



普通高等教育“十二五”规划教材

运筹学

第3版

Operations
Research

熊伟 编著



机械工业出版社
China Machine Press



普通高等教育“十二五”规划教材

运筹学

第3版

Operations Research

熊伟 编著



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目 (CIP) 数据

运筹学 / 熊伟编著. —3 版. —北京: 机械工业出版社, 2014.6
(普通高等教育“十二五”规划教材)

ISBN 978-7-111-44029-1

I. 运… II. 熊… III. 运筹学—高等学校—教材 IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 122452 号

本书介绍了线性规划、对偶理论、整数规划、目标规划、运输与指派问题、网络模型、网络计划、动态规划、排队论、存储论、决策论、多属性决策与博弈论等运筹学主要分支的基本理论、基本概念和计算方法, 用较多的例题介绍了运筹学在管理、经济等领域中的应用。每章均附有大量基本练习题, 并详细介绍了 WinQSB 2.0 软件的操作步骤及应用方法, 解决了运筹学某些复杂的计算问题, 使运筹学方法在实际中得以更好的应用和推广。附录中专门附有 WinQSB 2.0 软件介绍、上机实验指导书、应用案例、判断题、选择题、填空题等学习辅助资料。

本书既可作为高校管理类和经济类本科生、专业硕士研究生的运筹学教材, 学术型硕士研究生的参考教材, 也可以作为管理人员和企业决策人员的学习参考用书。

出版发行: 机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码: 100037)

责任编辑: 冯语嫣

责任校对: 董纪丽

印刷: 藁城市京瑞印刷有限公司

版次: 2014 年 7 月第 3 版第 1 次印刷

开本: 185mm × 260mm 1/16

印张: 27.25

书号: ISBN 978-7-111-44029-1

定价: 35.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88379210 88361066

投稿热线: (010) 88379007

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: hzjg@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问: 北京大成律师事务所 韩光 / 邹晓东

运筹学是一门以决策支持为目标的学科。运筹学的英文名称是 Operations Research(美)或 Operational Research(英), 缩写为 OR, 直译是作业研究、操作研究或运作研究。运筹学是 OR 的意译, 取自成语“运筹帷幄之中, 决胜千里之外”, 具有运用筹划、出谋献策、以策略取胜等内涵。人们在生产实践中的这种运筹思想自古就有, 但真正成为一门学科, 将一个带有普遍特性的运筹问题抽象成数学模型, 用数学理论求出决策方案的科学方法, 是 20 世纪 40 年代才形成的。

运筹学研究的内容[⊖]

运筹学的研究内容丰富, 应用范围广泛, 从军事、政治到管理、经济及工程技术等许多领域都能应用到运筹学的思想和方法。构成运筹学的理论大致分 3 个部分:

(1) 分析理论。主要研究资源的最优利用、设备最佳运行等问题。常用的数学分析方法有规划论(如线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、目标规划等)、网络模型、最优控制等。随着一些新型学科的发展, 还衍生了诸如灰规划、模糊规划、随机规划等专门的分析方法, 见教材第 1~8 章。

(2) 决策理论。主要研究方案或策略的最优选择问题。常用的数学分析方法有存储论、决策论、多准则决策、博弈论等, 见教材第 10~13 章。

(3) 随机服务理论, 即排队论。主要研究随机服务系统排队和拥挤现象问题, 讨论随机服务系统的服务效率、绩效评价和服务设施的最佳设置等问题, 见教材第 9 章。

运筹学的分析方法

运筹学是将经济与管理中的问题进行数据整理, 然后建立数学

[⊖] 参阅文献[3]。

模型,在此基础上进行定量运算与定量分析的一门学科。它广泛应用现有的科学技术和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者选择最优或较优决策提供定量依据,可以说运筹学也是一门决策学科。

由于运筹学是定性分析(如建立数学模型)与定量方法(如求解数学模型)相结合的一门综合应用科学,因此要掌握好运筹学方法并成功应用于实践,不仅要有丰富的自然科学和社会科学知识,掌握一定的数理基础方法,还要用系统的观念去认识问题分析问题,使研究的对象得到最优或满意的效果。

运筹学方法贯穿于4个基本步骤:提出问题(目标)与收集资料、建立模型、求解模型和模型的应用。

第3版修改内容

本书自2005年出版以来,已发行了十多万册,许多院校采用本书作为教材,得到了广大教师和读者的热情支持与厚爱。为了进一步改进和完善教材,本次机械工业出版社以各种形式多次征询教师意见,不少教师和读者多次通过电子邮件与编者沟通探讨,反馈了大量非常有价值的修改建议,这里表示诚挚的感谢。

综合教师与读者的建议,第3版修改的大致内容有以下几个方面。

(1)第2章增加了线性规划的扩展运用:DEA模型。重点介绍 C^2R 模型、 BC^2 模型及其经济含义。

(2)调整和删除了部分内容,如删除了分支-隐枚举法求解0-1规划问题。

(3)增加了一章多属性决策,即人们熟悉的综合评价问题,介绍了各种常用的赋权与决策方法,包括模糊决策、层次分析法及动态决策。

(4)增加了约100道思考与简答题。题目加在每章习题后面,使学生加深概念的理解,对问题进一步思考。

(5)增加了一个数据包络分析案例。

(6)增加了附录F填空题。

(7)增减、修改了部分例题和习题。

(8)增加了DASC、DPS及MCE软件介绍,见第12章。

本书的基本特色

第3版有以下主要特色。

(1)内容由浅入深,由易到难,注重启发式教学,每章习题后面编排了具有启发性的思考题。在通俗介绍运筹学基本内容的同时,适量介绍一些基本理论。

(2)加强基本概念和基本方法的训练。有些难点、重点或容易混淆的概念用“注意”特别提示。每章除了有大量的基本练习题外,附录D、E、F编写了大量的判断题、选择题和填空题,供学生课外练习。

(3)注重理论与实际相结合。例题尽可能将经济和管理的实际背景相联系,附录C收录了有一定难度的应用案例,可供学生课堂讨论。

(4)详细介绍WinQSB软件的基本操作及其应用。充分利用先进的计算机工具,发挥

WinQSB 软件功能, 解决比较大型数学模型的求解问题。附录 B 中附有上机实验指导书, 供学生上机实验学习参考。

(5) 主要关键词都能查到对应的英文单词。

关于运筹学软件

解决运筹学计算的软件较多, 常用英文软件有 MS-Excel、MATLAB、LINDO/LINGO, 中文软件如管理运筹学(韩伯棠教授开发); 此外关于数值计算与统计分析的英文软件有 SPSS、SAS, 中文软件有 DASC(<http://public.whut.edu.cn/slx/>)、DPS 等, 读者可以选择使用。

限于篇幅, 本书主要介绍 WinQSB 2.0 软件, 该软件包含了运筹学的大部分计算, 具体应用范围在附录 A 中介绍, 操作方法在每章最后一节有详细讲解。

关于 WinQSB 2.0 与 Win7 64 位系统不兼容的问题, 请上网搜索即可得到解决方案。

多媒体教学辅助资料

为配合教师进行多媒体教学和批改作业, 出版社为采用本书作为教材的教师提供配套的教辅资料。内容有: WinQSB 2.0 软件、全书所有内容的 PowerPoint 文档(可任意修改)、判断题、选择题及填空题答案、习题答案、应用案例答案、书中例题、习题及应用案例数据文件等。具体事宜请登录机械工业出版社华章公司网站(www.hzbook.com)联系。

由于编者水平有限, 书中有不妥之处恳请您给予指正, 欢迎继续交流讨论提出建议。关于印刷错误一旦发现在重印时立即改正。编者电子邮箱: xiongw@whut.edu.cn。

熊 伟

武汉理工大学管理学院

2014 年 3 月

教学建议

教学目的

运筹学是管理类与经济类专业的一门专业基础课。本课程教学的目的在于使学生根据研究问题的背景学会建立运筹学的数学模型，掌握运筹学的基本理论和基本运算技能，在运用运筹学方法分析和解决问题方面的能力得到培养和训练，能够运用计算机软件求解常用的运筹学数学模型，为进一步学习专业课程提供必要的基础，为培养适应现代化需要，掌握现代科学管理方法的管理人才服务。

前期需要掌握的知识

高等数学、线性代数、概率论与数理统计等课程相关知识。

课时分布建议

教学内容	学习要点	课时安排		案例使用建议
		本科	在职硕士	
第1章 线性规划	(1) 掌握建立数学模型的方法与技巧 (2) 了解线性规划的有关基本概念 (3) 运用图解法、单纯形法求解模型 (4) 掌握单纯形法的五个计算公式	14	6	案例 C-1
第2章 线性规划的对偶理论	(1) 了解如何写对偶模型 (2) 掌握有关对偶性质及影子价格的含义 (3) 学习对偶单纯形法 (4) 了解灵敏度分析及参数分析 (5) DEA 模型及其应用	10	4	案例 C-2, C-9
第3章 整数规划	(1) 了解整数规划数学模型的特征与类型 (2) 学习求解整数规划模型的分支定界法、割平面法及隐枚举法	4	4	案例 C-3

(续)

教学内容	学习要点	课时安排		案例使用建议
		本科	在职硕士	
第4章 目标规划	(1) 了解目标规划数学模型的特征 (2) 学习建立目标规划数学模型 (3) 掌握求解目标规划的图解法及单纯形法	4	4	案例 C-4
第5章 运输与指派问题	(1) 建立运输与指派问题的数学模型 (2) 掌握运输单纯形法的详细步骤 (3) 了解运输问题的应用 (4) 掌握匈牙利法的条件及计算步骤	8	4	案例 C-5、C-7
第6章 网络模型	(1) 熟悉网络图在管理中应用 (2) 掌握求最小树、最短路、最大流、最小费用最大流的各种算法 (3) 了解中国邮路与旅行售货员问题的求解	6	4	案例 C-6
第7章 网络计划	(1) 熟悉编制计划网络图的步骤和方法 (2) 掌握网络参数的计算 (3) 了解网络计划的几种优化方法	6	4	
第8章 动态规划	(1) 了解动态规划数学模型的构成要素与原理 (2) 掌握资源分配、生产与储存、背包问题等几种应用模型的建立与求解方法 (3) 运用动态规划方法求解简单的线性与非线性规划	8	4	
第9章 排队论	(1) 掌握排队论的基本概念 (2) 掌握单服务台、多服务台几种模型的状态概率及运行指标的计算 (3) 了解几种特殊分布模型的计算 (4) 了解排队系统的优化内容及优化方法	8	4	案例 C-8
第10章 存储论	(1) 了解存储论的基本概念 (2) 掌握四种确定性存储模型的推导与计算 (3) 了解经济批量模型的灵敏度分析与批量折扣分析 (4) 掌握单时期离散与连续随机模型的计算	8	4	
第11章 决策论	(1) 熟悉决策分析的概念、原则及分类 (2) 掌握非确定型决策的五种准则下的决策方法 (3) 掌握风险型决策的期望值、决策树、贝叶斯等决策方法 (4) 了解马尔可夫决策的基本内容与决策方法	6	4	

(续)

教学内容	学习要点	课时安排		案例使用建议
		本科	在职硕士	
第 12 章 多属性决策	(1) 掌握多属性决策的概念、决策的步骤 (2) 属性值的预处理方法 (3) 属性赋予方法 (4) 各种决策方法	8	4	
第 13 章 博弈论	(1) 熟悉博弈论的基本内容及纳什均衡的概念 (2) 运用反应函数法求解博弈 (3) 熟练掌握有限二人零和博弈的求解 (4) 了解其他几种博弈的概念及简单求解	6	4	
课时总计		94~100	40~56	

说明：本书的第 1~8 章基本是确定型问题，第 9、10、11 及 13 章涉及随机问题。在课时安排上，本科生一般是 48~64 个课时，可根据需要对内容进行组合。MBA、MPM、MPA 等在职硕士主要讲解各章的模型及其应用，进行课堂讨论与案例分析，掌握运用 WinQSB 软件求解模型的操作方法，如第 1 章线性规划，用 3 个课时介绍线性规划应用的条件、背景、范围和步骤，建立数学模型的方法与技巧，用 3 个课时演示软件操作与课堂讨论。

目 录

前 言 教学建议

第 1 章 线性规划	1
1.1 数学模型	1
1.1.1 应用模型举例	1
1.1.2 线性规划的一般模型	5
1.2 图解法	6
1.3 线性规划的标准型	9
1.4 线性规划的有关概念	11
1.5 单纯形法	14
1.5.1 普通单纯形法	14
1.5.2 大 M 和两阶段单纯形法	21
1.5.3 有关单纯形法计算公式	26
1.5.4 退化与循环	30
1.6 WinQSB 软件应用	31
习题	36
第 2 章 线性规划的对偶理论	42
2.1 对偶线性规划模型	42
2.1.1 引例	42
2.1.2 线性规划的规范形式	43
2.1.3 对偶模型	44
2.2 对偶问题的性质	47
2.2.1 对偶性质	47
2.2.2 影子价格	52
2.3 对偶单纯形法	53
2.4 灵敏度分析与参数分析	55
2.4.1 价值系数的灵敏度分析	56
2.4.2 资源限量的灵敏度分析	58
2.4.3 综合分析	60

2.4.4 参数分析	64
2.5 线性规划的扩展运用: DEA 模型	65
2.5.1 DEA 的基本概念	65
2.5.2 C^2R 模型	66
2.5.3 相对有效性评价	68
2.5.4 DEA 模型的经济含义	69
2.5.5 BC^2 模型	70
2.6 WinQSB 软件应用	72
习题	74
第 3 章 整数规划	78
3.1 整数规划的数学模型	78
3.2 纯整数规划的求解	81
3.2.1 求解纯整数规划的分支定 界法	81
3.2.2 求解 IP 的割平面法	83
3.3 0-1 规划的求解	85
3.4 WinQSB 软件应用	87
习题	88
第 4 章 目标规划	91
4.1 目标规划的数学模型	91
4.1.1 引例	91
4.1.2 数学模型	93
4.2 目标规划的图解法	97
4.3 单纯形法	99
4.4 WinQSB 软件应用	103
4.4.1 目标规划求解	103
4.4.2 多目标规划求解	104
习题	105

第 5 章 运输与指派问题	108	6.3.4 最小费用流	161
5.1 运输问题的数学模型及其 特征	108	6.3.5 最大流应用举例	163
5.1.1 数学模型	108	6.4 旅行售货员与中国邮路问题 ..	167
5.1.2 模型特征	109	6.4.1 旅行售货员问题	167
5.2 运输单纯形法	113	6.4.2 中国邮路问题	169
5.2.1 初始基本可行解	113	6.5 WinQSB 软件应用	170
5.2.2 求检验数	118	6.5.1 最小树与最短路	170
5.2.3 调整运量	121	6.5.2 最大流与最小费用流	171
5.2.4 最大值问题	124	6.5.3 旅行售货员问题	172
5.2.5 不平衡运输问题	125	习题	173
5.2.6 需求量不确定的运输 问题	127	第 7 章 网络计划	176
5.2.7 中转问题	128	7.1 绘制网络图	176
5.3 运输模型的应用	129	7.1.1 项目网络图的基本概念 ..	176
5.4 指派问题	132	7.1.2 绘制网络图	178
5.4.1 数学模型	132	7.1.3 工序时间的估计	179
5.4.2 解指派问题的匈牙利 算法	133	7.2 网络时间参数	181
5.4.3 其他变异问题	135	7.2.1 时间参数公式及其含义 ..	181
5.5 WinQSB 软件应用	137	7.2.2 计算实例	182
5.5.1 一般运输模型	137	7.2.3 项目完工的概率	184
5.5.2 中转问题	139	7.3 网络计划的优化与调整	186
5.5.3 综合生产计划问题	140	7.3.1 时间-成本控制	186
5.5.4 指派问题	142	7.3.2 资源的合理配置	190
习题	142	7.4 WinQSB 软件应用	192
第 6 章 网络模型	145	习题	195
6.1 最小树问题	146	第 8 章 动态规划	198
6.1.1 树的概念	146	8.1 动态规划数学模型	198
6.1.2 最小部分树	146	8.1.1 动态规划的原理	198
6.2 最短路问题	148	8.1.2 基本概念	200
6.2.1 最短路问题的网络模型 ..	148	8.2 资源分配问题	203
6.2.2 有向图的 Dijkstra 算法 ..	149	8.3 生产与存储问题	207
6.2.3 无向图的 Dijkstra 算法 ..	151	8.4 背包问题	210
6.2.4 最短路的 Floyd 算法	152	8.5 其他动态规划模型	212
6.2.5 最短路应用举例	155	8.5.1 求解线性规划模型	212
6.3 最大流问题	157	8.5.2 求解非线性规划模型	214
6.3.1 基本概念	157	8.5.3 设备更新问题	215
6.3.2 Ford-Fulkerson 标号 算法	158	8.6 WinQSB 软件应用	216
6.3.3 割集与割量	161	8.6.1 最短路问题	216
		8.6.2 背包问题	216
		8.6.3 生产与存储问题	217
		习题	218

第 9 章 排队论	221	10.3.1 离散型随机存储模型	262
9.1 排队论的基本概念	221	10.3.2 连续型随机存储模型	266
9.1.1 排队系统的描述	221	* 10.4 多时期存储控制系统	267
9.1.2 排队系统的基本组成	222	10.4.1 连续盘存的(s, Q)存储	
9.1.3 排队系统的主要数量指标、		控制系统	268
记号和符号	223	10.4.2 连续盘存的(s, S)存储	
9.2 排队系统常用分布	225	控制系统	272
9.2.1 负指数分布	225	10.4.3 定期盘存的(R, S)存储	
9.2.2 泊松分布	226	控制系统	272
9.2.3 k 阶爱尔朗分布	227	10.4.4 定期盘存的(R, s, S)	
9.3 单服务台模型	227	存储控制系统	273
9.3.1 基本模型	228	10.5 WinQSB 软件应用	273
9.3.2 有限队列模型	230	10.5.1 确定需求模型	274
9.3.3 有限顾客源模型	232	10.5.2 单时期离散型随机	
9.4 多服务台模型	234	需求模型	275
9.4.1 基本模型	234	10.5.3 单时期连续型随机	
9.4.2 有限队列模型	236	需求模型	276
9.4.3 有限顾客源模型	237	10.5.4 多时期动态需求批量	
9.5 其他服务时间分布模型	239	问题	276
9.5.1 一般分布模型	239	习题	277
9.5.2 定长分布模型	240		
9.5.3 爱尔朗分布模型	240	第 11 章 决策论	279
9.6 排队系统的优化	241	11.1 决策分析的基本问题	279
9.6.1 排队系统经济分析	241	11.1.1 决策分析的基本概念	279
9.6.2 最优服务率的确定	242	11.1.2 决策分析的基本原则	280
9.6.3 最优服务设施数的确定	244	11.1.3 决策分析的基本分类	281
9.7 WinQSB 软件应用	245	11.2 确定型和非确定型决策	282
9.7.1 基本操作方法	245	11.2.1 确定型决策	282
9.7.2 软件操作举例	246	11.2.2 非确定型决策	283
习题	248	11.3 风险型决策	286
		11.3.1 期望值准则	286
第 10 章 存储论	250	11.3.2 决策树法	287
10.1 确定型经济订货批量模型	251	11.3.3 贝叶斯决策	289
10.1.1 经济批量模型	252	11.4 效用理论	291
10.1.2 几种特殊经济批量		11.4.1 效用的概念	291
模型	254	11.4.2 效用曲线的绘制	291
10.1.3 再订货点	257	11.4.3 效用曲线的类型	292
10.1.4 存储策略分析	258	11.4.4 效用曲线的应用	293
10.2 经济批量模型参数分析	258	11.5 马尔可夫决策	293
10.2.1 灵敏度分析	258	11.5.1 马尔可夫决策模型	293
10.2.2 批量折扣分析	260	11.5.2 马尔可夫决策的基本	
10.3 单时期随机需求模型	261	方程组	298

11.5.3 马尔可夫决策问题的改进算法	299	13.1.3 博弈的结构和分类	348
11.6 WinQSB 软件应用	301	13.2 纳什均衡	348
11.6.1 效益表分析	301	13.2.1 纳什均衡定义	348
11.6.2 决策树	302	13.2.2 混合策略纳什均衡	350
11.6.3 贝叶斯分析	303	13.3 反应函数法	351
11.6.4 马尔可夫过程	303	13.3.1 基本方法	351
习题	304	13.3.2 反应函数法的应用	352
第 12 章 多属性决策	308	13.4 矩阵博弈	353
12.1 多属性决策的基本概念	308	13.4.1 数学定义	353
12.1.1 构成多属性决策的基本要素	308	13.4.2 纯策略矩阵博弈	354
12.1.2 多属性决策的基本步骤	310	13.4.3 混合策略矩阵博弈	356
12.1.3 属性的类型及预处理	311	13.4.4 矩阵博弈纳什均衡	357
12.2 属性权重	314	13.4.5 矩阵博弈求解方法	358
12.2.1 建立判断矩阵	314	13.5 有限二人非零和博弈	363
12.2.2 主观赋权方法	315	13.5.1 数学定义	363
12.2.3 客观赋权法	318	13.5.2 有限二人非零和博弈纳什均衡	364
12.2.4 综合集成赋权法	320	13.5.3 有限二人非零和博弈求解方法	364
12.3 决策方法	321	13.5.4 有限二人合作型博弈	366
12.3.1 五种准则法	321	13.6 其他博弈问题简介	368
12.3.2 加性加权法	321	13.6.1 二人无限零和博弈	368
12.3.3 加权积法	322	13.6.2 n 人博弈	368
12.3.4 理想解法	324	13.6.3 动态博弈	370
12.3.5 主分量分析法	326	13.7 WinQSB 软件应用	371
12.3.6 模糊决策法	328	习题	371
12.3.7 动态决策法	333	附录 A WinQSB 软件操作指南	374
12.4 层次分析法	336	附录 B 实验指导书	377
12.4.1 建立递阶层次结构	336	附录 C 案例与应用	384
12.4.2 判断矩阵与权系数	337	附录 D 判断题	396
12.4.3 一致性检验	337	附录 E 选择题	403
12.5 计算软件	341	附录 F 填空题	414
12.5.1 MCE 软件包	341	参考文献	420
12.5.2 DASC 与 DPS 软件	342	出版致谢	421
习题	343		
第 13 章 博弈论	346		
13.1 引言	346		
13.1.1 博弈论概述	346		
13.1.2 博弈三要素	347		

线性规划

1.1 数学模型

1.1.1 应用模型举例

线性规划(Linear Programming, LP)通常研究资源的最优利用、设备最佳运行等问题。例如,当任务或目标确定后,如何统筹兼顾,合理安排,用最少的资源(如资金、设备、原材料、人工、时间等)去完成确定的任务或目标;企业在一定的资源条件限制下,如何组织安排生产获得最好的经济效益(如产品量最多、利润最大)。

【例 1-1】生产计划问题。某企业在计划期内计划生产甲、乙两种产品。按工艺资料规定,每件产品甲需要消耗材料 A 2 公斤,消耗材料 B 1 公斤,每件产品乙需要消耗材料 A 1 公斤,消耗材料 B 1.5 公斤。已知在计划期内可供材料分别为 40 公斤、30 公斤;每生产一件甲、乙两种产品,企业可获得利润分别为 300 元、400 元,如表 1-1 所示。假定市场需求无限制,企业决策者应如何安排生产计划,使企业在计划期内总的利润收入最大。

表 1-1 产品资源消耗

资源 \ 消耗	产品		现有资源
	甲	乙	
材料 A	2	1	40
材料 B	1	1.5	30
利润(元/件)	300	400	

解 这个生产计划问题可用数学语言来描述,即可以用数学模型表示。假设在计划期内生产产品甲、乙的产量为待定未知数 x_1 、 x_2 。

用 Z 表示利润,则有 $Z=300x_1+400x_2$,企业的目标是要使利润达到最大,用数学表达式描述就是 $\max Z=300x_1+400x_2$ 。材料消耗总量不得超过供应量,应有 $2x_1+x_2\leq 40$, $x_1+1.5x_2\leq 30$ 。生产的产量不能小于零,用数学式子表示就是 $x_1\geq 0$ 、 $x_2\geq 0$ 。因此这个

问题的数学模型为可归纳为

$$\begin{aligned} \max Z &= 300x_1 + 400x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 1.5x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

在上面的例题中 x_j 称为决策变量, 不等式组称为约束条件, 函数 Z 称为目标函数, 随着讨论问题的要求不同, Z 可以是求最大值(如例 1-1)也可以是求最小值(如例 1-2), 因为 Z 是 x_j 的线性函数, Z 的最大值亦是极大值, 最小值亦是极小值, 所以有时也将 $\max Z$ 与 $\min Z$ 说成求 Z 的极大值与极小值。

线性规划的数学模型由决策变量、目标函数及约束条件构成, 称为三个要素。

其特征是:

- (1) 解决问题的目标函数是多个决策变量的线性函数, 求最大值或最小值;
- (2) 解决问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

如果要求部分或全部变量是整数, 则模型称为整数规划模型; 如果目标函数或约束条件是非线性的, 则模型称为非线性规划模型。

由例 1-1 知, 一个生产计划问题可用线性规划模型来描述。若求出 x_1, x_2 的值即最优解, 使目标函数达到最大值, 就得到一种最优生产计划方案。

【例 1-2】某超市决定: 营业员每周连续工作 5 天后连续休息 2 天, 轮流休息。根据统计, 超市每天需要的营业员如表 1-2 所示。

表 1-2 所需营业员数统计表

星期	需要人数	星期	需要人数
一	300	五	480
二	300	六	600
三	350	日	550
四	400		

超市人力资源部应如何安排每天的上班人数, 使超市总的营业员最少。

解 设 $x_j (j=1, 2, \dots, 7)$ 为休息 2 天后星期一到星期日开始上班的营业员数量, 则这个问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \min Z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\ \begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 300 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 350 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 400 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 480 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 600 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 550 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 7 \end{cases} \end{aligned}$$

像这类问题在实际中经常碰到, 例如实验室工作人员和医院的医护人员值班问题, 生产过程中在制品库存问题, 都可建立类似的线性规划模型。

【例 1-3】合理用料问题。某汽车需要用甲、乙、丙三种规格的轴各一根, 这些轴的规格分别是 1.5m、1m、0.7m, 这些轴需要用同一种圆钢来做, 圆钢长度为 4m。现在要制造 1000 辆汽车, 最少要用多少圆钢来生产这些轴?

解 这是一个条材下料问题。为了计算简便, 这里假定切割的切口宽度为零, 在实际应用中, 应将切口宽度计算进去。求所用圆钢数量分两步计算, 先求出在一根 4m 长的圆

钢上切割三种规格的毛坯共有多少种切割方案，再在这些方案中选择最优或次优方案，即建立线性规划数学模型。

第一步：设一根圆钢切割成甲、乙、丙三种轴的根数分别为 y_1, y_2, y_3 ，则切割方式可用不等式 $1.5y_1 + y_2 + 0.7y_3 \leq 4$ 表示，求这个不等式关于 y_1, y_2, y_3 的非负整数解并且余料不超过 0.7m 。例如 $y_1=1, y_2=1$ ，则 y_3 为 2，余料为 0.1 。像这样的非负整数解共有 10 组，也就是有 10 种下料方式，如表 1-3 所示。

表 1-3 下料方案

方案 规格(根)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	需求量
y_1	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1 000
y_2	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0	1 000
y_3	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5	1 000
余料(m)	0	0.3	0.5	0.1	0.4	0	0.3	0.6	0.2	0.5	

第二步：建立线性规划数学模型。设 $x_j (j=1, 2, \dots, 10)$ 为第 j 种下料方案所用圆钢的根数，则用料最少的数学模型为

$$\min Z = \sum_{j=1}^{10} x_j$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \geq 1\,000 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_6 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 & \geq 1\,000 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_7 + 2x_8 + 4x_9 + 5x_{10} & \geq 1\,000 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 10 \end{cases}$$

注意：余料不能超过最短毛坯的长度；最好将毛坯长度按降序排列，即先切割长度最长的毛坯，再切割次长的，最后切割最短的，不能遗漏了方案。在实际中，如果毛坯规格较多，毛坯的长度又很短的方案可能很多，甚至有几千个方案，用人工编排方案几乎是不可能的。解决这一问题可以编制一个计算机程序由计算机编排方案，给余料确定一个临界值 μ ，当某方案的余料大于 μ 时马上舍去这种方案，从而减少占用计算机内存，也简化了后面的数学模型，例如在表 1-3 中，去掉余料大于 0.4 的方案，则剩下 7 种方案，这时可能得到的是次优方案。也可以将毛坯种类分成若干组来编排方案。

【例 1-4】配料问题。某钢铁公司生产一种合金，要求的成分规格是：锡不少于 28% ，锌不多于 15% ，铅恰好 10% ，镍要界于 $35\% \sim 55\%$ 之间，不允许有其他成分。钢铁公司拟从五种不同级别的矿石中进行冶炼，每种矿物的成分含量和价格如表 1-4 所示。矿石杂质在冶炼过程中废弃，求每吨合金成本最低的矿物数量。假设矿石在冶炼过程中金属含量没有发生变化。

表 1-4 矿石的金属含量

合金 矿石	锡(%)	锌(%)	铅(%)	镍(%)	杂质(%)	费用(元/吨)
1	25	10	10	25	30	340
2	40	0	0	30	30	260
3	0	15	5	20	60	180
4	20	20	0	40	20	230
5	8	5	15	17	55	190

解 设 $x_j (j=1, 2, \dots, 5)$ 是第 j 种矿石数量, 目标函数是总成本最低, 得到下列线性规划模型

$$\begin{cases} \min Z = 340x_1 + 260x_2 + 180x_3 + 230x_4 + 190x_5 \\ 0.25x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_4 + 0.08x_5 \geq 0.28 \\ 0.1x_1 + 0.15x_3 + 0.2x_4 + 0.05x_5 \leq 0.15 \\ 0.1x_1 + 0.05x_3 + 0.15x_5 = 0.1 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \leq 0.55 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \geq 0.35 \\ 0.7x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.8x_4 + 0.45x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

注意: 矿石在实际冶炼时金属含量会发生变化, 建模时应将这种变化考虑进去, 有可能是非线性关系。配料问题也称配方问题、营养问题或混合问题, 在许多行业的生产中都能遇到。

【例 1-5】投资问题。某投资公司拟将 5 000 万元的资金用于国债、地方国债及基金三种类型证券投资, 每类各有两种。每种证券的评级、到期年限及每年税后收益率如表 1-5 所示。

表 1-5 证券投资方案

序号	证券类型	评级	到期年限	每年税后收益率(%)
1	国债 1	1	8	3.2
2	国债 2	1	10	3.8
3	地方债券 1	2	4	4.3
4	地方债券 2	3	6	4.7
5	基金 1	4	3	4.2
6	基金 2	5	4	4.6

决策者希望: 国债投资额不少于 1 000 万元, 平均到期年限不超过 5 年, 平均评级不超过 2。问每种证券各投资多少使总收益最大。

解 设 $x_j (j=1, 2, \dots, 6)$ 为第 j 种证券的投资额, 目标函数是税后总收益

$$Z = (8 \times 3.2x_1 + 10 \times 3.8x_2 + 4 \times 4.3x_3 + 6 \times 4.7x_4 + 3 \times 4.2x_5 + 4 \times 4.6x_6) / 100$$

资金约束: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 5\,000$

国债投资额约束: $x_1 + x_2 \geq 1\,000$

平均评级约束: $\frac{x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 2$

平均到期年限约束: $\frac{8x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 4x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 5$

整理后得到线性规划模型

$$\begin{cases} \max Z = 0.256x_1 + 0.38x_2 + 0.172x_3 + 0.282x_4 + 0.126x_5 + 0.184x_6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 5\,000 \\ x_1 + x_2 \geq 1\,000 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \leq 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 - x_6 \leq 0 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6 \end{cases}$$

【例 1-6】均衡配套生产问题。某产品由 2 件甲零件和 3 件乙零件组装而成。两种零件必须在设备 A、B 上加工, 每件甲零件在 A、B 上的加工时间分别为 5 分钟和 9 分钟, 每件乙零件在 A、B 上的加工时间分别为 4 分钟和 10 分钟。现有 2 台设备 A 和 3 台设备 B, 每天可供加工时间为 8 小时。为了保持两种设备均衡负荷生产, 要求一种设备每天的加工总时间不