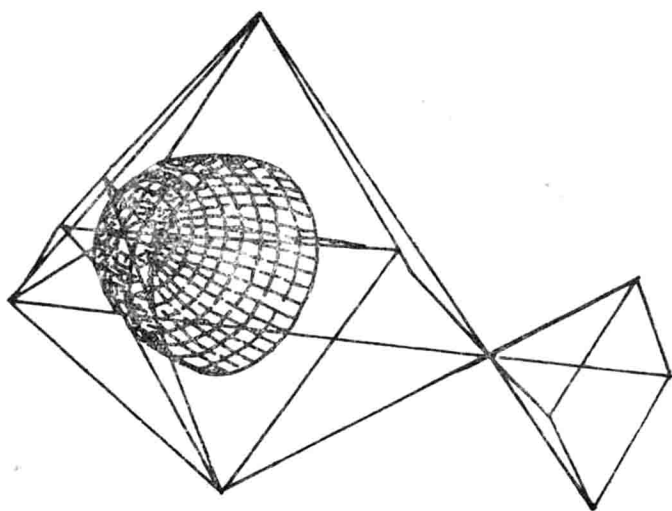


图10 B-仿样曲面与它的控制图形

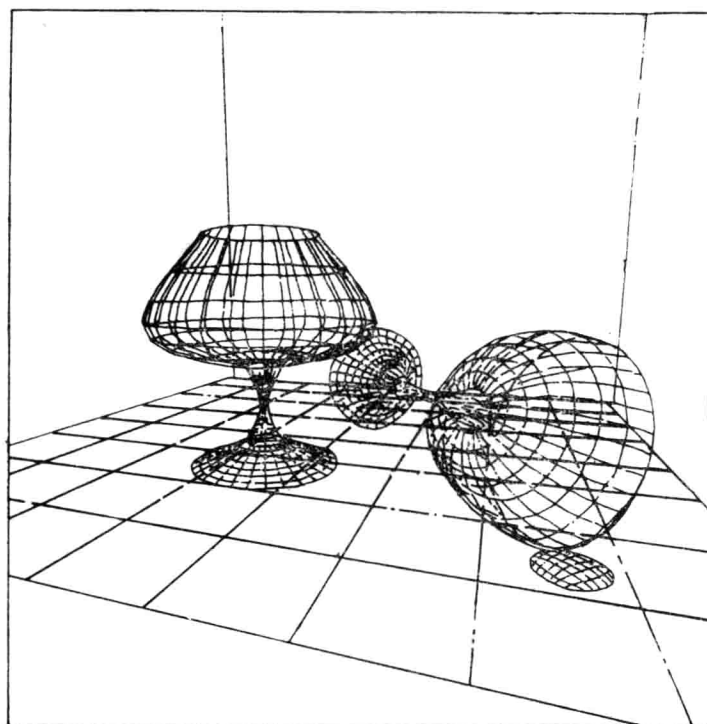


图11 这些杯子组成的全景

参考文献

1. Roberte·E· Barnhiu and Richard·F· Riesenfeld, Computer Aided Geometric Design, Academic press, New York (1974)。
2. Brian A Barsky. "A study of the parametric Uniform E-spline Curve and Surface Representation" In preparation.
3. Brian A Barsky "Algorithms for the Evaluation and perturbation of Beta-splines/ Submitted for publication"
4. Brian A Barsky The Beta-splines: A local Representation Based on shape parameters and Fundamental Geometric Measures, ph. D Thesis, university of Utah, salt lake city Utah (December, 1981)
5. Brian A Barsky "The Beta-splines: A curve and Surface. Representation for computer Graphics and Computer Aided Geometric Design" Submitted for publication.
10. pierre E· Bezier "Mathematical and practical possibilities of UNISCRF" in computer Aided Geometric Design, ed. Barnhill, Robert E. and Riesenfeld, Richard F, Academic press New York (1974)
11. pierre E. Bezier, Essai de definition numerique des courbes et des surfaces experimentales, ph. D Thesis, l' Universite pierre et Marie curie paris (February, 1977)
12. Carl de Boor. A practical Guide to splines to spline, springer--verlag (1978)
13. Steven A. Coons. Surfaces for computer Aided Design. Technical Report, Design Division, Mech Engin, Dept, M. I. T. Cambridge, Massachusetts (1964)
14. Steven A. Coons. Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms. Technical Report no MAC-TR-41, Project MAC, M.I.T. cambridge Massachusetts (June, 1967). Available as AD-663504 from NTIS Springfield, Virginia.
15. Steven. A. Coons, "Surface patches and B-spline Curves", pp.1-16 in computer Aided Geometric Design, ed. Barnhill, Robert E. and Riessenfeld, Richard F. Academic press, New York (1974)。
16. H. B. Curry and I. J. Schoenberg, "On Spline Distributions and their Limits: The polya Distribution Functions. Abstract 380t," Bulletin of the American Mathematical Society 53 p.1114 (1947)
17. H.B. Curry and I. J. Schoenberg, "On Polya Frequency Functions IV: The Fundamental Spline Functions and their limits" Journal d'analyse