

中国工程热物理学会

第八届年会论文集

第六分册

流体机械

一九九二

北京



I. 流体机械基本原理

一种用涡代替叶片作用的反问题计算

..... 陈乃祥 叶生海 罗先武 林汝长 I-1-7

边界未定 Couette 流流体发热强度的计算 王良壁 赵汝寿 刘兰诺 I-8-5

倾角较小热面朝上斜平板自然对流边界层转变点 Re 的确定 ... 王良壁 I-13-4

任意三角形断面通道层流磨擦阻力的理论近似解 孙德兴 I-17-8

新的液体密度方程式 李斯特 高武子 马润梅 I-25-6

试论欧拉涡轮方程误差很大的原因 赖轩明 I-31-7

II. 流动数值分析和试验研究

采用全三元势流数值计算方法分析离心泵叶轮内流场

..... 闫超 李振林 薛敦松 II-1-7

流体机械进气箱内的气固两相流动特性及其有限元计算

..... 吴克启 区颖达 蔡兆林 胡胜利 II-8-8

离心泵叶轮中固体颗粒运动轨迹计算 许洪元 高志强 吴玉林 II-16-7

孤立翼型绕流的加罚有限元数值解 胡志伟 李开泰 苗永森 II-23-5

流体机械内部流场动态测试系统及其应用

..... 吴克启 李向峰 蔡兆林 区颖达 王延觉 胡胜利 II-28-7

离心式通风机叶轮出口流场实验及分析 叶桃红 席光 王尚锦 II-35-6

叶轮机械旋转流场光电动态测试系统研究 ... 宋更生 杨树柏 陈康民 II-41-5

III. 风机和压缩机

径向无叶扩压器的稳定性区域 窦华书 III-1-8

透平压缩机系统深度喘振的温升计算 戴冀 谷传纲 苗永森 III-9-5

斜流叶轮顶端间隙流动特性的研究

..... 吴克启 蔡兆林 区颖达 李向锋 III-14-6

离心风机蜗壳中效率特性预测 蔡兆林 吴克君 区颖达 III-20-6

兼顾设计工况及变工况性能矿用局扇的气动设计 纪维礼 III-26-7

IV. 水泵及涡轮机

涡轮钻具用涡轮叶栅的水力设计 刘志洲 胡泽明 孙自祥 IV-1-7

我国渣浆泵研究和发展综述 梅祖彦 IV-8-12

混流泵叶轮奇点法水力设计 钱涵欣 林汝长 张海平 IV-20-6

高性能离心泵的优化设计思想 何伟 沈天耀 IV-26-6

一种用涡代替叶片作用的反问题计算

清华大学水利水电系
陈乃祥 叶生海 罗先武 林汝长

摘 要

本文在周向均匀, 流动无粘性, 叶片无厚度假设下, 用涡代替叶片的作用, 采用 Clebsch 转换得到流速表达式, 以轴面 RV_θ 分布作为反问题计算已知条件, 编制了叶片设计的软件。文中采用有限差分法, 并用边界适应坐标系解决边界条件, 采取多种措施使该反问题计算在微机上实现。

关键词: 水轮机, 反问题计算, 转轮, 流动计算

一、绪 言

在混流式水轮机和离心泵的叶片绘形中, 目前广泛采用的是简化的反问题解法, 其优点是计算过程简单, 而且灵活性大, 在有丰富的实际经验的条件下, 也可取得较好的结果。但这些方法在理论上不够完善, 因其主要思路是在轴对称流动假设下除给定轴面流动外, 还给定速度矩分布, 然后积分 S_2 流面上相对运动流线方程来求得叶片, 所以这种方法只考虑连续方程和流线方程, 而没有考虑运动方程, 其计算结果一般说不满足运动方程。特征线法^[1]使叶片满足运动方程, 但速度矩规律只能在一条流线(上冠或下环)上给定, 灵活性很小, 而二元法^[2]实际上是特征线法在轴面上为势流流场时一种特殊情况。也存在类似的问题, 有时对反问题计算会带来一定的困难。

本文在周向均匀, 流动无粘性、叶片无厚度假设下, 用涡代替叶片的作用, 采用 Clebsch 转换得到流速表达式, 在轴面上给定环量分布的条件下进行转轮叶片反问题计算, 在得到所设计叶片的同时可知该叶片作用下的在前述假设条件下的流场。这种方法不仅满足连续方程, 并使叶片满足运动方程, 又可在整个轴面给定速度矩, 具有较大的灵活性。在求解过程中采用边界适应坐标, 采用变量合并, 稀疏矩阵压缩等方法使其计算得以在微机上实现。

二、基本方程式

(一) 流动方程^[1]:

用叶片上附着涡 $\bar{\Omega}^*$ 代替叶片的作用, 在均匀性假设下, 则在流场中涡分布仍可写成:

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^* \quad (1)$$

$$\text{设叶片曲面方程为 } \theta = f(r, z), \quad (2)$$

并令:

$$S = \theta - f(r, z), \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial S}{r \partial \theta} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z} \quad (4)$$

$$\text{则 } \nabla S = -\frac{\partial f}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{R} \bar{e}_\theta - \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z$$

根据Clebsch变换涡量可写成如下形式:

$$\bar{\Omega} = \nabla \lambda \times \nabla \mu$$

或

$$\bar{\Omega}^* = \nabla \lambda \times \nabla \mu \quad (5)$$

其中 λ, μ 为两个标量, 且其梯度都应垂直于 $\bar{\Omega}^*$, 因涡矢 $\bar{\Omega}^*$ 在叶片上, $\nabla S \perp \bar{\Omega}^*$, 则可取 $\mu = S$ 则:

$$\bar{\Omega}^* = \nabla \lambda \times \nabla S \quad (6)$$

展开并考虑到(4)式可得:

$$\bar{\Omega}^* = -\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \bar{e}_r + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \bar{e}_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \bar{e}_z$$

又因 $\bar{\Omega}^* = \nabla \times \bar{v}$ 展开并因周向均匀假设下, 可得:

$$\bar{\Omega}^* = -\frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{v}_\theta r)}{\partial z} \bar{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \bar{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{v}_\theta r)}{\partial r} \bar{e}_z$$

两式对应项应相等, 则得:

$$\lambda = \bar{V}_\theta r$$

及:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial (\bar{v}_\theta r)}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial (\bar{v}_\theta r)}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (6)$$

并可得: $\bar{\Omega}^* = \nabla(\bar{v}_{\theta} r) \times \nabla S$ (7)

由 $\nabla \cdot \bar{v}^* = 0$ 得

$$\frac{\partial(v_r r)}{r \partial r} + \frac{\partial(v_z r)}{r \partial Z} = 0$$
 (8)

可知存在流函数

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$
 (9)

代入 (6) 可得轴对称二维流动方程:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r \left[\frac{\partial(\bar{V}_{\theta} r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial j}{\partial Z} - \frac{\partial(\bar{V}_{\theta} r)}{\partial Z} \cdot \frac{\partial j}{\partial r} \right]$$
 (10)

在非叶片区:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$
 (11)

(二)、叶片方程:

设 $\bar{W}_{bl}$ 为叶片上相对流速, 则 $\bar{W}_{bl}$ 应叶片发向矢量 $\bar{n}$ 正交。因此

$$W_{rbl} n_r + W_{\theta bl} n_{\theta} + W_{zbl} n_z = 0$$

考虑到 $\bar{n}$ 与 $\triangle S$ 共线的性质^[4], 则上式可变成:

$$-W_{rbl} \frac{\partial j}{\partial r} + W_{\theta bl} \frac{1}{r} - W_{zbl} \frac{\partial j}{\partial Z} = 0$$

因为 $W_{rbl} = V_{rbl}$, $W_{\theta bl} = v_{\theta bl} - \omega r$, $W_{zbl} = v_{zbl}$

代入上式可得叶片方程:

$$v_{rbl} \frac{\partial j}{\partial r} + v_{zbl} \frac{\partial j}{\partial Z} = \frac{v_{\theta} r - \omega r^2}{r^2}$$
 (12)

(三)、边界条件:

- (1) 因为上冠、下环为流线, 则 $\psi_{\text{上冠}}$ 、 $\psi_{\text{下环}}$ 均为常数;
- (2) 对进出口边设远处来流及远处出流处, 流速均布。

三、方程求解

在求解过程中利用边界适应坐标系, 就是将方程从物理平面 (r, z) 转换到单位方格网组成的计算平面 (η, ζ) 中进行求解。

则可将流动方程 (10) 转换成如下形式:

$$\alpha\psi_{\xi\xi} - 2\beta\psi_{\xi\eta} + \gamma\psi_{\eta\eta} + \psi_{\xi} \left[\frac{Z_{\eta}D_y - r_{\eta}D_x}{J} + \frac{JZ_{\eta}}{r} \right] + \psi_{\eta} \left[\frac{r_{\xi}D_x - Z_{\xi}D_y}{J} + \frac{JZ_{\xi}}{r} \right] = -rJ[j_{\xi}(r\bar{V}_{\theta})_{\eta} - j_{\eta}(r\bar{V}_{\theta})_{\xi}] \quad (13)$$

同理：叶片方程可转换成：

$$V_{\xi}j_{\xi} + V_{\eta}j_{\eta} = J^2 \left(\frac{r\bar{V}_{\theta}}{r^2} - \omega \right) \quad (14)$$

(13) 式右边取零即为非叶片区流动方程的计算平面形式。上述 $\alpha, \beta, \gamma, D_x, D_y$ 等均为坐标转换系数，为节省篇幅，不详述，此外除 V_{θ} 及

$$V_{\xi} = \frac{J\psi_{\xi}}{r} \text{ 和 } V_{\eta} = -\frac{J\psi_{\eta}}{r} \quad (15)$$

等为对应速度分量外，有下标 ξ, η 者都表示其对应量的偏导数。

按九点中心差分格式将上述 (13) 式在 (ξ, η) 平面上离散可得

$$C_{m0}\psi_{i,j} + C_{m1}\psi_{i+1,j} + C_{m2}\psi_{i-1,j+1} + C_{m3}\psi_{i,j+1} + C_{m4}\psi_{i,j-1} + C_{m5}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i+1,j-1}) = -\{rJ[j_{\xi}(r\bar{V}_{\theta})_{\eta} - j_{\eta}(r\bar{V}_{\theta})_{\xi}]\}_{i,j} \quad (16)$$

方程中右边项在得到叶片包角及环量分布规律的情况下为已知量，左边 ψ 为未知量（当 i, j 点在靠近边界时则方程中在边界点上的 ψ 为已知值应将其移至右边），这样除边界点以外每点可得一离散方程，最后组成稀疏矩阵方程：

$$[A][\psi] = [B] \quad (17)$$

本文为使上述方程在微机上进行，将大型稀疏矩阵压缩^[5]，并用高斯消去法求解出向量 ψ 。进而可求得 V_r, V_{η} （或 V_{ξ}, V_{η} ）。

同理将叶片方程 (12) 在 (ξ, η) 平面上离散整理得矩阵方程

$$[A1][F] = [B1] \quad (18)$$

其中 $A1$ 为计算网格各节点速度分量形成的系数矩阵， F 为各计算节点的叶片包角（即为被求量）组成的矢量。 $B1$ 为各节点方程 (12) 左边项的值（此值在给定 $r\bar{V}_{\theta}$ 分布及已知速度分布时为已知值）组成的列阵。与上述相同， $A1$ 为一稀疏矩阵可压缩后用高斯消去法求解。

在无穷远流、出流为均匀流及上冠与下环为流线的假设下，我们可

得到各边界条件并在给定环量值下交替求解矩阵方程 (17) 和 (18), 收敛后可得对应速度分布和叶片包角分布, 并根据绝对速度和相对速度关系求得轴面速度分布或求得轴面流线。

四、算例结果及分析

本文在验证程序过程中作了两个算例, 一个为高比速的, 另一个为低比速的, 现以高比速转轮为例加以说明。其参数如下:

$$\begin{array}{ll} H = 1.0m & Q = 1.0m^3 / s \\ n = 78.1 \text{ r.p.m} & N = 235m.KW \\ D_1 = 1.0m & B_0 = 0.3m \end{array}$$

计算中采用的流道形状及其物理平面网格如图 1 所示, 为提高叶片区各量计算精度而又省内存, 采取叶片区网格密, 逐渐向两边过渡的方式划分, 计算平面网格如图 2 所示。

在计算过程中本文采用势流流场 (见图 3) 速度分布作为初始流场, 用二维方法得到的叶片包角作为迭代用初始叶片包角。待本文方法计算收敛后, 叶片轴截线图详见图 4。得到的轴面流线图见图 5 中粗线, 其中细线为轴面有势流场流线, 流速沿流线的分布详见图 6, 可见其与初始流场有明显差别。计算时初值计算和迭代时, 都用同一环量分布规律。

五、结 论

(一) 文中用涡代替叶片作用, 用 Clebsch 转换公式得到用于计算的流函数方程, 思路清楚。

(二) 从计算结果可以看到, 叶片对轴面流场的影响是明显的。

(三) 给定轴面 RU_0 分布, 在求解叶片骨线的时候, 可求得与叶片偶合的流场, 在一定意义上对叶片性能进行预测, 这是该法优于传统一元、二元方法之处。

(四) 该文只是给出一种方法并可在微机上实现, 要求得优良转轮必须给定的良好的 RU_0 分布, 而 RV_0 如何给定是一需总结经验的问题。

参考文献

- [1] 陈乃详, 林汝长等, “可用于涡流式水轮机叶片三元设计的反问题计算方法”, 机械工程学报, 1990, NO.5
- [2] 林汝长, 瞿伦富等, “混流式水轮机转轮二元理论设计中叶片微分方程的数值积分”, 大电机技术, 1988.4
- [3] Hawthorne, W.R., et al, Theory of Blade Design for Large Deflections part one: Two-Dimensional cascade and part two: Annular cascade, Asme Journal of Engineering for power, April 1984, Vol.106
- [4] 林汝长, “水力机械流动理论”, 清华大学研究生教材, 1990
- [5] 郑人杰, “软件工程”, 清华大学出版社, 1991

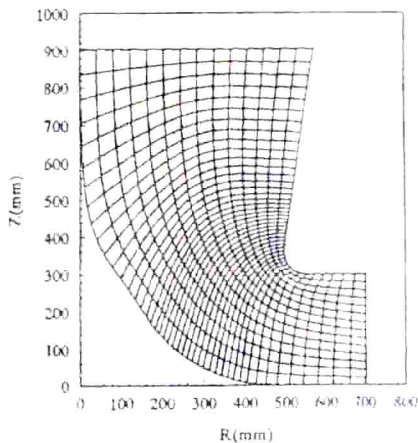


图 1 物理平面网格

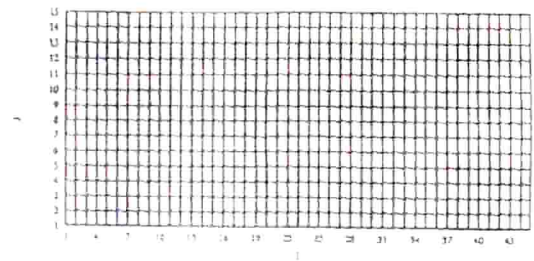


图 2 计算平面网格

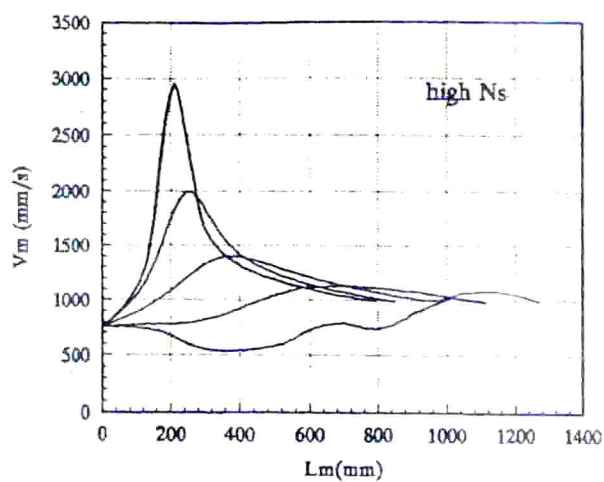


图3 初始流场流速分布

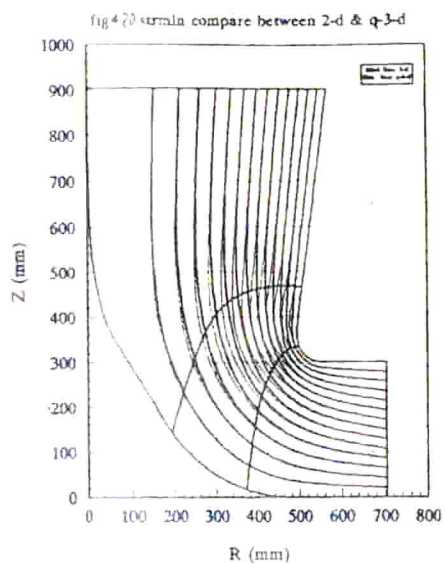


图5 轴面流线

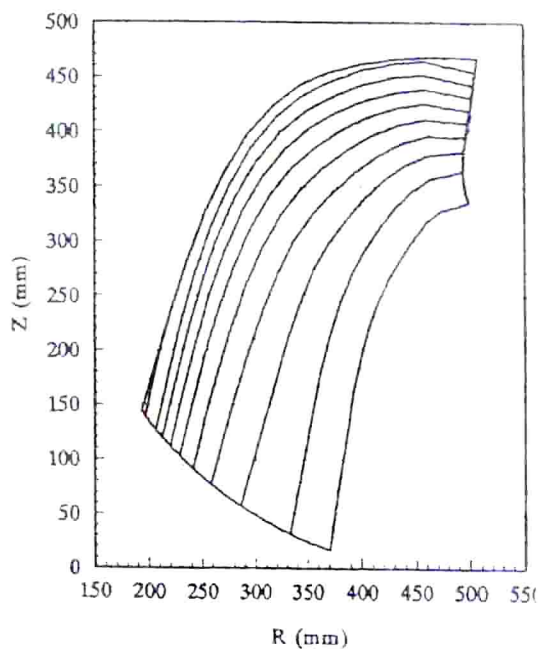


图4 收敛叶片轴线

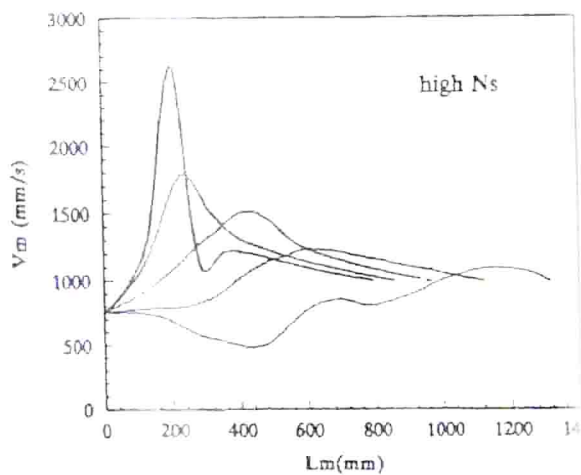


图6 迭代收敛后的流速分布

边界未定 Couette 流流体发热强度的计算

王良璧 赵汝焘 刘兰诺

(兰州铁道学院)

一、引言

在运动副的润滑中, Couette 流是最常见的一种流动。由于在润滑中 Couette 流的特点是: 限制流体的边界面无法直接确定; 流动是超微小缝隙流动 ($2\mu\text{m}$) 左右; 流体的粘度比较大。当限制流体边界面相对运动速度较高时, 压力较高会产生大量的摩擦热。当作用时间较短时, 热量来不及散失, 就会引起运动副表面的胶合。随着机械转动高速重载化的发展, 生热问题不得不引起人们的重视。生热的原因一般认为是流体流动时的耗散热, 但实际上产生热的原因还有压缩生热 [1]。在以前的研究中对一些微量进行了简化, 没有考虑压缩生热的问题, 而且在描述 Couette 流动时采用了雷诺方程 [2] [3]。本文用 N-S 方程代替雷诺方程, 认为粘度、密度为压力和温度的函数, 考虑压缩热对 Couette 流流体发热强度进行了计算。

二、基本方程

流动模型如图 1 所示: 为两相互啮合的齿, 根据等效原则可变为图 2 所示的图形, 坐标如图所示。

1、假设: (1) 限制油膜的边界面是绝热的。

(2) 不考虑油在齿宽方向上的流动及压力分布的变化。

(3) 由于变形后, 缝隙接近平行, 认为上下界面只有沿 x 方向的流动。

(4) 由于缝隙很小, 可认为 $\partial p / \partial y = 0$ 。

2、基本方程

(1) 连续性方程

$$u \partial \rho / \partial x + \rho \partial u / \partial x = 0$$

(2) N-S 方程

$$\rho u \partial u / \partial x = - \partial p / \partial x + \partial \mu / \partial x (4/3 \partial u / \partial x + 2 \mu / 3 \partial^2 u / \partial x^2 + \mu \partial^2 u / \partial y^2)$$

(3) 能量方程

$$\rho C_v \partial T / \partial x u = - p \partial u / \partial x + \Phi + q'$$

$$\text{式中: } \Phi = 4/3 \mu (\partial u / \partial x)^2 + \mu (\partial u / \partial y)^2$$

$$q' = \rho C_v \Lambda_0 \partial u / \partial x u$$

q' : 压缩生热率

A_0 : 常数 [1]

(4) 发热强度

$$q_1 = 1/\rho \left(h(x_1) \right) \int_0^{h(x_1)} u_{1,j} \rho_{1,j} C_v (T_{1,j} - T_0) dy$$

i, j : x 与 y 方向网络标号

(5) 限制流体边界面方程

$$\text{I 区: } h(x) = h_0 + x^2 / 2R$$

$$\text{II 区: } h(x) = h_0 + x^2 / 2R + 1/E' \int_{S_1}^{S_2} p(s) \ln(x-s)^2 ds$$

$$\text{III 区: } h(x) = h_0 + x^2 / 2R$$

E' 为综合弹性模量;

S_1, S_2 为高压区的起、终坐标。

(6) 密度和粘度方程

$$\rho = \rho_0 \{ 1 + (C_A p) / (1 + C_B p) + D t (T - T_0) \}$$

$C_A, C_B, D t$ 分别为常数

$$\mu = \mu_0 \text{EXP}(\alpha P - \lambda (T - T_0))$$

α, λ 均为常数, μ_0 为 T_0 时 p_0 条件下的粘度。

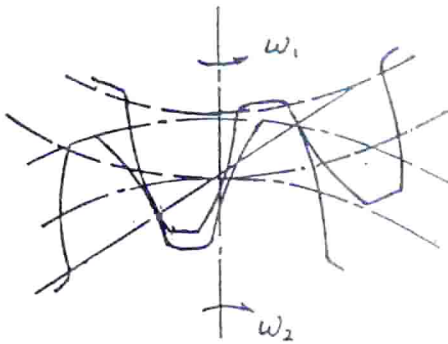


图 1

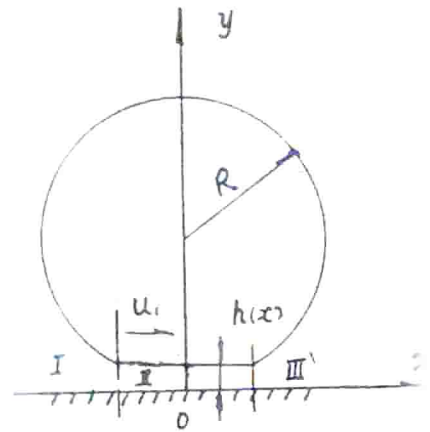


图 2

三、数值解

主要方程的解采用有限插分法, 由于边界面未定, 所以采用如下方法:

给定一初值 h_0 后, 设压力和温度均为二次函数, 用下方程组求解速度分布:

$$\therefore \partial p / \partial y = 0$$

$$\therefore \partial p / \partial x |_{i, j+1} = \partial p / \partial x |_{i, j}$$

由 $N-S$ 方程可得:

$$\begin{aligned} & (U(i+1, j) - 4U(i, j) + U(i-1, j) + U(i, j+1) - A(i, j)U(i, j)(U(i+1, j) \\ & - U(i-1, j))) / (1 - B(i, j)(U(i+1, j) - U(i-1, j))) = (U(i+1, j+1) - 4U(i, j+1) \\ & + U(i-1, j+1) + U(i, j) - A(i, j)U(i, j+1)(U(i+1, j+1) - U(i-1, j+1))) / \\ & (1 - B(i, j)(U(i+1, j+1) - U(i-1, j+1))) \end{aligned}$$

上式是在 $3/\tau_1^2 = 4/\xi_1^2$ 条件下获得的。

τ_1^2 、 ξ_1^2 分别为 y 、 x 方向上的步长。

$$A_{i,j} = (\rho_{i,j} \xi_1) / (8 u_{i,j})$$

$$B_{i,j} = 2/3 \partial \mu / \partial p \xi_1 |_{i,j}$$

此方程组为 $(n-1)(m-1)$ 个未知数的非线性方程组， n 、 m 为 x 、 y 方向的分格数。此方程组的解用拟牛顿法 [4]。解出 $U_{i,j}$ 后，再求解 $P_{i,j}$ 及 $T_{i,j}$ ，并与给定的 P 及 T 的值相互比较，直至符合一定误差为止。

由 $P_{i,j}$ 确定承载能力 W' ，并与原载荷 W 相互比较，调整 h 。

使 $(|W' - W|) / W < \varepsilon_1$ 。

由于 h 是随 x 变化的，所以 τ_1 也是变化的，网格之间的各点值采用线性插分法求得。

四、计算结果

当 $R=20\text{mm}$, $U_1=12.766\text{m/s}$, $U_2=7.406\text{m/s}$, $w=77.7\text{KPa}$, $P_{\max}=0.418((WE)'/R)^{0.5}=3.89 \times 10^6 \text{Pa}$
 $a=1.52((WR)/E')^{0.5}=0.127\text{mm}$

时，计算所得的压力分布如图 3 所示，温度分布如图 4 所示，发热强度如图 5 所示。图 5 中虚线表示文献 [5] 中用摩擦热法求得的热强度，从计算结果可以看出，用本文计算方法所得的发热强度与用摩擦热法所得的误差平均约为 10% 左右。误差比较大，分析其原因为：在摩擦热法求发热强度时应用如下方程：

$$q = (3fw) / (4a) (|U_1 - U_2|) ((1 - x^2/a^2)^{0.5}),$$

此式中摩擦系数 f 是一个很难确定的量，误差很大，而且 $|U_1 - U_2|$ 的出现，表明当相对速度为零时 $q=0$ ，但 $|U_1 - U_2|=0$ 时由于载荷的需要，运动副之发热强度并不为零（运动副之间油处于挤压流动）。所以本文计算所得 q 大于摩擦热法所得 q 是合理的。

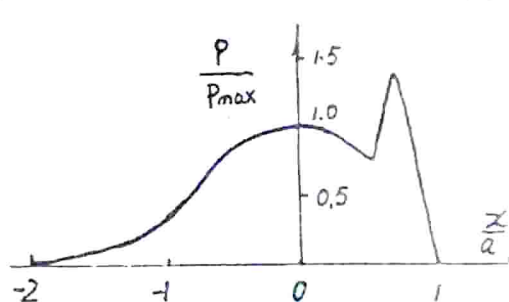


图 3

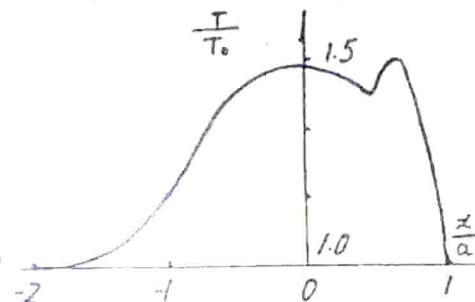
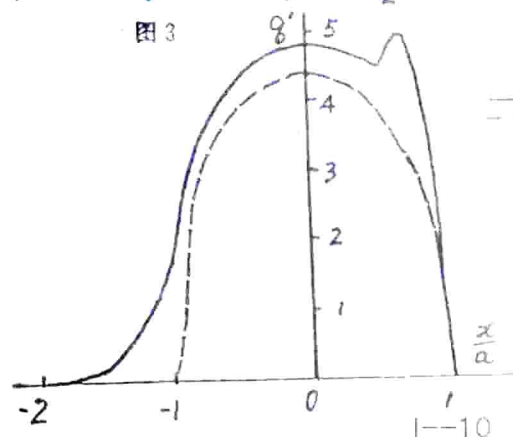


图 4



—— 本文计算结果
 - - - 文献[5]计算结果

左图 5

$$q' = 8 \times 10^{-5} \text{KJ/m}^2\text{s}$$

五、结论

- 1、运动副之间的Couette流动的发热强度，可以用本文的方法比较合理的计算得到。
- 2、运动副载荷增大时，油膜厚度下降，油压力很大，压缩生热必须考虑。
- 3、本文的计算结果可以作为齿轮齿表面温度计算的理论根据

参考文献

- 1、H PEEKEN, Dr-ling and JBLUME, Dipl-ling,
《Tribology-Friction, Lubrication and Wear
Fifty years on》Volume I, 1987。
- 2、牛锡传、屈东发，重载齿轮的热弹性流体动力润滑分析，《齿轮》Vol. 15,
NO. 3, 1991。
- 3、徐华、朱钧、朱光锐，经向滑动轴承的三维温度分布测量及其热传导情况分析、
《西安交通大学学报》Vol. 25, NO. 4, 1991。
- 4、邓建中等《计算方法》。西安交通大学出版社，1987。
- 5、龚桂义等《渐开线圆柱齿轮强度计算与结构设计》，机械工业出版社，1986。

倾角较小热面朝上斜平板

自然对流边界层转变点 R_a 的确定

王良璧 冯丽珠 梅元贵

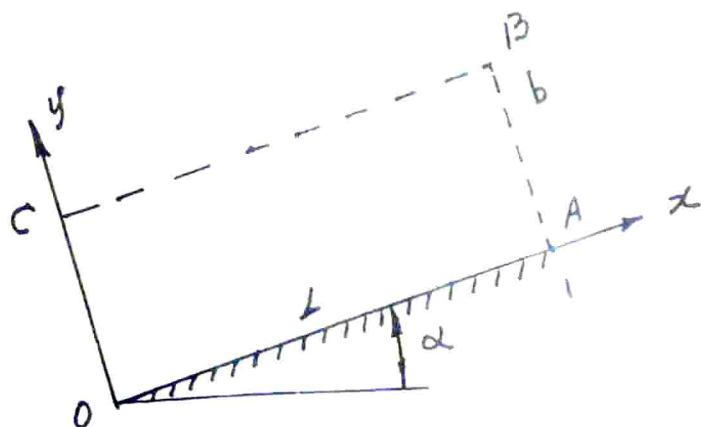
(兰州铁道学院)

一、引言

热面朝上斜平板自然对流边界层的转变有两个方面的因素：一为流体动力不稳定造成的转变；另一为热不稳定性造成的转变。热面朝上斜面板的倾角决定了属于哪一种因素造成的转变。文献[1]给出了由于热不稳定性造成转变的 R_a 与倾角的关系式。当倾角 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $R_a \rightarrow 0$ 。但实际上热面朝上时水平板具有一定的热稳定性, 只是 R_a 较小。文献[2][3]通过实验获得了 R_a 随倾角的变化, 但仅限于 $\alpha > 30^\circ$ 的情况。虽然文献[1]的计算结果与文献[2][3]的实验结果在 $\alpha > 30^\circ$ 时符合很好, 但当 $\alpha < 30^\circ$ 时计算结果与实验结果相差甚远。本文利用分析流体稳定性的方法来确定当 $0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$ 时的计算方法。

二、基本理论

设有一平板, 热面朝上, 如图(1)所示放置, 倾角 α 、板长 L 、坐标如图所示。设 $OABC$ 为近似热影响区, 由于升浮力沿 X 方向有分量, α 比较小, 我们只考虑升浮力在 y 方向的分量引起的流体运动。下面公式中所有量均为升浮力在 y 方向分量引起的流动量。



1—12

图1

流体的状态可由 Boussinesq 方程的无量纲化来描述:

$$\partial u_1 / \partial x + \partial u_2 / \partial y = 0$$

$$\partial u_1 / \partial t + 1 / Pr (u_1 \partial u_1 / \partial x + u_2 \partial u_1 / \partial y) = -\partial p / \partial x + \Delta u_1$$

$$\partial u_2 / \partial t + 1 / Pr (u_1 \partial u_2 / \partial x + u_2 \partial u_2 / \partial y)$$

$$= -\partial p / \partial y + \Delta u_2 + R T \cos \alpha \quad (1)$$

$$Pr \partial T / \partial t + u_1 \partial T / \partial x + u_2 \partial T / \partial y = \Delta T$$

$$\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$$

$$Pr = \nu / \alpha$$

$$R = (g \beta \Delta T L^4) / \alpha \nu^2$$

边界条件:

$$x=0, x=1: u_1=0 \quad \partial u_2 / \partial x=0 \quad \partial T / \partial x=0$$

$$y=0, y=b: u_2=0 \quad \partial u_1 / \partial y=0$$

$$y=0: T=1$$

$$y=b: T=0$$

(2)

如果有稳态方程:

$$u_{10}=0$$

$$u_{20}=0$$

$$p_0 = R(y-1/2y^2)$$

(3)

$$T_0 = b-y$$

成立, 则对任意的 Pr 、 R 数方程①、②有稳定解。方程③有稳定解的条件为:

$$\text{设: } u_1 = u_{10} + w_1$$

$$u_2 = u_{20} + w_2$$

$$T = T_0 + w_3$$

$$p = p_0 + w_4$$

$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$$

$$w = w(t, x, y) \quad (4)$$

则有如下条件:

$$LW=0 \quad |W|_r=0 \quad (5)$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 & 0 \\ \partial/\partial t - \Delta & 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial t - \Delta & -R \cos \alpha & \partial/\partial y \\ 0 & -1 & Pr \partial/\partial t - \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

$x=0, x=1$ 时:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$y=0, y=b$ 时:

$$I = \begin{bmatrix} \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $W = e^{\epsilon V}$

$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$$

$$V = V(\lambda, x, y)$$

$$\text{则有 } L^* V = 0 \quad I^* V|_r = 0$$

(6)

$$L^* = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 & 0 \\ \lambda - \Delta & 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \lambda - \Delta - R \cos \alpha & \partial/\partial x & \\ 0 & -1 & P r \lambda - \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$I^* = I$$

方程⑥的特征向量及特征值为:

$$\lambda_{kmw} = (P r + 1) / (2 P r b^2) \pi^2 (K^2 + b^2 m^2) (-1 \pm \sqrt{1 + (4 P r) (P r + 1)^2 (R \cos \alpha K^2 b^4) / (\pi^4 (K^2 + b^2 m^2)^3 - 1)})^{0.5}$$

$$k, m = 1, 2, \dots$$

$$w = 1, 2, \dots$$

当 $w=1$ 时取+号

当 $w=2$ 时取-号

$$v_{1kmw} = \alpha_{kmw} \sin(\pi m x) \cos[(\pi k y)/b] \cos \alpha$$

$$v_{2kmw} = \beta_{kmw} \cos(\pi m x) \sin[(\pi k y)/b] \cos \alpha$$

$$v_{3kmw} = \gamma_{kmw} \cos(\pi m x) \sin[(\pi k y)/b] \cos \alpha$$

$$\alpha_{kmw} = -(2 m b^{0.5} C_{kmw}) / (K B_{kmw})$$

$$\beta_{kmw} = (2 C_{kmw}) / (b^{0.5} B_{kmw})$$

$$\gamma_{kmw} = 2 / (b^{0.5} B_{kmw})$$

$$C_{kmw} = P r \lambda_{kmw} + \pi^2 / b^2 (k^2 + b^2 m^2)$$

$$B_{kmw} = \{ [(1 + b^2 m^2) / k^2] C_{kmw}^2 + R \cos \alpha P r \}^{0.5}$$

因为 $\lambda_{km2} < 0$, 所以方程⑥是稳定的, 方程③也有稳定的解。

对于 λ_{km1} , 存在有 R_a , 当 $R < R_a$ 时方程③是稳定的。并有:

$$\lambda_{km1}(R_a, P r, b) = 0$$

$$\text{即: } R_{akm} = \pi^4 b^2 / (\cos \alpha \cdot k^2) (k^2 / b^2 + m^2)^3$$

$$R_{akm} \text{ 最小值时 } b \text{ 为: } b = 2^{0.5} / m k$$

由文献(4)可知 $b \approx 0.3239$

所以设: $k=1, m=4$