

推广与应用微波介质谐振器
学术交流论文集

中国通信学会微波通信委员会
陕西省通信学会无线委员会

一九八七年

介质谐振器的耦合理论

上海科技大学 李 英

介质谐振器在实际电路应用中必须解决谐振器与电路元件(导波系统、探针、环等)、谐振器之间,以及简并模之间的耦合问题,现分述如下。

一、介质谐振器和微带、槽线、鳍线间的耦合

图1表示圆柱谐振器中 TE_{011} 模和微带的耦合, TE_{011} 模可用磁偶极矩 M 近似,使 M 与微带平面垂直,则谐振器的磁力线即可和微带交链。而形成反应式电路,谐振器对谐振频率上的微波能反射。其等效电路如图2,图中 L_r 、 C_r 、 R_r 为谐振器等效参数, L_1 、 C_1 、 R_1 则是微带的参数,两者间的磁耦合为 L_m 。在耦合平面处,图2可简化为图3,并可进一步简化为图4。谐振器的转移阻抗 Z_t 与微带串联,而

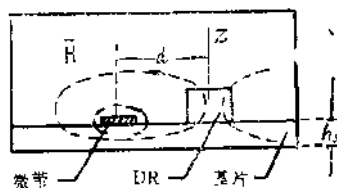


图1 圆柱介质谐振器 TE_{011} 模和微带的耦合

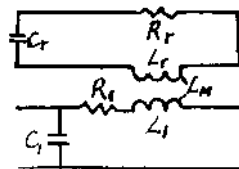


图2 介质谐振器和微带耦合的等效电路



图3 在耦合平面处的等效电路

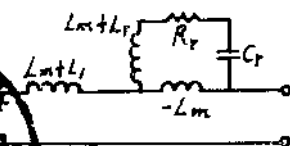


图4 图3的简化等效电路

$$Z = j\omega L_1 + \frac{\omega L_m}{R_r + j[\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}]} \quad (1)$$

在谐振频率附近, ωL_1 可略, 故 Z_t 变为

$$Z_t = \omega Q_0 \frac{L_a^2}{L_r^2} \frac{1}{1 + jX} \quad (2)$$

DT 15/35
07

式中,
$$\tilde{x} = 2 Q_0 \frac{\Delta \omega}{\omega} \quad (3)$$

$$Q_0 = \frac{L_r \omega_0}{R_r}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_r C_r}}$$

谐振时 $x = 0$, 转移阻抗为实数

$$Z_t = R = Q_0 \omega_0 \frac{L_m^2}{L_r} \quad (4)$$

(2) 式可表示为并联谐振电路图 5, 其中

$$L = \frac{L_m^2}{L_r} \quad (5)$$

$$C = \frac{L_r}{\omega_0^2 L_m^2} \quad (6)$$

$$R = Q_0 \omega_0 \frac{L_m^2}{L_r} \quad (7)$$

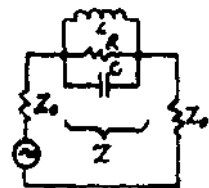


图 5 介质谐振器和微带耦合的简化等效电路

定义耦合系数

$$\beta = \frac{Z_t(\omega_0)}{R_e} \quad (8)$$

又 $R_e = 2 Z_0$

故
$$\beta = \frac{\omega_0 Q_0}{2 Z_0} \frac{L_m^2}{L_r} \quad (9)$$

又
$$Q_e = \frac{Q_0}{\beta} = \frac{2 Z_0 L_r}{\omega_0 L_m^2} \quad (10)$$

可见, 为了确定耦合系数, 必须确定 Q_e 与间距 d 的关系, 这在 (10) 中, 由式 $\frac{L_r}{L_m^2}$ 所表

征。对 Q_e 的求解可有 $\frac{H}{I}$ 和有限元两种方法。

1. $\frac{H}{I}$ 法

令微带中电流为 I , 则谐振器中感生电压为

$$e_r = j \omega L_m I \quad (11)$$

又电流 I 产生的磁场为 H , 则有

$$e_r = \oint E \cdot dl = j \omega \mu_0 \oint H \cdot dS \quad (12)$$

这时偶假设 $\bar{M}$ 用环面 S 的环电流表示, $\bar{E}$ 、 $\bar{H}$ 是环中心值, 环极小时可认为在环面中为常数。从 (11) 和 (12) 可得

$$L_m = \frac{\mu_0}{l} HS \quad (13)$$

若谐振器电流为 I_r , 则磁矩为

$$M = SI_r \quad (14)$$

谐振器中的储能为

$$W = \frac{1}{2} L_r I_r^2 \quad (15)$$

将 (14) 和 (15) 式代入 (13) 式得

$$\frac{L_m^2}{L_r} = \mu_0^2 \frac{M^2}{2W} \left[\frac{H}{I} \right]^2 \quad (16)$$

从 (16) 式可见, 从 $\left[\frac{H}{I} \right]$ 的比值即可确定 $\frac{L_m^2}{L_r}$ (也即 Q_e) 与 d 的关系。而 $\left[\frac{H}{I} \right]$

的求解可认为磁场 H 由两个电流产生, 一个微带中电流 (微带宽 W), 另一个是在接地面 $3W$ 宽度上均匀分布的电流所产生, 由此可求出

$$\frac{H}{I} = \ln \frac{\left[d + \frac{W}{2} \right]^2 + \left[\frac{H}{2} \right]^2}{\left[d - \frac{W}{2} \right]^2 + \left[\frac{H}{2} \right]^2} - \frac{1}{3} \ln \frac{\left[d + \frac{3W}{2} \right]^2 + \left[h_s + \frac{H}{2} \right]^2}{\left[d - \frac{3W}{2} \right]^2 + \left[h_s + \frac{H}{2} \right]^2} \quad (17)$$

2. 有限元法

对微带模作准TEM模近似, 可解出微带和外壳上的电流密度, 由此可求出各点的 H , 从而确定 $\left[\frac{H}{I} \right]$ 值。

Q_e 的第二种求解法为磁通法, 如图 6。设谐振器中电流为 I_r , 则在微带上感应的电压为

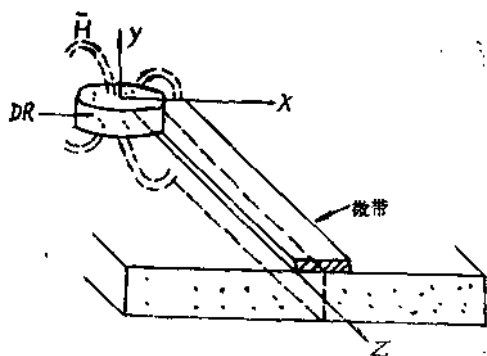


图 6 介质谐振器与微带间的磁通交链

$$\dot{e} = j \omega \dot{L}_m \dot{I}_t \quad (18)$$

它可由通过微带下基片横截面的磁通量求出

$$e = j \omega \mu_0 \int_V \bar{H} \cdot d\bar{S} \quad (19)$$

联合(18)(19)和(15)式代入(10)可得

$$Q_e = \frac{2 Z_0}{\omega_0 \mu_0^2} \cdot \frac{W}{\left[\int_V \bar{H} \cdot d\bar{S} \right]^2} \quad (20)$$

在上述两种方法中, 储能和磁矩分别为

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \int_V \bar{E} \cdot \bar{E}^* dV \quad (21)$$

$$\bar{M} = \frac{1}{2} j \omega \epsilon_0 \epsilon_r \int_V \bar{R} \times \bar{E} dV \quad (22)$$

磁通法比 $\frac{H}{I}$ 法容易得到电磁参数和 Q_e 值。

根据图7的分布参数等效电路可得
到谐振器微带耦合的散射参数

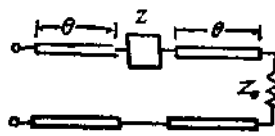


图7 谐振器微带耦合的分布等效电路

$$S_{11} = \frac{Z_t / Z_0}{2 + \frac{Z_t}{Z_0}} e^{-2j\theta} \quad (23)$$

$$S_{12} = \frac{2}{2 + \frac{Z_t}{Z_0}} e^{-2j\theta} \quad (24)$$

图8为圆柱谐振器 $TM_{0,1}$ 模与微带的耦合, 这时 $TM_{0,1}$ 模可用电偶极子 $\bar{P}$ 表示, 由此可求出

$$Q_e = \omega_0 \frac{4 Z_0 W}{\left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{E} \cdot d\bar{l} \right\}^2} \quad (25)$$

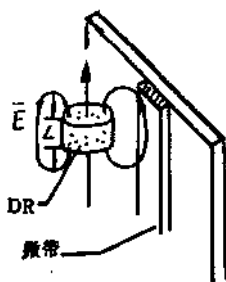


图8 圆柱谐振器 $TM_{0,1}$ 模和微带的耦合

图9是图8耦合结构的等效电路。

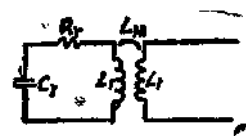


图9 图8的等效电路

图10是圆柱介质谐振器 $HE_{1,1(\delta+1)}$ 模横向磁偶极子的场结构, 图11和12是 $HE_{1,1(\delta+1)}$ 模和微带耦合的两种取向。图13是圆柱介质谐振器和槽线间的耦合。

图14是圆柱介质谐振器 $TE_{0,1}$ 模与槽线的耦合, 而

$$Q_e = \omega_0 \frac{W_R}{P_d} \quad (26)$$

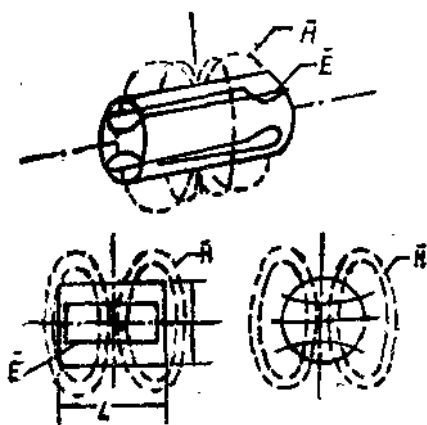


图10 圆柱介质谐振器 $HE_{11(\delta+1)}$ 模
横向磁偶极子的场结构

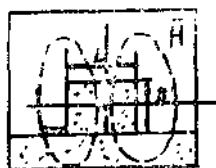


图11 圆柱介质谐振
器的轴与微带
垂直时, HE_{11}
($\delta+1$)模与微带
的耦合



图12 圆柱介质谐振
器的轴与微带
平行时, $HE_{11(\delta+1)}$ 模与
微带的耦合



图13 介质谐振器和槽线的耦合

谐振器在鳍线中所激励的 n 模的功率的计算, 可将谐振器的场按传输模展开, 据谐振器中的极化电流 $\bar{J}_P$, 则耗散在鳍线中的功率为

$$P_d = C_n^{-1/2} \cdot R_n \int \{ \bar{e}_n \times \bar{h}_n \cdot \hat{z} dS \} \quad (27)$$

$$C_n = - \frac{1}{P_n} \int_V (\bar{e}_n + \bar{e}_{nz}) \cdot \bar{J}_P e^{-\gamma_n z} dV \quad (28)$$

$$P_n = 2 \int_S \bar{e}_n \times \bar{h}_n \cdot d\bar{S} \quad (29)$$

$$\bar{J}_P = j \omega_0 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \bar{E}_R \quad (30)$$

式中 $\bar{E}_R$ 为谐振器中电场; $(\bar{e}_n + \bar{e}_{nz})$ 为鳍线 n 模的电场, 而谐振器中储能为

$$W_R = 0.5 \int_V \epsilon_r \epsilon_0 \bar{E}_R \cdot \bar{E}_R^* dV \quad (31)$$

二、介质谐振器和介质镜像波导间的耦合

介质波导适合于毫米波电路, 图15是圆柱介质谐振器 $TE_{01\delta}$ 模和介质镜像波导 EH_{11}

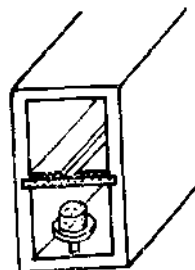


图14 介质谐振器与
单面鳍线间的耦合

之间的耦合,使谐振器轴 Z' 与介质波导传播轴 Z 相垂直,利用磁通法,可求出介质波导中所感生的电压为

$$e = j\omega\mu_0 C \int \bar{H}_r \cdot d\bar{S} \quad (32)$$

式中系数 C 是计及 $TE_{0,10}$ 模磁场 H_r 与 $EH_{1,1}$ 模磁场 $\bar{H}_g$ 间不垂直的系数,即

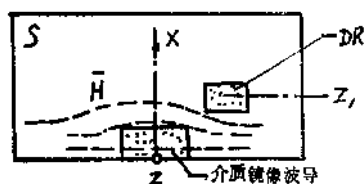


图15 介质谐振器和介质镜像波导间的耦合



图16 图15的等效电路

$$C = \frac{\int_S \bar{H}_r \cdot \bar{H}_g^* dS}{\left(\int_S \bar{H}_r \cdot \bar{H}_r^* dS \int_S \bar{H}_g \cdot \bar{H}_g^* dS \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (33)$$

这时介质波导的特性阻抗 Z_0 为

$$Z_0 = \frac{2P}{I_z^2} \quad (34)$$

其中
$$P = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (E_x H_y - E_y H_x) dX dY \quad (35)$$

$$I_z = 2 \int_0^\infty \hat{Y} \cdot \hat{X} H_y dX \quad (36)$$

三、截止波导中的介质谐振器

如图17,圆柱介质谐振器位于截止波导A的一侧,截止波导两端接传播波导B(A和B分别在谐振器 $TE_{0,10}$ 模谐振频率上截止和传播 $TE_{1,0}$ 模)。截止波导中的场由谐振器电流 $\bar{J}$ 所激励,故可用图18表示。当波导由 $Z' > d$ 处激励时,在 $Z' = 0$ 和 $Z' = d$ 处的反射系数分别为 ρ_{1z} 和 ρ_{2z} ,考虑波导接头处的多重反射,则在I区的 n 正规模的电、磁场为

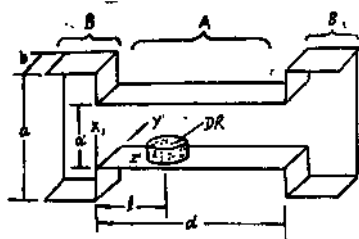


图17 插入截止波导中的介质谐振器与传播波导间的耦合

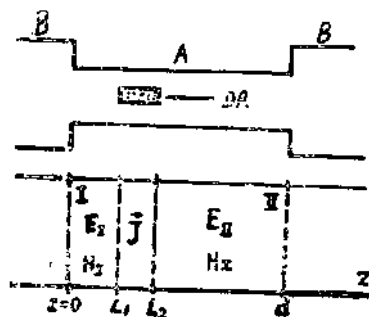


图18 波导中源的分布

$$\begin{aligned} e_{aI} &= e_{1a} \left[\frac{e^{\gamma n z} + \rho_{1a} \rho_{2a}'}{1 - \rho_{1a} \rho_{2a}'} \right] - \bar{e}_{2a} \left[\frac{e^{\gamma n z} - \rho_{1a} \rho_{2a}'}{1 - \rho_{1a} \rho_{2a}'} \right] \\ h_{aI} &= -h_{1a} \left[\frac{e^{\gamma n z} + \rho_{1a} \rho_{2a}'}{1 - \rho_{1a} \rho_{2a}'} \right] - \bar{h}_{2a} \left[\frac{e^{\gamma n z} - \rho_{1a} \rho_{2a}'}{1 - \rho_{1a} \rho_{2a}'} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

式(37)中 $\rho_{2a}' = \rho_{2a} e^{-2\gamma n d}$ 。同样，若在 $Z' < 0$ 处激励，则 II 区中的场为

$$\begin{aligned} e_{aII} &= e_{2a} \left[\frac{e^{-\gamma n z} + \rho_{2a}' \rho_{1a}'}{1 - \rho_{1a} \rho_{2a}'} \right] + e_{1a} \left[\frac{e^{-\gamma n z} - \rho_{2a}' \rho_{1a}'}{1 - \rho_{1a} \rho_{2a}'} \right] \\ h_{aII} &= h_{2a} \left[\frac{e^{-\gamma n z} + \rho_{2a}' \rho_{1a}'}{1 - \rho_{1a} \rho_{2a}'} \right] + h_{1a} \left[\frac{e^{-\gamma n z} - \rho_{2a}' \rho_{1a}'}{1 - \rho_{1a} \rho_{2a}'} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

这样就可将在 $L_1 < Z' < L_2$ 区源辐射的场表示为波导模无限项求和

$$\begin{aligned} E_I &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{nI} e_{nI} \\ \bar{H}_I &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{nI} h_{nI} \end{aligned} \quad (0 < Z' < L_1) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} E_{II} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{nII} e_{nII} \\ H_{II} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{nII} h_{nII} \end{aligned} \quad (L_2 < Z' < d) \quad (40)$$

式中幅度系数为

$$\begin{aligned} a_{nI} &= \frac{1}{2} (1 - \rho_{1a} \rho_{2a}') \int_V \bar{e}_{nII} \cdot \bar{J} dV \\ a_{nII} &= -\frac{1}{2} (1 - \rho_{1a} \rho_{2a}') \int_V e_{nI} \cdot \bar{J} dV \end{aligned} \quad (41)$$

若截止波导中高次模衰减极快，而谐振器离开 $Z' = d$ 截面处较远，则 $\rho_{2a} \approx 0$ ，即忽略 $Z' = d$ 处接头的反射。据(37)~(40)式，可求出在 $Z' = 0$ 平面处由 J 所产生的场电为

$$\bar{E}_A = a_{1I} e_{1I}(0) \quad (42)$$

为了计算位于截止波导中谐振器的 Q_e ，应求出它向波导中辐射的功率 P_r ，据等效原理，应求出 $Z' = 0$ 处 S_0 面上磁流 $\bar{M}_s$ 的辐射，如图19，而

$$\bar{M}_s = \bar{E}_A \times \hat{n}, \quad \hat{n} = -\hat{Z} \quad (43)$$

即 $P_r = \int_{s_0} (\vec{E}_r \times \vec{H}_r^*) \cdot \hat{z} dS$ (44)

其中 $\left. \begin{aligned} \vec{E}_r &= C_1 \cdot \vec{e}_{1111} \\ \vec{H}_r &= C_1 \cdot \vec{h}_{1111} \end{aligned} \right\}$ (45)

$C_1 = \frac{1}{2} \int_V \vec{h}_{1111} \cdot \vec{M}_1 dV$ (46)

由此可求出

$Q_e = \omega_0 \frac{W}{P_r}$ (47)

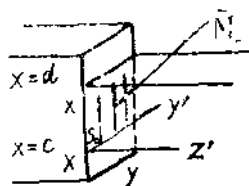


图19 在两波导接头处的等效表面磁流

四、截止波导中介质谐振器的环耦合

如图20介质谐振器的TE₀₁₂模与环耦合，其等效电路如图21，L_P为环的自感，则谐振时的输入阻抗为

$Z = \omega_0 Q_0 \frac{L_m^2}{L_r}$ (48)

而

$Q_e = \frac{2 Z_0 L_r}{\omega_0 L_m^2}$ (49)

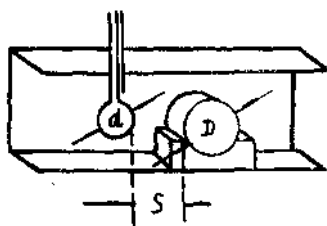


图20 介质谐振器的环耦合

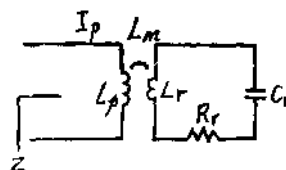


图21 图20等的效电路

为了求出 ($\frac{L_r}{L_m}$) 与磁场H的关系，可考虑介质谐振器所激励的消散模和环面S的磁通交链，由此可求出

$Q_e = \frac{2 Z_0 \int_V}{\omega_0 \mu_0^2 [\int \vec{H} \cdot \vec{dS}]^2}$ (50)

式中Z₀是和环所连同轴线的特性阻抗。或者，也可用谐振器的偶极子 $\vec{M}$ 在截止波导中激励的，在磁环中心的磁场H_r进行计算。这时

$Q_e = \frac{2 Z_0 W}{\omega_0 \mu_0 H_r S^2}$ (51)

$$H_y = H_x = \alpha_{10} h_x e^{-\alpha_{10} s}$$

$$\alpha_{10} = \frac{j\omega \mu_0}{2} \sqrt{\frac{2}{ab Z_{10}}} M \quad (52)$$

式中 $Z_{10} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{(fc/f)^2 - 1}}$

其中 f_c 为 TE_{10} 截止频率, 又

$$h_x = \sqrt{\frac{2}{ab Z_{10}}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

五、截止波导中的两介质谐振器间的耦合

如图22, 认为波导中的消散模是由谐振器偶极子所激励, 当两谐振器相距较近时, 通过这些消散模耦合, 则环2中由环1中电流所感生的电压为

$$V_2 = j\omega L_m i_1 \quad (53)$$

又 $V_2 = j\omega \int_V \vec{H}_2 \cdot d\vec{S} \quad (54)$

据(53)(54)式, 可求出耦合系数

$$k = \frac{L_m}{L_r} = \mu_0 \frac{M}{2W} H_2 \quad (55)$$

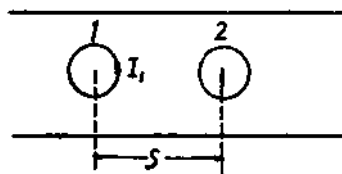


图22 截止波导中两谐振器间的耦合

磁环在波导中激励的波幅为

$$\left. \begin{aligned} a_p &= \frac{j\omega \mu_0}{2} H_p^+ M \\ b_p &= \frac{j\omega \mu_0}{2} H_p^- M \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

当谐振器在矩形波导中横向取向时(图23), 则 $\vec{M}$ 将激励 TE_{mn} 模 (m 为奇, n 为偶), 这时

$$k = \frac{\mu_0 M^2}{2W} \sum_n \alpha_{n0} e^{-\alpha_{n0} s} + 2 \sum_{m,n} \frac{\alpha_{m0}}{\alpha_{mn}} e^{-\alpha_{mn} s} \quad (57)$$

式中 α_{mn} 是 TE_{mn} 模的衰减常数, 当 m 为奇, n 为偶时, TE_{10} 为最低次模, 其衰减也最小, 故当两谐振器相距较远时, 只要考虑 TE_{10} 模的耦合, 这时

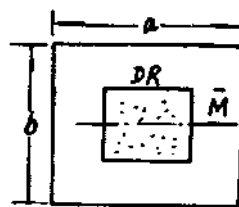


图23 在矩形波导中作横向取向的介质谐振器

$$k = \frac{\mu_0 M^2}{2W} \alpha_{10} e^{-\alpha_{10} s} \quad (58)$$

当谐振器轴向取向时(图24), 只有 $h_z \neq 0$ 的 TE_{mn} 模对耦合有贡献。若谐振器位于波导中心则奇次 TE_{mn} 不被激励; 偏离中心时, 除 $m=n=0$ 外, 皆被激励。

对于图25, 由于圆对称 TE_{0n} 被激励。至于谐振器在圆波导中心作横向取向时, 只激励具 H_z 的 TE_{mn} 模, 即 TE_{1n} 模, $n=1, 2, 3, \dots$ 。

六、位于截止波导中两介质谐振器, 通过传播波导激励

如图26, 两谐振器间的耦合由谐振器间的消散模和波导中的消散模两部分构成, 前者为

$$k_1 = \frac{j \int E_z \cdot J dV}{2\omega W} \quad (59)$$

后者为

$$k_2 = \left| \frac{\omega - \omega_0}{\omega} \right| \quad (60)$$

其中 ω 可从由于引入第二个谐振器引起的频率微扰, 即

$$\omega - \omega_0 = \frac{\int J \cdot \bar{E}^* dV}{\int (\mu \bar{H} \cdot \bar{H}^* + \epsilon \bar{E} \cdot \bar{E}^*) dV} \quad (61)$$

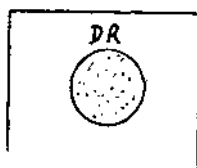


图24 在矩形波导中作轴向取向的介质谐振器

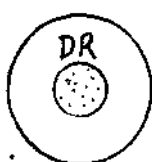
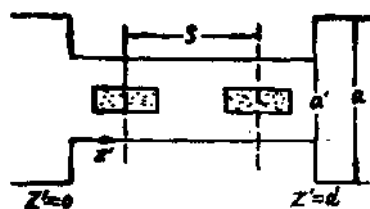


图25 在圆柱波导中作轴向取向的介质谐振器



26 截止波导中两介质谐振器通过传播波导激励

七、两个介质谐振器通过圆柱腔壁上的小孔耦合

如图27的两腔A和B, 通过小孔耦合后形成的谐振系统的谐振频率为 ω_a 和 $\omega_a - \Delta\omega$, 当孔两侧的切向磁场指向相同时, 则腔谐振在孤立腔的谐振频率 ω_a 上, 当相反时则为 $\omega - \Delta\omega$, 而耦合系数则为

$$k = \frac{\Delta\omega}{\omega_a} = \frac{M_a \mu_0^2 H_t^2}{\epsilon_0 \int E^2 dV} \quad (62)$$

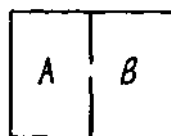


图27 两腔通过小孔耦合

式中 M_a 为耦合孔磁矩, H_t 为孔面上切向磁场, 对于磁耦合(62)式为

$$k = \frac{P_a H_{ot} H_{-ot}}{\int H_x H_y dV} \quad (63)$$

对于电耦合

$$k = \frac{P_m E_{e1} E_{e2}}{\int \epsilon E_{e1} E_{e2} dV} \quad (64)$$

式中 P_m 和 P_e 分别为小孔的磁和电耦合率, E_{e1} 、 H_{e1} 为小孔处的场。



图28 TE_{010} 模通过圆柱空腔的缝隙耦合

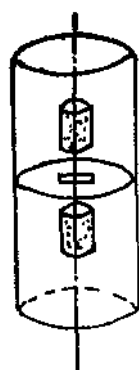


图29 HEM_{110} 模通过圆柱空腔端壁上的缝隙耦合

八、介质谐振器中简并模间的耦合

图30——32为简并模间的耦合, 则 i 和 j 模间的耦合系数为

$$k_{ji} = \frac{a_{ji} - b_{ji}}{1 + C} \quad (65)$$

$$a_{ji} = \int \epsilon H_i H_j dV$$

$$b_{ji} = \int \epsilon E_i E_j dV$$

$$c = \int \epsilon (H_i^2 - E_i^2) dV$$

(66)

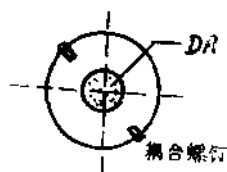


图30 两正交简并模间的耦合



图31 两维正交结构间的耦合

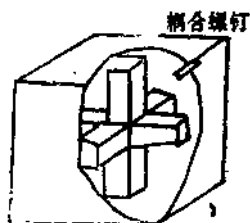


图32 三维正交结构间的耦合

介质谐振器的有限元分析

上海交通大学

张 苓 孙诗瑛

本文用基于变分原理的有限元法对放置在衬底上的介质谐振器进行数值分析, 由该方法计算得到的介质谐振器的谐振频率与开波导法〔1〕的计算结果吻合。

一、引言

由于介质谐振器在微波电路中日益广泛的应用, 人们开始注重于介质谐振器的分析研究, 已有一系列文章介绍了介质谐振器谐振频率的计算方法, 它们大都是解析方法, 如: 磁壁法〔2〕、变分法〔3〕、开波导法〔4〕、混合波导模型法〔5〕、模匹配法〔6〕、初等函数近似法〔7〕等。在这里, 我们讨论一种数值分析法——有限元法, 根据变分原理, 把亥姆霍兹方程边值问题转化为等价的变分问题, 然后对其进行有限元分析。该方法可计算TE和TM模的谐振频率, 并能给出相应的场分布, 从而可进一步分析介质谐振器的耦合系数以及空载品质因数。

二、原理

讨论如图1所示的结构, 在厚度为 L_2 的衬底上放置一圆柱形介质谐振器, 其高为 L , 直径为 D , 介质谐振器顶部到金属盖板的距离为 L_1 。

由于介质谐振器的对称性, 电磁场满足二维Helmholtz方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + K^2 \phi = 0 \quad (1)$$

其中:

$$\phi = Hz \quad \text{对TE模}$$

$$\phi = Ez \quad \text{对TM模}$$

$$K^2 = \begin{cases} \epsilon_r k_0^2 & \text{在衬底中} \\ \epsilon_r K_0^2 & \text{在介质谐振器中} \\ k_0^2 & \text{其余} \end{cases}$$

以下以TE模为例, 考虑Helmholtz方程的边值问题:

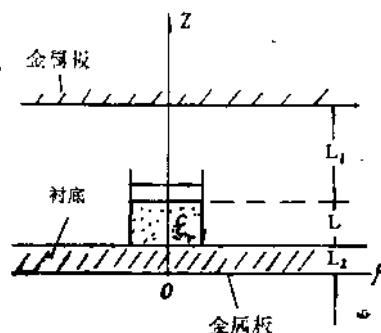


图1

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + K^2 \phi = 0 \\ \phi|_{z=0, L_1+L+L_2} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

这里，仅考虑强加边界条件，因自然边界条件在等价的变分问题中，当达到极值时被自动满足，另由于整个区域和介电常数是关于Z轴左右对称的，因此只需分析右半边区域，

此时，在Z轴上 $\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0$ ，这是自然边界条件，同样被自动满足。

根据方程(1)的泛函，求得边值问题所对应的等价变分问题为：

$$\begin{cases} \min; J(\phi) = \frac{1}{2} \left\{ \iint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \rho d\rho dz \right. \\ \left. - K^2 \iint \phi^2 \rho d\rho dz \right\} \\ \phi|_{z=0, L_1+L+L_2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

现在，我们采用矩形单元对连续场进行离散，先导出矩形单元的特征式。

设其中任意的e单元的四个角点分别为i、j、

l、m，边长分别为2a、2b，局部坐标为x'o'y，

它与总体坐标ρoz的关系是

$$\begin{aligned} \rho &= x + \rho_{i+1} - a \\ z &= y + z_{j+1} - b \end{aligned} \quad (4)$$

这时，方程(1)的泛函为：

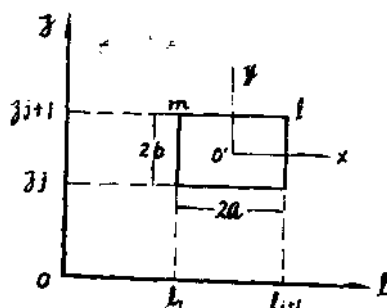


图2

$$\begin{aligned} J^e(\phi) &= \frac{1}{2} \iint_{\square} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - K^2 \phi^2 \right] \rho d\rho dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 - K^2 \phi^2 \right] (x + \rho_{i+1} - a) dx dy \quad (5) \end{aligned}$$

取单元的场变量模型为：

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (6)$$

根据e单元的四个角点的局部坐标及其φ值，可解得：

$$\phi = [N_i \ N_j \ N_l \ N_m] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_l \\ \phi_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中：

$$N_i = \frac{1}{4ab} (a-x)(b-y)$$

$$N_j = \frac{1}{4ab} (a+x)(b-y)$$

$$N_l = \frac{1}{4ab} (a+x)(b+y) \quad (8)$$

$$N_m = \frac{1}{4ab} (a-x)(b+y)$$

为使单元面积保持正号, i, j, l, m 应按逆时针方向的次序排列, 将泛函 (5) 对 ϕ_i 求导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^e}{\partial \phi} = & \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} \right] \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_l \\ \phi_m \end{pmatrix} \frac{\alpha N_i}{\alpha x} (x + \rho_{i+1} - a) dx dy \\ & + \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right] \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_l \\ \phi_m \end{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y} (x + \rho_{i+1} - a) dx dy \\ & - K^2 \int_{-b}^b \int_{-a}^a [N_i^2 N_j N_l N_m] \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_l \\ \phi_m \end{pmatrix} (x + \rho_{i+1} - a) dx dy \quad (9) \end{aligned}$$

对 (8) 分别求 N_i, N_j, N_l, N_m 的偏微分值, 再代入 (9) 进行积分运算, 得:

$$\frac{\partial J^e}{\partial \phi} = [K_{ii} K_{ij} K_{il} K_{im}] \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_l \\ \phi_m \end{pmatrix} - K^2 [h_{ii} h_{ij} h_{il} h_{im}] \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_l \\ \phi_m \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\text{其中: } K_{ii} = \frac{4}{3\Box} \left(b^2 \times \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} + a^2 \times \frac{\rho_{i+1} + 3\rho_i}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{12} \left[2t_i (\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{\rho_{i+1} + 3\rho_i}{t_i} \right]$$

$$K_{ij} = \frac{2}{3\Box} \left(-2b^2 \times \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} + a^2 \times \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{12} \left[-2t_i (\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{t} \right]$$

$$K_{ii} = \frac{2}{3\Box} \left(-b^2 \times \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} - a^2 \times \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{12} \left[\left(-t_i + \frac{1}{t_i} \right) (\rho_{i+1} + \rho_i) \right]$$

$$k_{im} = \frac{2}{3\Box} \left(b^2 \times \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} - 2a^2 \times \frac{\rho_{i+1} + 3\rho_i}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{12} \left[t_i (\rho_{i+1} + \rho_i) \left(-\frac{\rho_{i+1} + 3\rho_i}{t_i} \right) \right]$$

$$h_{ii} = \frac{\Box}{9} \times \frac{\rho_{i+1} + 3\rho_i}{4} \varepsilon_i = \frac{\Box}{72} \times 2 (\rho_{i+1} + 3\rho_i) \varepsilon_i$$

$$h_{ij} = \frac{\Box}{18} \times \frac{\rho_{i+1} + \rho_j}{2} \varepsilon_i = -\frac{\Box}{72} \times 2 (\rho_{i+1} + \rho_i) \varepsilon_i$$

$$h_{il} = \frac{\Box}{36} \times \frac{\rho_{i+1} + \rho_l}{2} \varepsilon_i = -\frac{\Box}{72} (\rho_{i+1} + \rho_i) \varepsilon_i$$

$$h_{im} = -\frac{\Box}{18} \times \frac{\rho_{i+1} + 3\rho_i}{4} \varepsilon_i = -\frac{\Box}{72} \times (\rho_{i+1} + 3\rho_i) \varepsilon_i$$

$$t_i = \frac{z_{i+1} - z_j}{\rho_{i+1} - \rho_i}$$

$$\Box = 4ab = (\rho_{i+1} - \rho_i) (z_{i+1} - z_j)$$

同理，可计算 $\frac{\partial J^e}{\partial \phi_j}$, $\frac{\partial J^e}{\partial \phi_l}$, $\frac{\partial J^e}{\partial \phi_m}$ ，并把它们合并为：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J^e}{\partial \phi_i} \\ \frac{\partial J^e}{\partial \phi_j} \\ \frac{\partial J^e}{\partial \phi_l} \\ \frac{\partial J^e}{\partial \phi_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{il} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jl} & k_{jm} \\ k_{li} & k_{lj} & k_{ll} & k_{lm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{ml} & k_{mm} \end{bmatrix} - k_0^2 \begin{bmatrix} h_{ii} & h_{ij} & h_{il} & h_{im} \\ h_{ji} & h_{jj} & h_{jl} & h_{jm} \\ h_{li} & h_{lj} & h_{ll} & h_{lm} \\ h_{mi} & h_{mj} & h_{ml} & h_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_l \\ \phi_m \end{bmatrix}$$

$$\text{或简写为: } \left\{ \frac{\partial J^e}{\partial \phi^e} \right\} = \left\{ [K]^e - K_0^2 [H]^e \right\} \{\phi\}^e \quad (11)$$

即为矩形单元特征式,其中的 $\{K\}^e$ 、 $\{H\}^e$ 分别为:

$$\{K\}^e = \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} et_i(\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{\rho_{i+1} + 3\rho_i}{t_i}, \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{t_i}, -2t_i(\rho_{i+1} + \rho_i), -(t_i + \frac{1}{t_i})(\rho_{i+1} + \rho_i), t_i(\rho_{i+1} + \rho_i) - \frac{3\rho_i + \rho_{i+1}}{t_i} \\ \text{对} \quad 2t_i(\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{3\rho_{i+1} + \rho_i}{t_i}, t_i(\rho_{i+1} + \rho_i) - \frac{3\rho_{i+1} + i_i}{t_i}, -(t_i + \frac{1}{t_i})(\rho_{i+1} + \rho_i) \\ \text{称} \quad 2t_i(\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{3\rho_{i+1} + \rho_i}{t_i}, \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{t_i}, -2t_i(\rho_{i+1} + \rho_i) \\ 2t_i(\rho_{i+1} + \rho_i) + \frac{\rho_{i+1} + 3\rho_i}{t_i} \end{Bmatrix}$$

$$\{H\}^e = \frac{1}{72} \begin{Bmatrix} e_i \times S_i \\ \text{对} \quad 2(3\rho_i + \rho_{i+1}), 2(\rho_{i+1} + \rho_i), \rho_{i+1} + \rho_i, \rho_{i+1} + 3\rho_i \\ \text{称} \quad 2(3\rho_i + \rho_i), 3\rho_{i+1} + \rho_i, \rho_{i+1} + \rho_i \\ 2(3\rho_{i+1} + \rho_i), 2(\rho_{i+1} + \rho_i) \\ 2(3\rho_i + \rho_{i+1}) \end{Bmatrix}$$

$$t_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{\rho_{i+1} - \rho_i}$$

$$S_i = (z_{i+1} - z_i)(\rho_{i+1} - \rho_i)$$

$$e_i = \begin{cases} \varepsilon_s & \text{在衬底中} \\ \varepsilon_c & \text{在介质谐振器中} \\ 1 & \text{其余} \end{cases}$$

求出了矩形单元特征式,就可把汇交于同一节点的单元特征式进行叠加,得到整个场的联列方程式: